

STAR EDUCATION

OLYMPIC TOÁN NGA 2017
Bản dịch tiếng Việt

Biên soạn:

VÕ HOÀNG PHÚC KHANG

MỤC LỤC

1	Vòng 1.....	2
2	Vòng 2.....	9
3	Olympic Trường 239.....	19
4	Các Đề Phương Án 2.....	23
5	Lời Giải Bài Toán.....	27
6	GÓC OLYMPIADOPHILE.....	104
7	Olympic Quốc Tế Tuymaada 2016.....	133
8	Đừng Bỏ Phiếu Cho Màu Đỏ!.....	144
9	Góc Olympiadophobe.....	146

OLYMPIC TOÁN NGA 2017

§1. VÒNG 1



LỚP 6

1. Seryozha đánh dấu 6 ngày liên tiếp của tháng Tư trên lịch và ghi ra các ngày đó. Cậu thu được 6 số nguyên liên tiếp tăng dần. Masha nhân 4 số đầu tiên với nhau, Tanya nhân 4 số cuối với nhau, còn Seryozha nhân tất cả các số lại ngoại trừ số lớn nhất và nhỏ nhất. Chữ số tận cùng của các tích mà Masha và Tanya tính ra là giống nhau, nhưng chữ số tận cùng trong tích của Seryozha lại là một số khác. Hỏi chữ số tận cùng trong tích của Seryozha là chữ số nào? Hãy tìm tất cả các đáp án có thể và chứng minh rằng không còn đáp án nào khác.

(A. Golovanov)

1	0	-1	-2	-3	-4
апреля	апреля	апреля	апреля	апреля	апреля
суббота	fredag	jueves	mercredi	wtorek	monday

2. Trên đường vành đai Uryupinsk có 5 ngôi làng. Từ mỗi làng, có thể đi xe buýt mất 2 giờ để đến 2 ngôi làng nào đó, và đi xe đạp mất 4 giờ để đến 2 ngôi làng còn lại (quá trình di chuyển đi thẳng không dừng và trên đoạn đường đi qua không quá một ngôi làng trung gian). Vận tốc xe buýt luôn không đổi, vận tốc xe đạp cũng không đổi và nhỏ hơn vận tốc xe buýt. Hỏi đi xe buýt hết một vòng đường vành đai mất bao lâu?

(A. Golovanov)

3. Trên một bảng ô vuông 4×9 có 9 ô tô màu đỏ, 11 ô màu xanh dương và 16 ô màu trắng. Khi nhấp chuột vào một hàng hoặc một cột, quy tắc đổi màu sẽ như sau: nếu trong đường lưới đó, số lượng ô của một màu nào đó nhiều hơn số lượng ô của mỗi màu trong hai màu còn lại, thì toàn bộ đường lưới đó sẽ được đổi sang màu đó; nếu không có màu nào chiếm số lượng vượt trội như vậy thì không có gì thay đổi. Người ta nhận thấy, nếu nhấp chuột lần lượt vào tất cả các hàng rồi đến tất cả các cột, thì mọi ô đều biến thành màu đỏ. Còn nếu thay vào đó nhấp tất cả các cột trước, rồi mới đến tất cả các hàng, thì mọi ô đều biến thành màu xanh dương. Hãy chỉ ra một ví dụ về bảng thỏa mãn điều kiện đó.

(O. Ivanova)

4. Trong một khu dân cư có 5 tòa nhà, số cư dân sống ở đó lần lượt là 5, 15, 25, 35, 45 người. Biết rằng mỗi người đều có ít nhất hai người trùng tên với mình trong tổng số dân của khu. Chứng minh rằng có ai đó có người trùng tên sống trong cùng tòa nhà với mình.

(O. Ivanova)

B LỚP 7

5. Hình bên phải là một bảng được điền theo quy luật "con rắn": hàng thứ nhất điền các số tăng dần từ trái sang phải, bắt đầu từ 1; hàng thứ hai tiếp tục dãy số nhưng viết từ phải sang trái; hàng thứ ba lại viết từ trái sang phải; và cứ thế tiếp diễn.

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Andrey có một bảng lớn hơn, cũng được điền theo kiểu con rắn, bắt đầu từ số 1. Trong bảng của Andrey xuất hiện một hình vuông 2×2 chứa các số:

13	12
32	33

Hỏi bảng của Andrey có tất cả bao nhiêu cột? Hãy đưa ra tất cả các phương án có thể và chứng minh không còn phương án nào khác.

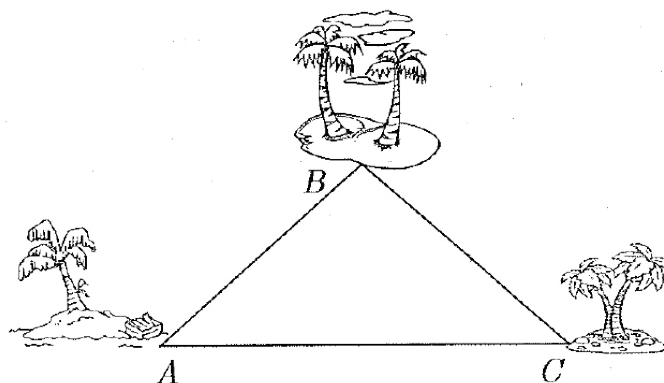
(A. Solynin)

6. Trên bảng có viết 10 số tự nhiên. Tất cả các chữ số tận cùng của chúng đều phân biệt. Ngoài ra, tất cả các chữ số áp chót (hàng chục) của chúng cũng phân biệt. Chứng minh rằng tổng của 10 số đó không thể là một số chính phương.

(A. Golovanov)

7. Trong đại dương có ba hòn đảo A, B, C , với khoảng cách từ A đến B và từ B đến C đều bằng 50 km, còn từ A đến C là 70 km. Cùng lúc, một du thuyền xuất phát từ A đến C , và một ca-nô xuất phát từ C đến B , cả hai đều có vận tốc 10 km/h. Sau 2 giờ, du thuyền mắc cạn và phát tín hiệu cấp cứu. Ca-nô lập tức đổi hướng, tăng vận tốc gấp đôi và lao đến du thuyền. Từ đảo B , một xuồng cứu hộ cũng xuất phát đến du thuyền với vận tốc 20 km/h. Chứng minh rằng xuồng cứu hộ và ca-nô sẽ đến chỗ du thuyền cùng một lúc.

(A. Kuznetsov)



8. Dọc theo một con đường ở xứ sở Ngốc Nghếch có mọc 10 bụi cây, trên mỗi bụi có 9 đồng xu. Người qua đường phải hái 2, 3 hoặc 4 đồng từ mỗi bụi, nhưng không ai được hái số xu bằng nhau ở hai bụi kề nhau, nếu không lính canh sẽ bắt giữ người vi phạm. Alice, sau đó là Buratino và cuối cùng là Basilio lần lượt đi dọc con đường và hái hết toàn bộ số xu. Alice hái được không dưới 35 đồng. Chứng minh rằng một trong hai người còn lại hái được ít hơn 26 đồng xu.

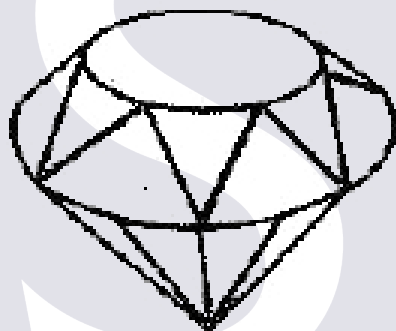
(K. Sukhov)



LỚP 8

9. Giá trị của một viên kim cương tính theo rúp bằng bình phương khối lượng của nó tính theo gam nhân với 100; còn giá trị của một viên pha lê núi tính theo rúp bằng 3 lần khối lượng của nó tính theo gam. Hai anh em được thừa kế một số viên đá có tổng giá trị 3000000 rúp. Họ chia đôi mỗi viên đá và mỗi người lấy một nửa của từng viên. Kết quả là mỗi người nhận được số đá trị giá 1000000 rúp. Hỏi ban đầu số kim cương trong khối thừa kế trị giá bao nhiêu?

(A. Solshin)



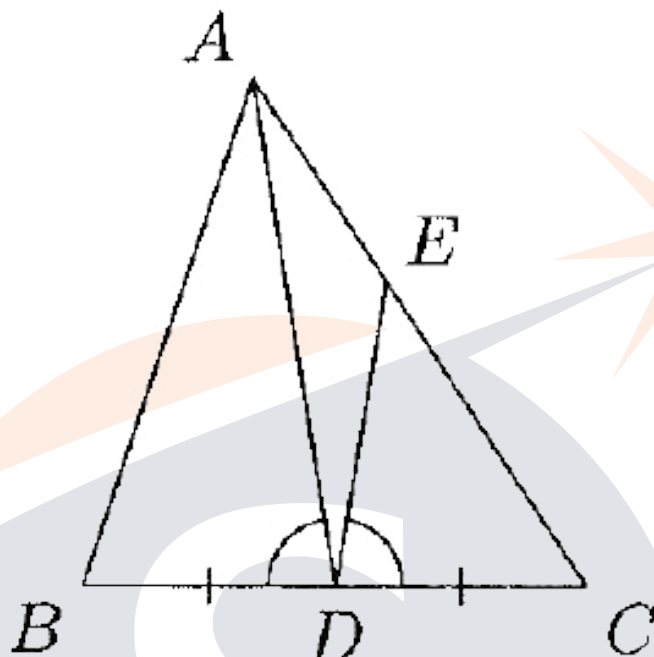
Цена
99,999т² руб.

10. Xem bài 4.

11. Trong một đề thi olympic có 7 bài toán, mỗi bài được đánh giá tối đa 8 điểm. Kết quả chấm thi cho thấy mọi thí sinh đều đạt số điểm khác nhau. Ban tổ chức đã âm thầm sửa các điểm 0 thành 6, 1 thành 7, 2 thành 8. Kết quả của sự gian lận này là thứ tự xếp hạng của các thí sinh bị đảo ngược hoàn toàn. Hỏi số lượng thí sinh lớn nhất có thể là bao nhiêu? Hãy đưa ra một ví dụ và chứng minh rằng không thể có nhiều thí sinh hơn.

(V. Frank)

12. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD . Điểm E nằm trên đoạn AC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{CDE}$. Chứng minh rằng chu vi tam giác ADC lớn hơn chu vi tứ giác $ABDE$.
(A. Kuznetsov)

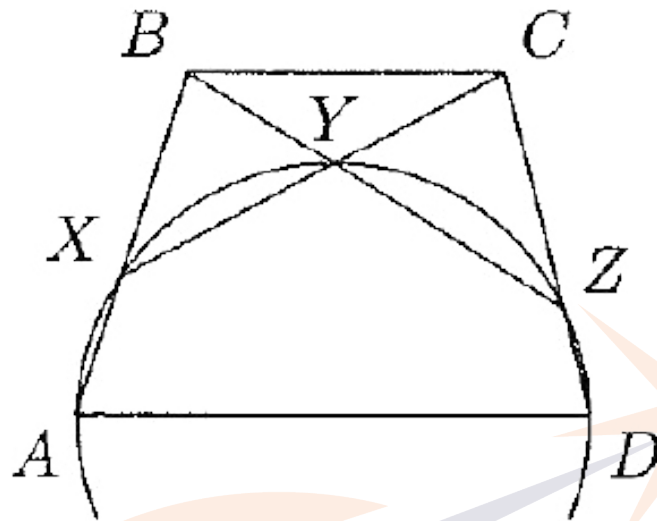


13. Hai số tự nhiên hơn kém nhau 10. Dạng biểu diễn thập phân của tích hai số này chỉ gồm toàn chữ số 9. Hãy tìm hai số đó.
(A. Kuznetsov)



LỚP 9

14. Tam thức bậc hai $x^2 + px + q$ có hai nghiệm nguyên phân biệt khác không là a và b . Biết rằng $a + p$ chia hết cho $q - 2b$. Hỏi số a có thể nhận những giá trị nào? (Đưa ra tất cả các đáp án và chứng minh rằng không còn đáp án nào khác.)
(A. Khrabrov, S. Berlov)
15. Người ta đem cửa 100 hình chữ nhật bằng gỗ dán kích thước 5×6 (kẻ sẵn ô vuông) dọc theo các đường lưới thành nhiều mảnh, và từ tất cả các mảnh này, họ ghép thành một số hình vuông 2×2 và một số hình dạng \square . Hỏi số mảnh ít nhất có thể cắt ra là bao nhiêu để làm được việc này, nếu các mảnh được phép quay và lật mặt?
(A. Khrabrov)
16. Trên các cạnh bên AB và CD của hình thang $ABCD$, lần lượt lấy các điểm X và Z . Các đoạn thẳng CX và BZ cắt nhau tại điểm Y . Biết rằng ngũ giác $AXYZD$ nội tiếp. Chứng minh rằng $AY = DY$.
(A. Kuznetsov)



17. Trước giờ mở cửa phòng quản lý nhà ở, đã có 100 người xếp hàng chờ sẵn ở quầy; trong ngày hôm đó tiếp tục có đông người đến thêm. Mỗi khi có một khách hàng tiến lên quầy làm việc, nhân viên sẽ chia đều lượng thời gian còn lại cho đến cuối ngày cho tổng số người đang có mặt trong hàng (bao gồm cả người vừa bước lên quầy), và tiến hành phục vụ người đó đúng bằng thời gian tính được. Tổng cộng đã có 130 người được phục vụ trong ngày. Chứng minh rằng tồn tại 5 khách hàng được nhận cùng một lượng thời gian phục vụ bằng nhau.
(Giả thiết rằng không có giờ nghỉ trưa và không có ai nhập hàng đúng vào thời điểm khách kế tiếp bước lên quầy.)
(N. Vlasova)
18. Trên màn hình của một chiếc máy tính cầm tay chỉ có một nút bấm đang hiển thị một số tự nhiên n . Mỗi lần bấm nút, máy tính thay số n bằng số $\left[(1 + \sqrt{3})n + \frac{1}{2} \right]$. Dima bấm nút nhiều lần, các số lần lượt xuất hiện trên màn hình. Chứng minh rằng mỗi số tiếp theo trên màn hình lúc nào cũng bằng gấp đôi tổng của hai số liền trước nó.
(A. Khrabrov)



LỚP 10

19. Xem bài 14.
20. Liệu đồ thị của các hàm số

$$y = ax + b, \quad y = ax + c, \quad y = bx + c,$$

$$y = bx + a, \quad y = cx + a, \quad y = cx + b$$

có thể chứa các cạnh và đường chéo của một tứ giác nào đó hay không?

(A. Solshin)

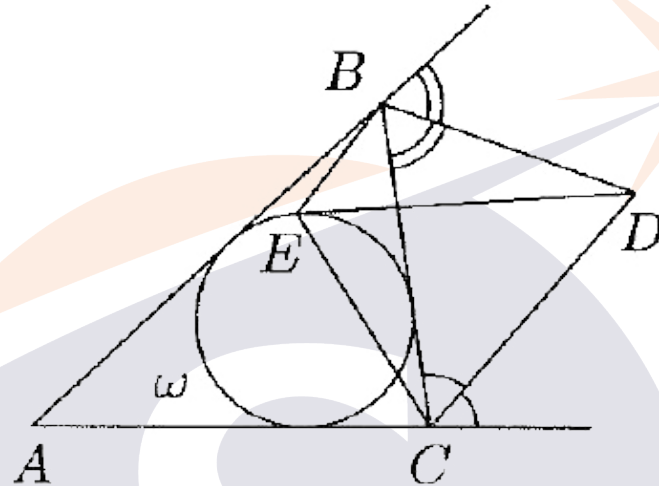
21. Người ta đem cưa 100 hình chữ nhật bằng gỗ dán kích thước 6×7 dọc theo các đường lưới thành nhiều mảnh, và từ tất cả các mảnh này, họ ghép thành một số hình dạng \square và một số hình dạng \square . Hỏi số mảnh ít nhất có thể cắt ra là bao nhiêu để làm được việc này, nếu các

mảnh được phép quay và lật mặt (một hình có thể được ghép từ số lượng mảnh tùy ý, kể cả 1 mảnh)?

(A. Khrabrov)

22. Tam giác ABC nội tiếp một đường tròn ω . Biết $\widehat{A} = 43^\circ$. Các đường phân giác ngoài của \widehat{B} và \widehat{C} cắt nhau tại D . Từ D kẻ tiếp tuyến DE đến đường tròn ω . Tính \widehat{BEC} .

(A. Kuznetsov)



23. Dãy số tự nhiên (a_n) được xác định bởi số hạng đầu $a_1 > 2000$ và quy tắc:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{nếu } a_n \text{ chẵn,} \\ 3a_n + 1, & \text{nếu } a_n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong dãy này sẽ xuất hiện một số chia hết cho 4.

(N. Filonov)

F

LỚP 11

24. Có thể điền các số từ 1 đến 63 vào bảng 7×9 sao cho trong mọi hình vuông con 2×2 , tổng bốn số luôn là số lẻ hay không?

(A. Khrabrov)

25. Xem bài 17.

26. Có tồn tại các số tự nhiên a, b, c sao cho a và b có đúng 1000 ước chung, a và c có đúng 720 ước chung, còn a, b, c có đúng 350 ước chung hay không?

(A. Solnich, F. Petrov)

27. Đồ thị của đa thức bậc ba $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt một đường thẳng song song với trục hoành thành hai đoạn thẳng có độ dài bằng 1, đồng thời cắt một đường thẳng song song với đường thẳng $y = x$ thành hai đoạn thẳng, trong đó một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{2}$. Hỏi độ dài đoạn thẳng còn lại có thể bằng bao nhiêu?

(A. Golovanov, F. Petrov)

28. Diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ bằng S . Biết $AB = 6$, $BC = 9$, $CD = 7$, $DA = 2$.
Chứng minh rằng $S > AC \cdot BD$.
(A. Kuznetsov)



§2. VÒNG 2



LỚP 6

29. Trên bảng viết 10 số tự nhiên. Biết rằng tích của bất kỳ 4 số nào trong đó cũng đều chia hết cho 30. Chứng minh rằng có ít nhất một số trên bảng tự nó chia hết cho 30.
(A. Golovanov)
30. Ta gọi *phép đổi chỗ kề nhau* của một số tự nhiên là thao tác đổi vị trí hai chữ số liền kề bất kỳ của nó. Hãy tìm tất cả các số có 19 chữ số sao cho sau mọi phép đổi chỗ như vậy (ngoại trừ nhiều nhất một phép), số đó đều tăng giá trị.
(S. Berlov)
31. Cậu bé Vasya sống trong một tòa nhà N tầng có thang máy (có các nút bấm cho mọi tầng từ 1 đến N). Sau khi Vasya nghịch, thang máy bắt đầu hoạt động bất thường. Cụ thể, nếu đang ở tầng a và bấm nút tầng b , thang máy chỉ chạy đến đó nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện: $a + b$ chia hết cho 2017, hoặc $a - b$ chia hết cho 2018. Vasya chống chế rằng với thang máy này vẫn có thể đi từ bất kỳ tầng nào đến bất kỳ tầng nào khác. Hỏi giá trị nhỏ nhất của N để lời Vasya có thể đúng là bao nhiêu?
(A. Solynin)
32. Trên một tấm bảng rất lớn có viết số tự nhiên $100 \dots 000$ (gồm 2017 chữ số 0). Vasya và Petya luân phiên nhau đi, Petya đi trước. Ở mỗi lượt, người chơi có thể xóa số đang có trên bảng và thay bằng một số nhỏ hơn nhưng không được là ước của số cũ. Ai không thể thực hiện được nước đi sẽ thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến lược chiến thắng, bất kể đối thủ đi thế nào?
(A. Chukhnov)
33. Tất cả các ô của bảng 8×9 ban đầu đều được tô màu xám. Ở hai góc đối diện của bảng có đặt hai quân cờ "Thợ sơn TDX" (Trắng-Đỏ-Xám) và "Thợ sơn TXĐ" (Trắng-Xám-Đỏ). Ở mỗi lượt đi, quân Thợ sơn TDX di chuyển sang một ô trống kề cạnh và đổi màu ô đó theo quy trình: từ trắng thành đỏ, từ đỏ thành xám, từ xám thành trắng. Quân Thợ sơn TXĐ cũng di chuyển sang ô trống kề cạnh nhưng đổi màu theo quy trình: từ trắng thành xám, từ xám thành đỏ, từ đỏ thành trắng. Hai thợ sơn đi luân phiên, Thợ sơn TDX đi trước. Chứng minh rằng Thợ sơn TXĐ, bất kể nước đi của đối phương thế nào, đều có thể hành động sao cho số ô màu xám trên bảng luôn không ít hơn 40 ô.
(E. Kulikova)
34. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nam chiếm một số nguyên phần trăm trên tổng số học sinh. Sau kỳ nghỉ Năm Mới, trường có thêm 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ chuyển đến, và tỉ lệ học sinh nam vẫn là một số nguyên phần trăm. Chứng minh rằng trước Năm Mới, tổng số học sinh của trường ít hơn 200 em.
(A. Solynin)

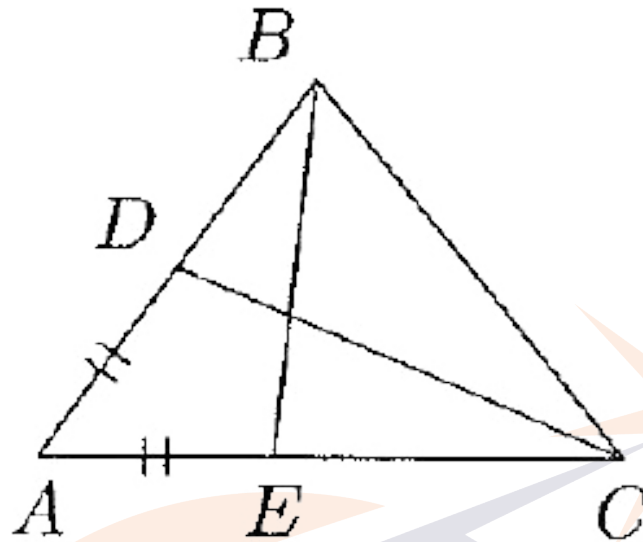


LỚP 7

35. Có thể cắt được nhiều nhất bao nhiêu chữ cái F không giao nhau (như hình vẽ) từ một hình vuông kích thước 300×300 ? Các hình chữ F có thể được quay và lật mặt.
(A. Solynin)



36. Trên các cạnh AB và AC của tam giác ABC , lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng từ ba đoạn thẳng BE , CD và BC có thể ghép được thành một tam giác.
(A. Kuznetsov)



37. Trên bảng viết các số từ 1 đến 1000000. Andrey xóa tất cả các số nguyên tố. Sau đó Nadya xóa mọi số chia hết cho ít nhất một số trong dãy:

$$2, 3, 4, \dots, 100, \quad 1000, 1001, 1002, \dots, 10000.$$

Chứng minh rằng tích của các số còn lại trên bảng là một lũy thừa (với số mũ lớn hơn 1) của một số tự nhiên nào đó.

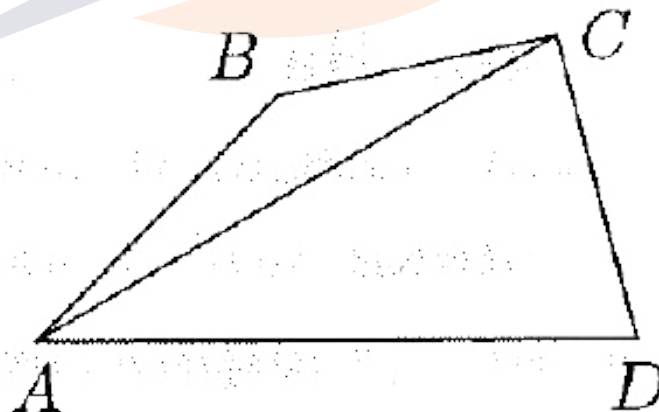
(S. Berlov, A. Solshin)

38. Trong một câu lạc bộ có 49 học sinh. Biết rằng nếu có ba học sinh đôi một không quen biết nhau thì luôn có hai người trong số họ có một người quen chung trong câu lạc bộ. Chứng minh rằng có ít nhất một học sinh quen không dưới 6 người trong câu lạc bộ.

(S. Berlov)

39. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Biết $\hat{A} = 45^\circ$, $\widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 75^\circ$, và $AB = CD = 1$. Tính độ dài đoạn BC .

(A. Solyunin)



40. Một số tự nhiên được gọi là số Palindrome nếu đọc từ trái sang phải hay từ phải sang trái đều như nhau. Cho số nguyên tố $p \leq 2017$. Chứng minh rằng tồn tại một số Palindrome có không

quá 449 chữ số và chia hết cho p .

(A. Solyunin)

41. Trong mỗi ô của hình chữ nhật $m \times n$, người ta kẻ hai đường chéo, kết quả là hình chữ nhật bị chia thành $4mn$ tam giác nhỏ. Tất cả các tam giác này được tô màu đen hoặc trắng sao cho mỗi tam giác trắng luôn có chung ít nhất một cạnh với một tam giác đen. Hỏi số lượng tam giác đen ít nhất có thể là bao nhiêu?

(N. Vlasova, S. Berlov)



LỚP 8

42. Xem bài 35.

43. Xem bài 37.

44. Seryozha viết liên tiếp các số phân biệt thành một hàng ngang. Đối với mỗi số mới được viết ra, trong số những số đã viết trước đó, số lượng các số lớn hơn nó và số lượng các số nhỏ hơn nó chênh lệch nhau không quá 1. Biết rằng số thứ 84 nhỏ hơn số thứ 219. Hỏi số nào lớn hơn: số thứ 83 hay số thứ 2017?

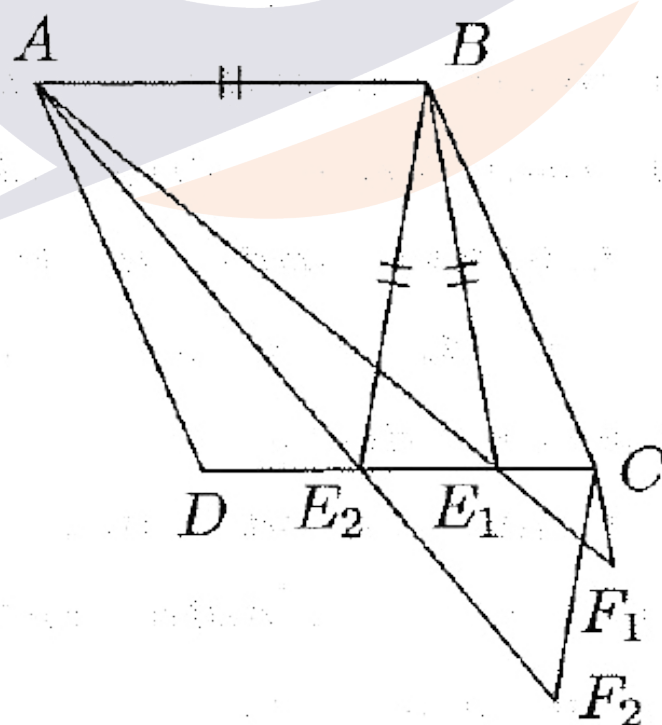
(A. Golovanov)

45. Trên cạnh CD của hình bình hành $ABCD$, lấy hai điểm E_1 và E_2 sao cho:

$$AB = BE_1 = BE_2.$$

Trên tia AE_1 lấy điểm F_1 sao cho $BE_1 \parallel CF_1$, và trên tia AE_2 lấy điểm F_2 sao cho $BE_2 \parallel CF_2$. Chứng minh rằng $DF_1 = DF_2$.

(A. Kuznetsov)

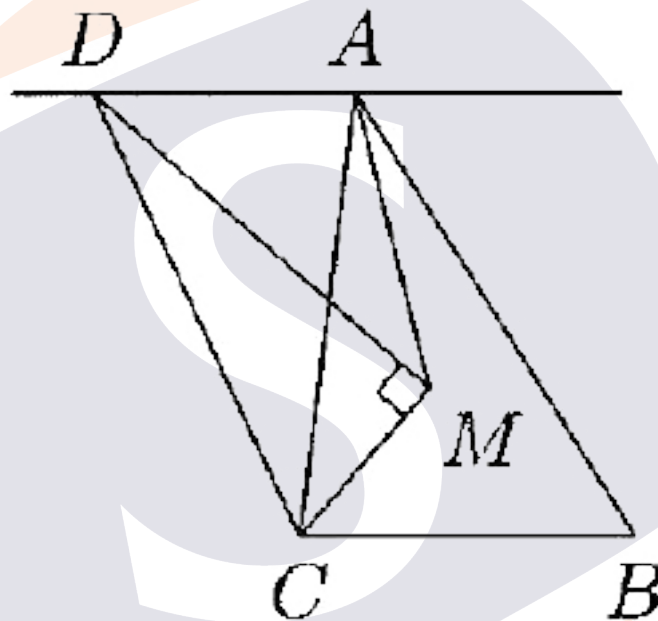


46. Một doanh nghiệp có nhiều nhân viên, mức lương của mỗi người là một số nguyên tugrik (các nhân viên khác nhau có thể có mức lương khác nhau). Đội thu ngân mang đến doanh nghiệp n đồng mệnh giá 1 tugrik, n đồng mệnh giá 2 tugrik, ..., n đồng mệnh giá 2017 tugrik. Tổng số tiền mang đến đúng bằng tổng quỹ lương phải trả cho toàn bộ nhân viên. Hỏi số lượng nhân viên lớn nhất có thể là bao nhiêu để chắc chắn doanh nghiệp luôn có thể phát đúng số tiền lương cho từng người?

(V. Frank)

47. Các đường trung tuyến của tam giác ABC cắt nhau tại điểm M . Trên đường thẳng đi qua A và song song với BC , lấy điểm D sao cho $\widehat{CMD} = 90^\circ$. Diện tích tứ giác $AMCD$ bằng S . Chứng minh rằng $AB \cdot CD \geq 2S$.

(A. Kuznetsov)



48. Petya và Vasya chơi một trò chơi trên dải ô vuông kích thước 1×99 , trong đó ô đầu tiên và ô cuối cùng được đánh dấu chấm. Hai người đi luân phiên, Petya đi trước. Mỗi nước đi, người chơi có thể tô màu hai ô chưa tô kề cạnh nhau. Ngoài ra, trong toàn bộ ván chơi (chỉ áp dụng một lần duy nhất cho cả hai người), một người có thể tô màu một ô có dấu chấm chưa được tô. Ai không thể thực hiện được nước đi sẽ thua cuộc. Hỏi cậu bé nào sẽ là người giành chiến thắng nếu cả hai đều chơi tối ưu?

(S. Berlov)



LỚP 9

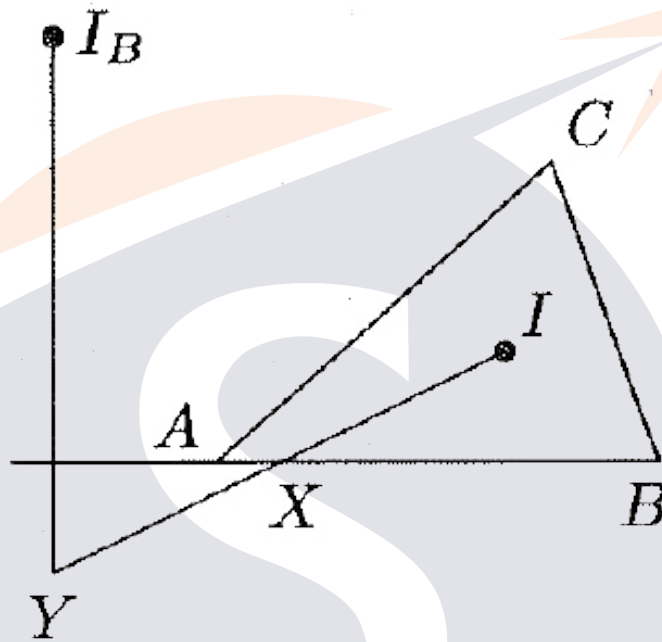
49. Máy tính của Sasha có thể thực hiện hai thao tác. Nếu nạp vào máy một thẻ ghi số a , máy sẽ trả lại thẻ đó và in thêm một thẻ ghi số $a + 1$. Nếu lần lượt nạp vào máy hai thẻ ghi số a và b , máy sẽ trả lại cả hai thẻ và in ra các thẻ ghi mọi nghiệm thực của tam thức bậc hai $x^2 + ax + b$ (có thể in ra hai thẻ, một thẻ hoặc không in thẻ nào). Ban đầu Sasha chỉ có một thẻ ghi số s . Có đúng là với mọi $s > 0$, đến một lúc nào đó Sasha luôn có thể nhận được thẻ mang số \sqrt{s}

hay không?

(A. Khrabrov)

50. Trong tam giác ABC , trên cạnh AB tồn tại một điểm X sao cho $2BX = BA + BC$. Điểm Y đối xứng với tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC qua điểm X . Chứng minh rằng $YI_B \perp AB$, trong đó I_B là tâm đường tròn bàng tiếp góc B (tiếp xúc với cạnh AC) của tam giác ABC .

(F. Bakharev)



51. Petya, Vasya và Tolya chơi trò chơi sau trên bàn cờ 100×100 . Họ lần lượt (Petya đi trước, rồi đến Vasya, rồi đến Tolya, rồi lại quay vòng về Petya, v.v.) tô màu các ô nằm ở biên của bàn cờ (tức là các ô có chung cạnh với biên ngoài). Cấm không được tô vào ô kề cạnh với một ô đã được tô trước đó. Ngoài ra, cũng không được phép tô vào ô đối xứng qua tâm bàn cờ với một ô đã được tô. Ai không thể đi tiếp sẽ thua cuộc. Liệu Vasya và Tolya có thể thỏa thuận phối hợp với nhau để ép Petya thua hay không?

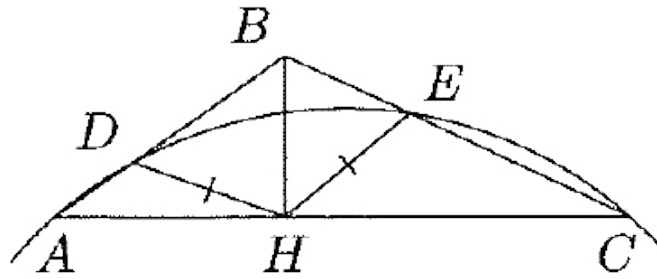
(S. Berlov)

52. Trong các ô của bảng $3 \times n$ có điền các số tự nhiên. Ở mỗi hàng, các số $1, 2, \dots, n$ đều xuất hiện đúng một lần. Đối với mỗi cột, tổng của các tích đôi một của ba số nằm trong cột đó chia hết cho n . Hỏi điều này có thể xảy ra với những giá trị nào của n ?

(N. Filonov)

53. Trong tam giác không cân ABC , góc B bằng 130° . Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh B . Trên các cạnh AB và BC tồn tại các điểm D và E sao cho $DH = EH$ và tứ giác $ADEC$ nội tiếp. Tìm số đo \widehat{DHE} .

(D. Shiryaev, S. Berlov)



54. Các số a, b và c nằm trong nửa khoảng $[0, 1)$ và thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Hỏi giá trị nhỏ nhất có thể của biểu thức

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

là bao nhiêu?

(A. Khrabrov)

55. Ta gọi *góc phần tư kể ô* là phần tư mặt phẳng nằm phía trên trục hoành và bên phải trục tung, được chia thành các ô vuông có cạnh bằng 1. Trong góc phần tư kể ô này có n^2 ô được tô màu. Chứng minh rằng trong góc phần tư này luôn tồn tại không ít hơn $n^2 + n$ ô (bao gồm cả những ô đã tô màu) có chung cạnh với ít nhất một ô được tô màu.

(S. Berlov, D. Shiryaev)



LỚP 10

56. Đối với một tam thức bậc hai, ta được phép thay thế bất kỳ hệ số nào trong ba hệ số của nó bằng chính biệt thức (Delta) của tam thức đó. Liệu có đúng là từ mọi tam thức bậc hai vô nghiệm, sau một số lần thực hiện thao tác như vậy, ta luôn có thể thu được một tam thức bậc hai có nghiệm hay không?

(A. Kuznetsov)

57. Dãy số (a_n) thỏa mãn các điều kiện $a_1 > 10$ và

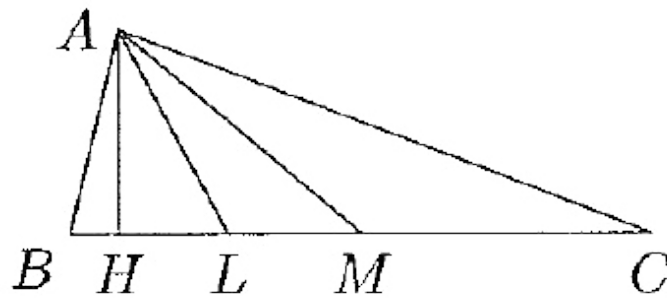
$$a_n = a_{n-1} + \text{UCLN}(n, a_{n-1}) \quad \text{khi } n > 1.$$

Biết rằng trong dãy này có một số hạng lớn gấp đôi chỉ số (vị trí) của nó. Chứng minh rằng có vô số các số hạng như vậy trong dãy.

(A. Khrabrov)

58. Trong tam giác nhọn ABC , kẻ đường trung tuyến AM , đường cao AH và đường phân giác AL . Người ta thấy rằng các điểm B, H, L, M, C cùng nằm trên đường thẳng BC theo đúng thứ tự đó, và $LH < LM$. Chứng minh rằng $BC > 2AL$.

(A. Kuznetsov)



59. Trên bảng viết các số từ 1 đến 2000^2 . Vasya đã chọn ra từ đó 2000 số có tổng nhỏ hơn tổng của tất cả các số trên bảng đúng 2000 lần, và tô đỏ chúng. Chứng minh rằng bạn Petya có thể tô màu tất cả các số còn lại bằng 1999 màu khác nhau (mỗi màu tô đúng 2000 số) sao cho tổng các số cùng màu của mỗi màu đều bằng nhau.

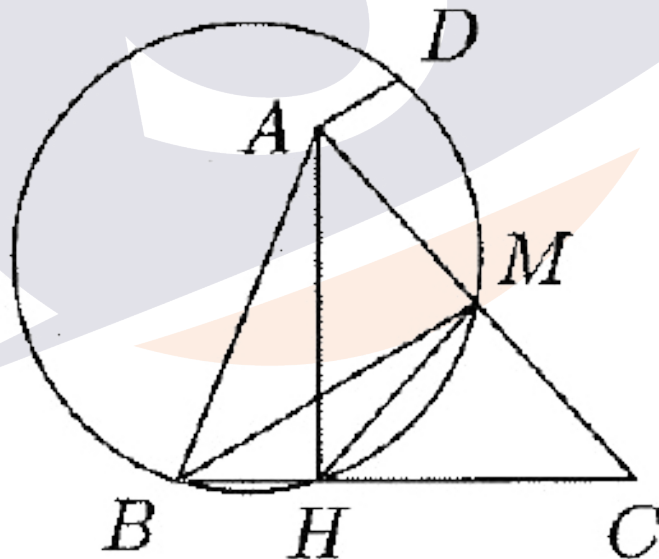
(A. Golovanov)

60. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{xyz} = xy + xz + yz$. Chứng minh rằng $x + y + z \leq \frac{1}{3}$.

(A. Khrabrov)

61. Trong tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH và đường trung tuyến BM . Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM , đánh dấu điểm D sao cho $AD \parallel BM$ và hai điểm B, D nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ là đường thẳng AC . Chứng minh rằng $BC = BD$.

(A. Kuznetsov)

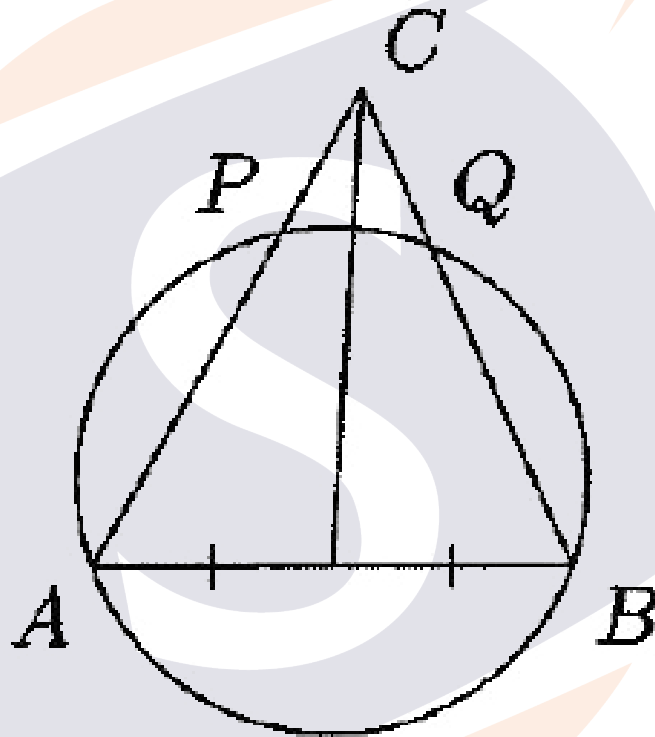


62. Ở một quốc gia nọ, một số cặp thành phố được nối với nhau bằng các đường một chiều, sao cho từ bất kỳ thành phố nào cũng có thể đi đến được mọi thành phố khác. Từ mỗi thành phố có ít nhất hai con đường đi ra và cũng có ít nhất hai con đường đi vào. Chứng minh rằng có thể tìm được một lộ trình khép kín (chu trình) rồi xóa bỏ toàn bộ các con đường thuộc lộ trình đó mà vẫn đảm bảo tính chất: từ mọi thành phố đều có thể đi đến được mọi thành phố khác.

(D. Karpov)

F LỚP 11

63. Học sinh trong trường tham gia vào m câu lạc bộ. Mỗi câu lạc bộ có đúng mk em tham gia. Chứng minh rằng có thể phân bổ tất cả học sinh trong trường vào k phòng học sao cho trong mỗi phòng đều có ít nhất một đại diện của mỗi câu lạc bộ (m, k là các số tự nhiên).
(D. Cherkashin)
64. Một đường tròn đi qua hai đỉnh A và B của tam giác ABC , cắt các cạnh AC và BC lần lượt tại hai điểm P và Q . Đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C chia đôi cung PQ của đường tròn này. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.
(D. Maksimov)



65. Các số $x, y, z, t \in (0, \pi/2]$ thỏa mãn điều kiện

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 1.$$

Hỏi giá trị nhỏ nhất có thể của biểu thức

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} t$$

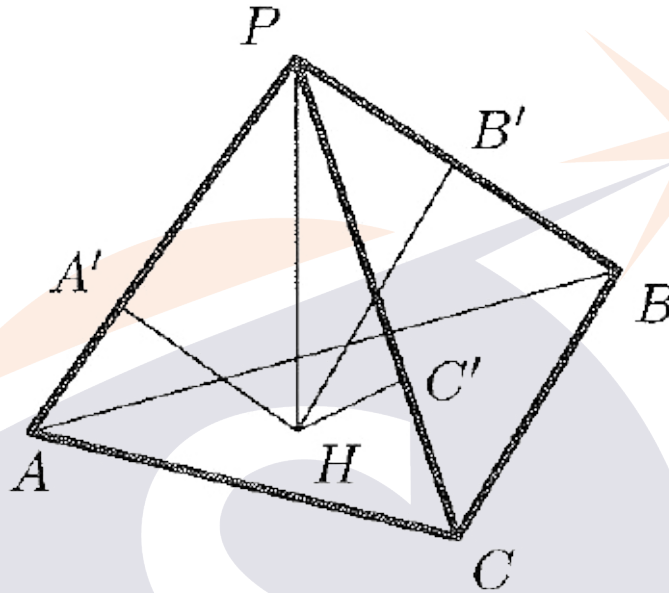
là bao nhiêu?

(A. Khrabrov)

66. Gọi số tự nhiên n là một số gần bình phương nếu n có thể biểu diễn được dưới dạng $n = ab$, trong đó a, b là các số tự nhiên thỏa mãn $a \leq b \leq 1,01a$. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên m sao cho trong dãy $m, m + 1, m + 2, \dots, m + 198$ không có bất kỳ số gần bình phương nào.
(A. Golovanov)

67. Trong tứ diện $PABC$, kẻ đường cao PH . Từ điểm H , hạ các đường vuông góc HA' , HB' và HC' lần lượt xuống các đường thẳng PA , PB và PC . Hai mặt phẳng ABC và $A'B'C'$ cắt nhau theo giao tuyến l . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng hai đường thẳng OH và l vuông góc với nhau.

(A. Kuznetsov)



68. Ở một nước nọ, một số nhà toán học có quen biết nhau; và với mọi cách chia các nhà toán học thành hai nhóm không rỗng, luôn tìm được hai người quen nhau nằm ở hai nhóm khác nhau. Biết thêm rằng nếu xếp bất kỳ nhóm nào gồm từ 4 nhà toán học trở lên ngồi quanh một chiếc bàn tròn sao cho hai người ngồi cạnh nhau bất kỳ đều quen nhau, thì trên bàn luôn tìm được hai người quen nhau nhưng không ngồi cạnh nhau. Gọi c_i là số lượng các nhóm gồm i nhà toán học đôi một quen biết nhau. Chứng minh rằng:

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots = 1.$$

(F. Petrov)

69. Trên mặt phẳng cho một đa giác lồi có các đỉnh là các điểm nguyên và chứa gốc tọa độ O nằm hoàn toàn bên trong. Gọi V_1 là tập hợp các vectơ đi từ O đến các đỉnh của đa giác, và V_2 là tập hợp các vectơ đi từ O đến tất cả các điểm nguyên nằm bên trong và trên biên của đa giác (như vậy $V_1 \subset V_2$). Có hai con châu chấu nhảy trên các điểm nguyên: mỗi bước nhảy của con thứ nhất dịch chuyển nó theo một vectơ thuộc tập V_1 , còn con thứ hai dịch chuyển theo một vectơ thuộc tập V_2 . Chứng minh rằng tồn tại một hằng số c sao cho mệnh đề sau đúng: nếu cả hai con châu chấu đều có thể nhảy từ O đến một điểm A nào đó, và con thứ hai cần n bước để làm điều đó, thì con thứ nhất cũng có thể đến được A với không quá $n + c$ bước nhảy.

(A. Azhopyan)

§3. OLYMPIC TRƯỜNG 239



LỚP 8, 9

70. Xét tất cả các hoán vị a_1, \dots, a_n của tập hợp các số từ 1 đến n . Với mỗi hoán vị, ta tính giá trị của biểu thức:

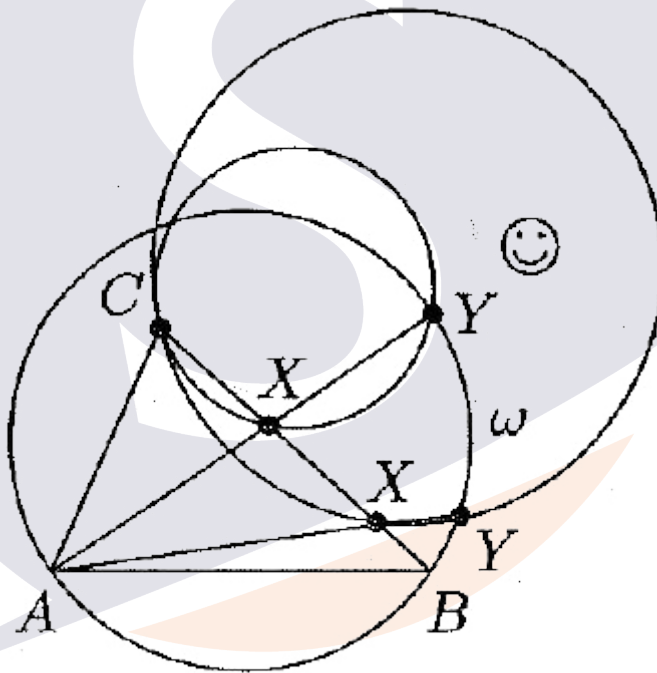
$$\frac{1}{a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \dots (a_1 + \dots + a_n)}$$

Chứng minh rằng tổng của các giá trị này trên toàn bộ $n!$ hoán vị luôn bằng $1/n!$.

(F. Petrov)

71. Cho đường tròn ω đi qua hai điểm A và B . Xét một điểm C nằm bên trong ω . Lấy một điểm X tùy ý trên đoạn thẳng CB . Tia AX cắt đường tròn ω lần thứ hai tại Y . Chứng minh rằng tồn tại hai điểm cố định trên mặt phẳng sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác CXY luôn đi qua hai điểm này, bất kể cách chọn điểm X .

(A. Kuznetsov)



72. Tìm tất cả các hợp số n sao cho với mọi cách phân tích $n = xy$ thành tích của hai số tự nhiên, tổng $x + y$ luôn là một lũy thừa của 2.

(P. Khodupov)

73. Có một chiếc xe tăng vô hình nằm trên một ô của bàn cờ kích thước 100×100 . Ở mỗi lượt, pháo binh có thể bắn vào 60 ô bất kỳ. Sau loạt bắn, xe tăng sẽ di chuyển sang một ô kề cạnh (nó có thể di chuyển vào chính ô vừa bị bắn trúng). Quá trình này cứ lặp lại liên tục. Hỏi pháo binh có chiến lược nào để đảm bảo sau một số lượt bắn nhất định chắc chắn sẽ trúng được xe tăng hay không?

(S. Berlov, D. Shiryaev)

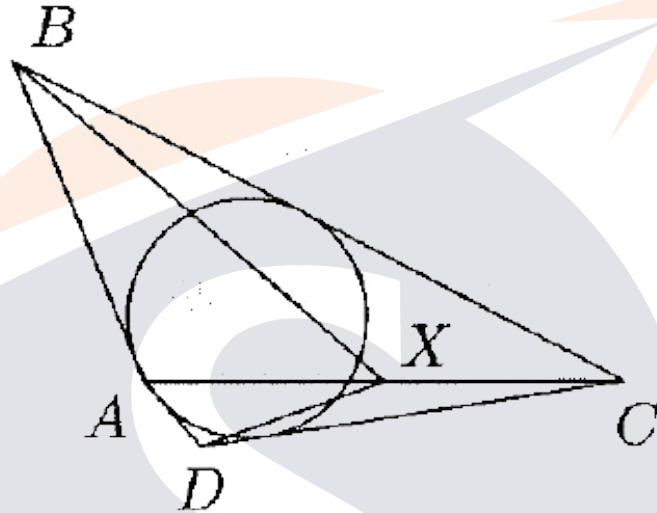
74. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{2}(BC - BA) = AC.$$

Gọi X là trung điểm của đường chéo AC . Chứng minh rằng

$$2\widehat{BXD} = \widehat{DAB} - \widehat{DCB}.$$

(F. Bakharev, S. Berlov)



75. Trên bảng có viết hai số tự nhiên x và y (với $y > x$). Ta được phép thực hiện thao tác sau: lấy một số đã có trên bảng chia cho một số khác cũng đã có trên bảng, rồi viết phần dư của phép chia đó lên bảng. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên k sao cho nếu số ban đầu $y > k$, thì tổng số các giá trị phân biệt có thể xuất hiện trên bảng không vượt quá $y/1000000$.

(M. Antipov)

76. Tìm giá trị lớn nhất của số $s > 0$ sao cho với mọi $a, b, c > 0$, bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2 \geq s \left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \right).$$

(B. Baev)

77. Trong một trường học có ba lớp. Một số cặp học sinh thuộc hai lớp khác nhau có quan hệ thù địch với nhau (không có bất kỳ cặp học sinh nào trong cùng một lớp thù địch nhau). Biết rằng đối với mỗi học sinh của lớp thứ nhất, số lượng học sinh lớp thứ hai thù địch với em đó luôn bằng số lượng học sinh lớp thứ ba thù địch với em đó; điều tương tự cũng đúng đối với các học sinh của lớp thứ hai và lớp thứ ba. Chứng minh rằng số cặp học sinh khác lớp có chung một kẻ thù luôn không nhỏ hơn số lượng các cặp học sinh thù địch nhau.

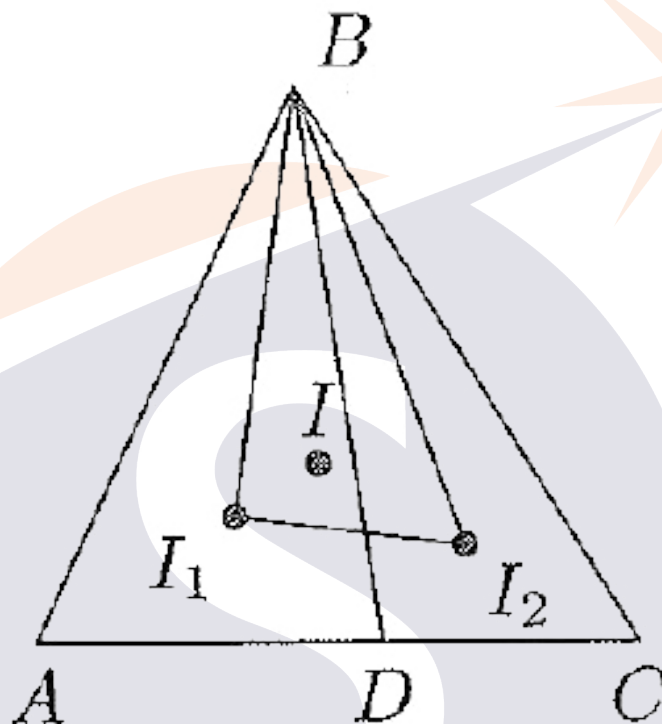
(I. Bogdanov)



LỚP 10, 11

78. Lấy điểm D trên cạnh AC của tam giác ABC . Gọi I_1, I_2, I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, BCD và ABC . Chứng minh rằng nếu I là trực tâm của tam giác BI_1I_2 thì BD là đường cao của tam giác ABC .

(S. Berlov)



79. Xem bài 72.

80. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(y + 1)f(yf(x)) = yf(x(y + 1)).$$

(S. Berlov)

81. Cho $f(x)$ là một đa thức có các hệ số nguyên. Đặt

$$d(a, k) = \left| \underbrace{f(f(\dots f(a)\dots))}_{k \text{ lần}} - a \right|.$$

Biết rằng $d(a, k) > 0$ với mọi số nguyên a và mọi số tự nhiên k . Chứng minh rằng

$$d(a, k) \geq \frac{k}{3}$$

với mọi $a \in \mathbb{Z}$ và $k \in \mathbb{N}$.

(M. Antipov)

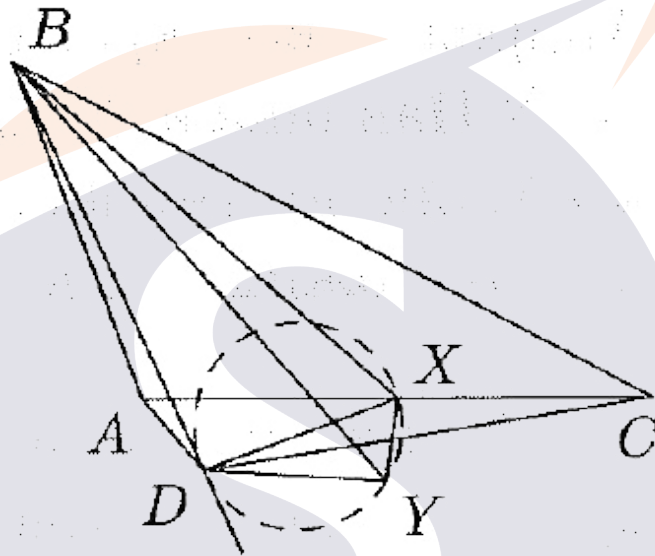
82. Xem bài 77.

83. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{2}(BC - BA) = AC.$$

Gọi X là trung điểm của đường chéo AC . Lấy điểm Y nằm trên tia phân giác của góc \widehat{B} sao cho tia XD là tia phân giác của góc \widehat{BXY} . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DXY tiếp xúc với đường thẳng BD .

(F. Bakharev)



84. Có một chiếc xe tăng vô hình nằm trên một ô của bàn cờ kích thước 100×100 . Ở mỗi lượt, pháo binh có thể bắn vào k ô bất kỳ. Sau khi bắn, xe tăng sẽ di chuyển sang một ô kề cạnh (nó có thể đi vào chính ô vừa bị trúng đạn). Quá trình này lặp lại liên tục. Hỏi giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu để pháo binh có chiến lược chắc chắn bắn hạ được xe tăng?

(S. Berlov, D. Shiryaev)

85. Xét một tập hợp gồm các hình bình hành phân biệt có diện tích bằng 1. Mỗi hình bình hành đều có một đỉnh nằm tại gốc tọa độ O , và ba đỉnh còn lại có tọa độ là các số nguyên không âm. Với mỗi hình bình hành $OABC$ trong tập hợp, ta xét giá trị $OA + OC - OB$. Chứng minh rằng tổng của các giá trị này trên tất cả các hình bình hành đó không vượt quá 2.

(N. Kalinin, M. Shkolnikov)

§4. CÁC ĐỀ PHƯƠNG ÁN 2

1. Andrey đánh dấu 6 ngày liên tiếp của tháng Sáu trên lịch và ghi ra các ngày đó. Sau đó, cậu viết 6 số tương ứng đó theo thứ tự giảm dần. Pavlik nhân bốn số đầu tiên với nhau, Andrey nhân tất cả các số lại ngoại trừ số lớn nhất và nhỏ nhất, còn Maya nhân bốn số cuối với nhau. Chữ số tận cùng của các tích mà Pavlik và Andrey tính ra là giống nhau, nhưng chữ số tận cùng trong tích của Maya lại là một số khác. Hỏi chữ số tận cùng trong tích của Maya là chữ số nào? Hãy tìm tất cả các đáp án có thể và chứng minh rằng không còn đáp án nào khác.
2. Trên một tuyến đường vành đai có 5 ngôi làng. Vasya nhận thấy rằng từ bất kỳ ngôi làng nào, cậu cũng có thể đạp xe mất 20 phút để đến 2 ngôi làng nào đó, và đi xe máy mất 10 phút để đến 2 ngôi làng còn lại (quá trình di chuyển đi thẳng không dừng và trên đoạn đường đi qua không quá một ngôi làng trung gian). Vận tốc xe máy luôn không đổi, vận tốc xe đạp cũng không đổi và nhỏ hơn vận tốc xe máy. Hỏi Vasya đi xe máy hết một vòng đường vành đai mất bao lâu?
3. Trên một bảng ô vuông kích thước 9×4 có 8 ô tô màu vàng, 12 ô màu xanh lá và 16 ô màu trắng. Khi nhấp chuột vào một hàng hoặc một cột, quy tắc đổi màu sẽ như sau: nếu trong đường lưới đó, số lượng ô của một màu nào đó nhiều hơn số lượng ô của mỗi màu trong hai màu còn lại, thì toàn bộ đường lưới đó sẽ được đổi sang màu đó; nếu không có màu nào chiếm số lượng vượt trội như vậy thì không có gì thay đổi. Người ta nhận thấy, nếu nhấp chuột lần lượt vào tất cả các hàng rồi đến tất cả các cột, thì mọi ô đều biến thành màu xanh lá. Còn nếu thay vào đó nhấp tất cả các cột trước, rồi mới đến tất cả các hàng, thì mọi ô đều biến thành màu vàng. Hãy chỉ ra một ví dụ về bảng thỏa mãn điều kiện đó.
4. Trong trường có 5 câu lạc bộ, số học sinh tham gia lần lượt là 7, 10, 13, 15, 25 (mỗi học sinh chỉ tham gia đúng một câu lạc bộ). Biết rằng mỗi học sinh đều có ít nhất hai bạn cùng lớp cũng tham gia trong 5 câu lạc bộ này. Chứng minh rằng có ít nhất một câu lạc bộ chứa hai học sinh học cùng lớp với nhau.
5. Bảng dưới đây được điền theo kiểu "con rắn": hàng thứ nhất điền các số tăng dần từ trái sang phải, bắt đầu từ 1; hàng thứ hai tiếp tục dãy số nhưng viết từ phải sang trái; hàng thứ ba lại viết từ trái sang phải; và cứ thế tiếp diễn.

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Nadya có một bảng lớn hơn, cũng được điền theo quy luật như vậy, bắt đầu từ số 1. Trong bảng của Nadya xuất hiện một hình vuông con 2×2 chứa các số:

15	14
38	39

Hỏi bảng của Nadya có tất cả bao nhiêu cột? Hãy đưa ra tất cả các phương án có thể và chứng minh không còn phương án nào khác.

6. Trên bảng có viết 5 số chẵn. Tất cả các chữ số hàng đơn vị và hàng chục của 5 số đó đều là các chữ số phân biệt (không có bất kỳ chữ số nào bị lặp lại). Chứng minh rằng tổng của 5 số này không thể là một số chính phương.
7. Trong đại dương có ba hòn đảo A, B, C với khoảng cách $AB = 60$ km, $AC = 60$ km, $BC = 80$ km. Cùng lúc, một du thuyền xuất phát từ B đến C và một ca-nô xuất phát từ C đến A , cả hai đều di chuyển với vận tốc 20 km/h. Sau 1 giờ, du thuyền mắc cạn và phát tín hiệu cấp cứu. Ca-nô lập tức đổi hướng, tăng vận tốc lên gấp đôi và lao đến du thuyền. Từ đảo A , một chiếc xuồng cứu hộ cũng xuất phát đến du thuyền với vận tốc 40 km/h. Chứng minh rằng xuồng cứu hộ và ca-nô sẽ đến chỗ du thuyền cùng một lúc.
8. Dọc theo một con đường ở xứ sở Thần Tiên có mọc 12 bụi hồng, trên mỗi bụi có 6 chiếc gai. Khách qua đường phải ngắt 1, 2 hoặc 3 chiếc gai từ mỗi bụi, nhưng không ai được ngắt số lượng gai bằng nhau ở hai bụi kề nhau, nếu không lính canh sẽ bắt giữ người vi phạm. Alice, sau đó là Thọ Mũ Đen và cuối cùng là Bồi Cơ lần lượt đi dọc con đường và ngắt hết toàn bộ số gai trên các bụi hồng. Thọ Mũ Đen ngắt được ít hơn 19 chiếc gai. Chứng minh rằng một trong hai người còn lại ngắt được không dưới 30 chiếc gai.
9. Giá trị của một viên hồng ngọc tính theo rúp bằng bình phương khối lượng của nó tính theo gam nhân với 80; còn giá trị của một viên thạch anh tím tính theo rúp bằng 5 lần khối lượng của nó tính theo gam. Hai anh em được thừa kế một số viên đá quý có tổng giá trị 5000000 rúp. Để chia đều, họ chia đôi mỗi viên đá và mỗi người lấy một nửa của từng viên. Kết quả là mỗi người nhận được số đá trị giá 2000000 rúp. Hỏi ban đầu số hồng ngọc trong khối thừa kế trị giá bao nhiêu?
10. Xem bài 4.
11. Trong một đề thi olympic có 8 bài toán, mỗi bài được đánh giá tối đa 7 điểm. Kết quả chấm thi cho thấy mọi thí sinh đều đạt số điểm khác nhau. Ban tổ chức đã âm thầm sửa các điểm 0 thành 5, 1 thành 6, 2 thành 7. Kết quả của sự gian lận này là thứ tự xếp hạng của các thí sinh bị đảo ngược hoàn toàn. Hỏi số lượng thí sinh lớn nhất có thể là bao nhiêu? Hãy đưa ra một ví dụ và chứng minh rằng không thể có nhiều thí sinh hơn.
12. Cho tam giác ABC có điểm M là trung điểm cạnh AC . Lấy điểm K trên cạnh AB sao cho $\widehat{AMK} = \widehat{BMC}$. Chứng minh rằng chu vi tứ giác $KMCB$ nhỏ hơn chu vi tam giác AMB .
13. Hai số tự nhiên hơn kém nhau 24. Biết rằng tích của chúng lớn hơn 1 đơn vị so với một số mà dạng biểu diễn thập phân của nó chỉ gồm toàn chữ số 1. Hãy tìm hai số đó.
14. Tam thức bậc hai $x^2 + px + q$ có hai nghiệm nguyên phân biệt khác không là s và t . Biết rằng $s + p$ chia hết cho $q + 2t$. Hỏi số s có thể nhận những giá trị nào? (Đưa ra tất cả các đáp án và chứng minh rằng không còn đáp án nào khác.)

15. Người ta đem chia 200 hình chữ nhật bằng gỗ dán kích thước 5×6 dọc theo các đường lưới thành nhiều mảnh nhỏ, và từ tất cả các mảnh này, họ ghép thành một số hình vuông 2×2 và một số hình dạng \square . Hỏi số mảnh ít nhất có thể cắt ra là bao nhiêu để làm được việc này, nếu các mảnh được phép quay và lật mặt?
16. Trên các cạnh AB và CD của tứ giác lồi $ABCD$, lần lượt lấy các điểm X và Z . Các đoạn thẳng CX và BZ cắt nhau tại điểm Y . Biết rằng ngũ giác $AXYZD$ nội tiếp và $AY = DY$. Chứng minh rằng $AD \parallel BC$.
17. Vào đầu ngày làm việc, một nhân viên văn phòng có 130 email chưa trả lời; trong ngày hôm đó tiếp tục có thêm email mới gửi đến. Mỗi khi bắt đầu trả lời một email tiếp theo, nhân viên này lấy lượng thời gian còn lại của ngày làm việc chia đều cho số email chưa trả lời (bao gồm cả email đang chuẩn bị xử lý), và tiến hành trả lời email đó đúng bằng thời gian vừa tính được. Tổng cộng trong ngày, người đó đã trả lời được 160 email. Chứng minh rằng tồn tại 6 email được nhận cùng một lượng thời gian trả lời bằng nhau.
- (Giả thiết rằng không có giờ nghỉ trưa và không có email mới đến đúng vào thời điểm bắt đầu trả lời một email.)
18. Trên màn hình của một chiếc máy tính cầm tay chỉ có một nút bấm đang hiển thị một số tự nhiên n . Mỗi lần bấm nút, máy tính thay số n bằng số

$$\left[(2 + 2\sqrt{2})n + \frac{1}{2} \right].$$

Sasha bấm nút nhiều lần, các số lần lượt xuất hiện trên màn hình. Chứng minh rằng mỗi số tiếp theo trên màn hình lúc nào cũng bằng 4 lần tổng của hai số liền trước nó.

19. Xem bài 14.
20. Liệu đồ thị của các hàm số

$$y = ax - b, y = ax - c, y = bx - a, y = bx - c, y = cx - a, y = cx - b$$

có thể chứa các cạnh và đường chéo của một tứ giác nào đó hay không?

21. Người ta đem chia 100 hình chữ nhật bằng gỗ dán kích thước 6×7 dọc theo các đường lưới thành nhiều mảnh, và từ tất cả các mảnh này, họ ghép thành một số hình dạng \square và một số hình dạng \square . Hỏi số mảnh ít nhất có thể cắt ra là bao nhiêu để làm được việc này, nếu các mảnh được phép quay và lật mặt (một hình có thể được ghép từ số lượng mảnh tùy ý, kể cả 1 mảnh)?
22. Các đường thẳng chứa cạnh AB và AD của tứ giác $ABCD$ là các đường phân giác ngoài của tam giác BCD . Biết $\widehat{C} = 47^\circ$. Từ điểm A kẻ tiếp tuyến AK đến đường tròn nội tiếp tam giác BCD . Tìm số đo \widehat{BKD} .
23. Dãy số tự nhiên (a_n) được xác định bởi số hạng đầu $a_1 > 1000$ và quy tắc:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{nếu } a_n \text{ chẵn,} \\ 3a_n - 1, & \text{nếu } a_n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong dãy này sẽ xuất hiện một số chia hết cho 4.

24. Có thể điền các số từ 1 đến 55 vào bảng 5×11 sao cho trong mọi hình vuông con 2×2 , tổng bốn số luôn là số lẻ hay không?
25. Xem bài 17.
26. Có tồn tại các số tự nhiên x, y, z sao cho x và z có đúng 1400 ước chung, y và z có đúng 1000 ước chung, còn x, y, z có đúng 300 ước chung hay không?
27. Đồ thị của đa thức bậc ba $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt một đường thẳng song song với đường thẳng $y = -x$ thành hai đoạn thẳng có độ dài bằng $\sqrt{2}$, đồng thời cắt một đường thẳng song song với trục hoành thành hai đoạn thẳng, trong đó một đoạn có độ dài bằng 1. Hỏi độ dài đoạn thẳng còn lại có thể bằng bao nhiêu?
28. Diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ bằng S . Biết $AB = 1, BC = 7, CD = 8, DA = 4$. Chứng minh rằng $S > AC \cdot BD$.

§5. LỜI GIẢI BÀI TOÁN

1. **Đáp án:** chữ số tận cùng trong tích của Seryozha là 4.

Ta nhận thấy mọi chữ số tận cùng thu được đều là số chẵn. Hơn nữa, trong 6 số liên tiếp chắc chắn có một số chia hết cho 5. Nếu số đó không nằm ở hai đầu, thì tích của Seryozha và tích của một trong hai bạn nữ đều tận cùng bằng 0, mâu thuẫn với giả thiết đề bài.

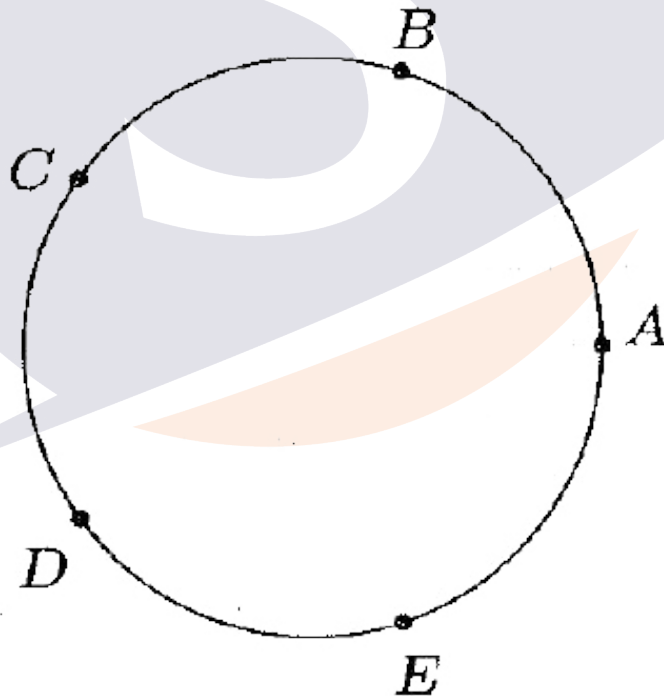
Nếu số chia hết cho 5 nằm ở một đầu (chẳng hạn đầu bên trái), thì số ở đầu còn lại cũng chia hết cho 5. Khi đó tích của cả hai bạn nữ đều tận cùng bằng 0, còn các số mà Seryozha nhân có chữ số tận cùng thuộc tập $\{1, 2, 3, 4\}$ hoặc $\{6, 7, 8, 9\}$. Trong cả hai trường hợp, tích của Seryozha đều tận cùng bằng 4.

Nhận xét. Cũng có thể tính trực tiếp: chữ số tận cùng của tích chỉ phụ thuộc vào chữ số tận cùng của các thừa số, ta xét 10 khả năng cho chữ số tận cùng của số đầu tiên (từ 0 đến 9).

2. **Đáp án:** 5 giờ.

Gọi năm ngôi làng là A, B, C, D, E . Theo đề bài, từ làng A đến các làng khác theo các tuyến đường $A-B$, $A-B-C$, $A-E$, $A-E-D$ đều có thể đi bằng xe buýt hoặc xe đạp đúng theo các mốc thời gian đã cho.

Giả sử tuyến $A-B-C$ đi bằng xe đạp mất 4 giờ. Khi đó các chặng $A-B$ và $B-C$ là các chặng xe buýt 2 giờ.



Suy ra đi xe buýt từ A đến B rồi từ B đến C cũng mất tổng cộng 4 giờ, bằng đúng thời gian đi xe đạp trên cùng tuyến $A-B-C$. Điều này vô lý vì xe buýt chạy nhanh hơn xe đạp.

Vậy giả thiết trên sai, và $A-B-C$ phải là tuyến đi bằng xe buýt mất 2 giờ. Lập luận tương tự cho thấy các tuyến $C-D-E$, $E-A-B$, $B-C-D$, $D-E-A$ cũng đều là các tuyến đi

xe buýt mất 2 giờ. Đi hết cả 5 tuyến này tức là đi trọn vành đai 2 vòng mất 10 giờ, suy ra đi 1 vòng mất 5 giờ.

3. Một cấu hình thỏa mãn điều kiện là ví dụ sau:

K	K	K	K	C	C			
				K	K	K	K	K
C	C	C	C	C				
C	C	C	C					

(Quy ước: K - Xanh lá, C - Vàng, khoảng trắng - Trắng)

Nếu bấm chọn theo các hàng trước, ta thu được hai hàng màu vàng, một hàng màu trắng, một hàng màu xanh lá; sau đó bấm chọn theo các cột thì toàn bộ bảng chuyển thành màu vàng.

Nếu bấm chọn theo các cột trước, ta thu được 5 cột màu xanh lá và 4 cột màu trắng; sau đó bấm chọn theo các hàng thì toàn bộ bảng chuyển thành màu xanh lá.

4. **Cách 1 (Nguyên lý Dirichlet).**

Tổng dân số là 125. Mỗi tên phải được dùng cho ít nhất 3 người, nên tổng số tên phân biệt nhỏ hơn 42. Do đó, trong tòa nhà đông dân nhất (45 người) chắc chắn có hai người trùng tên (theo nguyên lý chuồng thỏ).

Cách 2 (Nguyên lý cực hạn).

Xét tòa nhà đông nhất có 45 người. Giả sử tất cả những người trùng tên với các cư dân trong tòa nhà này đều sống ở các tòa nhà khác. Khi đó, 45 người trong tòa nhà này phải có 45 cái tên phân biệt, và mỗi người ở ngoài tòa nhà không thể đồng thời trùng tên với hai cư dân khác nhau trong tòa nhà 45 người này. Vì mỗi cư dân đều có ít nhất hai người trùng tên trong khu, nên số lượng "người trùng tên" cần thiết sống ngoài tòa nhà lớn nhất là ít nhất $45 \times 2 = 90$ người. Tuy nhiên, bốn tòa nhà còn lại chỉ có tổng cộng 80 người. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy trong tòa nhà 45 người phải có ít nhất hai người trùng tên.

5. **Đáp án:** 11 cột.

Cách 1 (Dựng trực tiếp). Hai hàng của hình vuông con 2×2 cho sẵn chỉ có thể được kéo dài duy nhất sang bên trái:

22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Khi đó ta thấy ngay hàng liền trước phải chứa các số từ 1 đến 11, do đó bảng có đúng 11 cột.

Cách 2 (Chặn hai đầu). Hàng đầu tiên tăng dần từ trái sang phải, do đó các số 12 và 13 không thể nằm ở hàng đầu; suy ra số lượng cột không vượt quá 11. Mặt khác, tập hợp các số từ 12 đến 33 gồm 22 số, buộc phải nằm trọn trong đúng hai hàng, nên số cột không thể nhỏ hơn 11. Vậy số cột chính xác bằng 11.

6. Viết 10 số theo cột dọc để thực hiện phép cộng. Ở cột hàng đơn vị, các chữ số $0, 1, \dots, 9$ xuất hiện đúng một lần, tổng là 45; do đó chữ số hàng đơn vị của tổng S là 5 và nhớ 4 sang hàng chục. Ở cột hàng chục tổng các chữ số cũng là 45, cộng thêm 4 nhớ sang thành 49, nên chữ số hàng chục của tổng là 9.

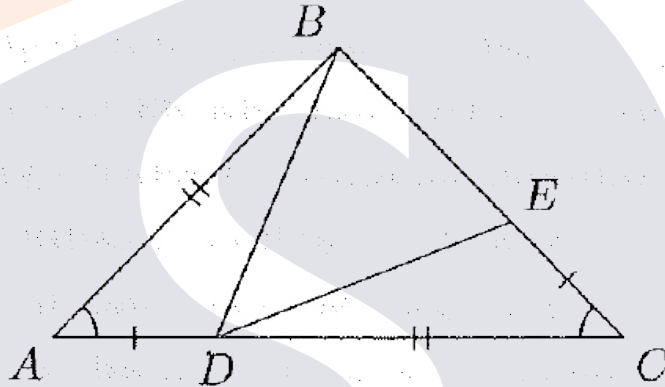
Vậy S tận cùng bằng 95. Suy ra S chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25, nên S không thể là số chính phương.

Hoặc có thể nhận xét rằng: số có tận cùng là 95 chia cho 4 dư 3, trong khi một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

7. Gọi D là vị trí tàu mắc cạn, E là vị trí của ca-nô tại thời điểm đó. Khi ấy:

$$AD = 20 \text{ km}, \quad CD = 50 \text{ km}, \quad CE = 20 \text{ km}.$$

Ngoài ra, do tam giác ABC cân nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$.



Suy ra hai tam giác BAD và DCE bằng nhau (theo trường hợp cạnh-góc-cạnh), dẫn tới $BD = DE$. Sau khi nhận được tín hiệu cấp cứu, ca-nô và xuồng cứu hộ di chuyển với cùng một vận tốc, vì vậy chúng sẽ đến vị trí D cùng một lúc.

8. Tổng số xu nhiều nhất có thể hái trên hai bụi cây kề nhau là $7 = 3 + 4$. Do có 10 bụi (tức là 5 cặp kề nhau), số xu lớn nhất có thể hái mà không bị lính canh bắt giữ là 35; điều này chỉ đạt được khi hái luân phiên 3 và 4 xu. Vì Alice hái được ít nhất 35 xu, nên trên thực tế Alice đã hái chính xác theo quy luật luân phiên đó.

Không mất tính tổng quát, giả sử ở bụi đầu tiên Alice hái 4 xu. Mỗi bụi ban đầu có 9 xu, nên phần dư lại cho hai người đi sau chỉ có thể tuân theo một trong hai cách phân chia: $9 = 2 + 3 + 4$ hoặc $9 = 3 + 3 + 3$. Tại bụi thứ nhất, do Alice đã ngắt 4 xu, hai người còn lại bắt buộc phải lấy 2 và 3 xu, tức là thuộc cách phân chia thứ nhất. Điều kiện này kéo theo ở bụi thứ hai cũng phải áp dụng cách phân chia thứ nhất; quá trình lặp luận tương tự chỉ ra rằng mọi bụi đều tuân theo cách phân chia thứ nhất.

Giả sử Buratino lấy 2 xu ở bụi đầu, còn Basilio lấy 3 xu. Khi đó ở bụi thứ hai Buratino buộc phải lấy 4 xu (để tránh lấy trùng số lượng ở hai bụi liền kề), Basilio lấy 2 xu. Quy luật này lặp lại: ở các bụi vị trí lẻ Buratino lấy 2 xu, Basilio lấy 3 xu; ở các bụi vị trí chẵn Buratino lấy 4 xu, Basilio lấy 2 xu. Tổng kết lại, Basilio lấy được tổng cộng $5 \times 3 + 5 \times 2 = 25$ xu, con số này nhỏ hơn 26.

9. **Đáp án:** 2000000 rúp.

Khi cắt đôi khối pha lê núi, mỗi nửa có giá trị bằng đúng một nửa khối ban đầu, do đó tổng giá trị hai nửa không bị suy giảm. Tuy nhiên, với kim cương, khi cắt đôi, mỗi nửa có khối lượng giảm đi một nửa, mà giá trị lại tỉ lệ thuận với bình phương khối lượng, nên giá trị của mỗi nửa lúc này chỉ còn bằng $1/4$ giá trị ban đầu. Suy ra tổng giá trị của hai nửa kim cương chỉ bằng $1/2$ giá trị viên kim cương nguyên bản. Nói cách khác, việc cắt đôi làm bốc hơi đúng một nửa giá trị của kim cương.

Theo giả thiết, sau khi chia đều, tổng giá trị mà hai anh em sở hữu là $2 \times 1000000 = 2000000$ rúp, trong khi tổng tài sản ban đầu trị giá 3000000 rúp, tức là đã hao hụt 1000000 rúp. Khoản hao hụt này tương đương với một nửa tổng giá trị của lượng kim cương ban đầu. Vậy số kim cương ban đầu trị giá 2000000 rúp.

11. **Đáp án:** 8 thí sinh.

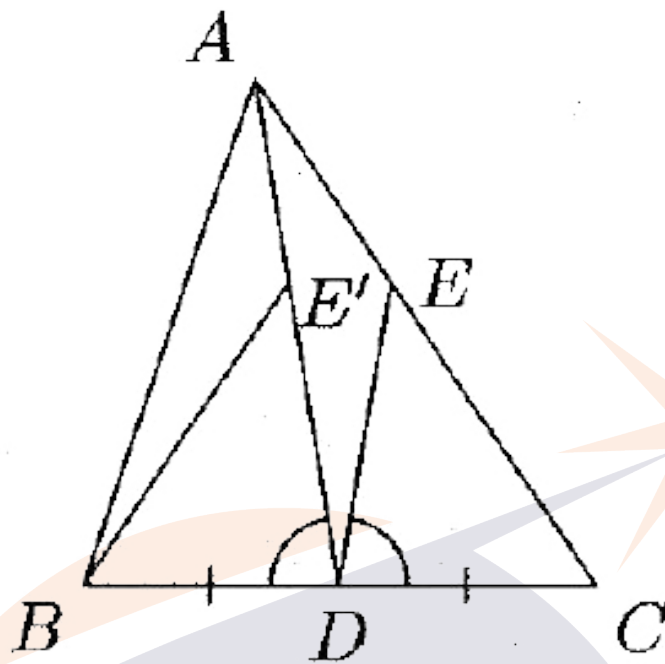
Chặn trên. Điểm của một thí sinh được cộng thêm $6k$, trong đó k là số lượng bài toán được chấm 0, 1 hoặc 2 điểm. Hiển nhiên $0 \leq k \leq 7$. Nếu hai thí sinh có cùng giá trị k , mức điểm tăng lên của họ là như nhau, dẫn đến thứ tự xếp hạng giữa hai người không thay đổi; tuy nhiên đề bài yêu cầu thứ tự xếp hạng bị đảo ngược hoàn toàn, do đó các giá trị k của mọi thí sinh phải đôi một phân biệt. Vì k chỉ có 8 khả năng (từ 0 đến 7), số lượng thí sinh tối đa không thể vượt quá 8 người.

Cấu hình thỏa mãn. Bảng điểm dưới đây là một ví dụ đạt được giới hạn 8 thí sinh:

3	3	3	3	3	3	3
0	3	3	3	3	3	3
0	0	3	3	3	3	3
0	0	0	3	3	3	3
0	0	0	0	3	3	3
0	0	0	0	0	3	3
0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0

12. **Cách 1.** Lấy điểm E' trên đoạn thẳng AD sao cho $DE' = DE$. Khi đó, hai tam giác BDE' và CDE bằng nhau (cạnh-góc-cạnh), suy ra $BE' = CE$.

Ta cần chứng minh chu vi tam giác ADC lớn hơn chu vi tứ giác $ABDE$, tức là chứng minh:



$$AE' + E'D + DC + AE + EC > BD + AB + AE + ED.$$

Giảm ước đoạn thẳng chung AE , các đoạn bằng nhau $DC = BD$, $E'D = ED$, rồi thay EC bằng $E'B$, ta thu được bất đẳng thức:

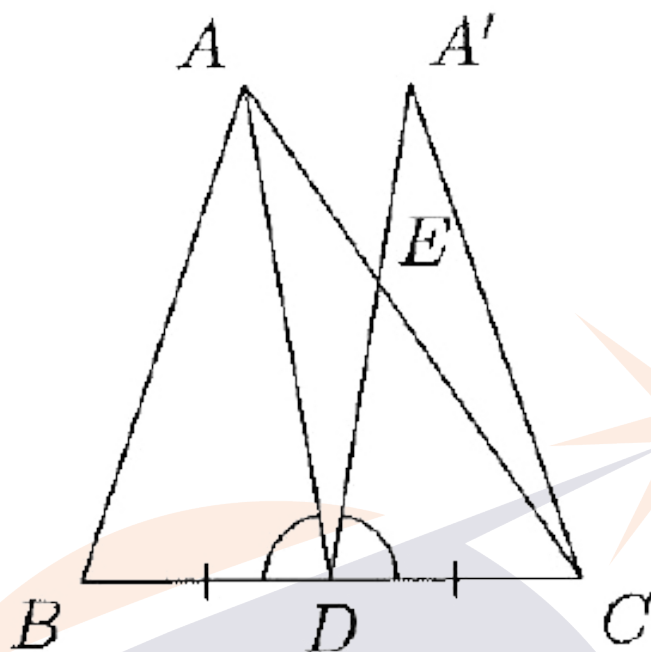
$$AE' + E'B > AB,$$

điều này luôn đúng theo bất đẳng thức tam giác trong tam giác $AE'B$.

Cách 2. Dựng tam giác $DA'C$ đối xứng với tam giác DAB qua đường trung trực của đoạn BC . Khi đó ta có:

$$AD = A'D = A'E + ED, \quad AB = A'C.$$

Giảm ước các đoạn bằng nhau $BD = DC$ trong biểu thức hai chu vi cần so sánh, bài toán quy về việc chứng minh:



$$AB + AE + ED < AD + AE + EC.$$

Bỏ đoạn chung AE và thay thế bằng các đẳng thức ở trên:

$$A'C + ED < A'E + ED + EC.$$

Tiếp tục bỏ đoạn ED , ta thu được hệ thức của bất đẳng thức tam giác trong tam giác $A'EC$.

13. **Đáp án:** 27 và 37.

Gọi x là số tự nhiên nhỏ hơn. Ta có phương trình:

$$x(x + 10) = 99 \dots 9.$$

Cộng thêm 25 vào cả hai vế:

$$(x + 5)^2 = 10 \dots 024.$$

Nếu vế phải có từ hai chữ số 0 trở lên thì nó chia hết cho 8 nhưng lại không chia hết cho 16, do đó không thể là một số chính phương. Ở trường hợp biểu diễn của vế phải ban đầu chỉ có 1, 2 hoặc 3 chữ số 9, ta lần lượt thu được:

$$(x + 5)^2 = 34, \quad (x + 5)^2 = 124, \quad (x + 5)^2 = 1024.$$

Trong ba phương trình trên, chỉ phương trình cuối cùng có nghiệm nguyên dương là $x = 27$, từ đó suy ra số còn lại là 37.

14. **Đáp án:** $a = 3$ hoặc $a = 1$.

Theo định lý Viète ta có: $p = -a - b$ và $q = ab$. Từ điều kiện của bài toán suy ra:

$$a + p = a + (-a - b) = -b$$

phải chia hết cho

$$q - 2b = ab - 2b = (a - 2)b.$$

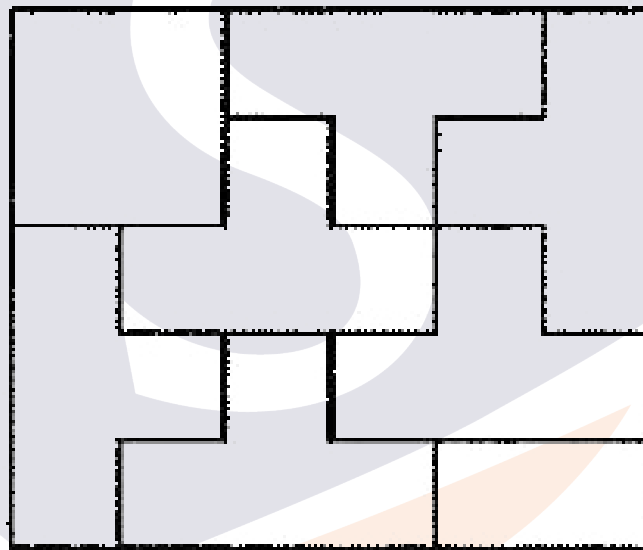
Nếu $a = 2$ thì số chia bằng 0, phép chia không xác định. Nếu $a = 1$ hoặc $a = 3$ thì điều kiện chia hết được thỏa mãn. Với các giá trị nguyên khác của a , trị tuyệt đối của số chia luôn lớn hơn trị tuyệt đối của số bị chia, nên phép chia hết không thể xảy ra.

Cả hai giá trị này đều hợp lệ, ví dụ đạt được đối với tam thức $x^2 - 4x + 3$.

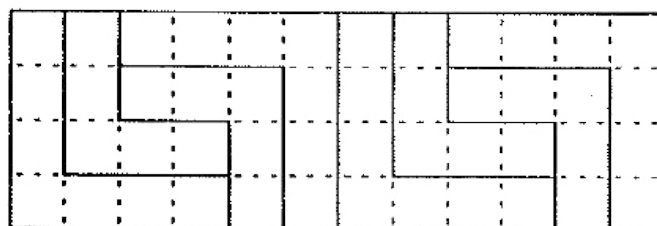
15. **Đáp án:** số mảnh ghép nhỏ nhất cần cắt là 800.

Chặn dưới. Mỗi mảnh ghép ở dạng hoàn thiện không thể có diện tích lớn hơn 4 ô vuông. Bản thân mỗi hình chữ nhật 5×6 có diện tích 30 ô vuông, do đó phải được cắt thành ít nhất 8 mảnh. Áp dụng cho 100 hình chữ nhật, tổng số mảnh ghép thu được ít nhất phải là 800.

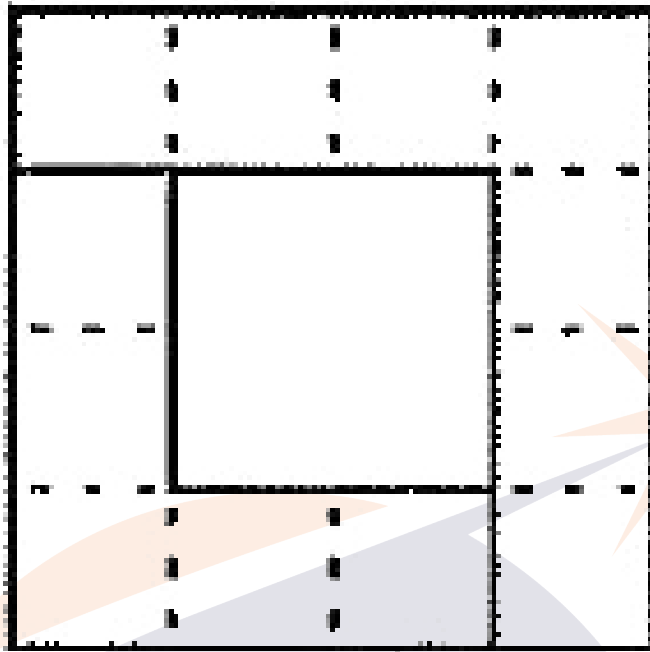
Cấu hình thỏa mãn. Cắt mỗi hình chữ nhật ban đầu thành 8 mảnh theo sơ đồ minh họa. Với phương án này, ta nhận được các mảnh 4 ô đúng theo hình dạng cần thiết, đồng thời dư ra 100 mảnh domino 1×2 ; các mảnh domino này có thể dễ dàng ghép tiếp thành 50 hình vuông 2×2 .



Một sai lầm phổ biến là cho rằng để tối thiểu hóa số mảnh ghép, cần ưu tiên "cắt ra được càng nhiều hình nguyên vẹn càng tốt" ngay từ những nhát cắt đầu tiên. Nhận định này nói chung không chính xác. Chẳng hạn, nếu cắt hình chữ nhật 4×12 để thu lấy các "khung" 12 ô vuông, ta chỉ cần chia làm 8 mảnh là đủ để ghép được 4 khung.

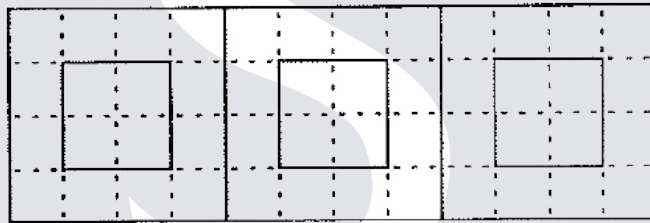


8 mảnh ghép được 4 khung



8 mảnh ghép được 4 khung

Trái lại, nếu cố ép cắt "khung nguyên vẹn" ngay lập tức thì ta chỉ thu được tối đa 3 khung:



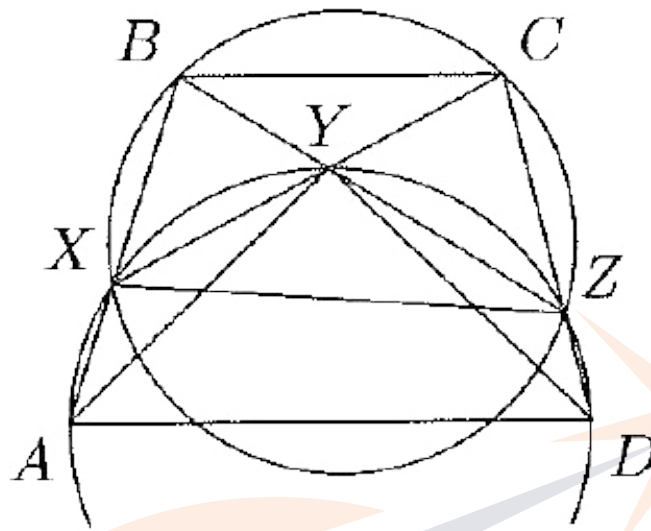
và lúc này khu vực ô vuông trung tâm 2×2 lại phải bị cắt vụn thêm ít nhất thành 2 mảnh, đẩy tổng số mảnh ghép ít nhất lên con số 9.

16. Do ngũ giác $AXYZD$ nội tiếp, ta có:

$$\widehat{AXZ} + \widehat{ADZ} = 180^\circ.$$

Sử dụng các góc bù tương ứng của tứ giác nội tiếp, ta cũng có:

$$\widehat{BXZ} + \widehat{BCZ} = 180^\circ.$$



Suy ra tứ giác $XBCZ$ nội tiếp đường tròn. Vì vậy:

$$\widehat{BXC} = \widehat{BZC}.$$

Hai góc này lại cùng bù với các góc nội tiếp chắn hai dây cung AY và DY của ngũ giác nội tiếp, do đó hai dây cung này bằng nhau.

17. Phân tích tình huống: giả sử nhân viên văn phòng vừa phục vụ xong một khách, ngay lập tức bắt đầu tiếp khách kế tiếp, và trong chính thời điểm chuyển giao đó không có khách nào mới bước vào xếp hàng. Khi đó, thời gian phục vụ dành cho hai vị khách này sẽ bằng nhau. Thật vậy, nếu thời gian còn lại của ngày làm việc là T (đơn vị: micro giây) và đang có n người xếp hàng chờ, thì người thứ nhất được phục vụ trong T/n micro giây. Ngay sau đó, thời gian còn lại dành cho người thứ hai sẽ là

$$\frac{T - T/n}{n - 1} = \frac{T}{n}$$

micro giây.

Theo giả thiết của bài toán, nhân viên này rất cuộc sẽ xử lý xong tất cả số khách đến xếp hàng (việc có người mới nhập hàng chỉ làm giảm đi quỹ thời gian phục vụ trung bình của những người chưa đến lượt). Nghĩa là trong ngày làm việc, tổng số người đã được phục vụ là 130 người. Trên trục thời gian của ngày làm việc, ta đánh dấu 130 điểm màu đỏ đại diện cho các thời điểm bắt đầu phục vụ, và 30 điểm màu xanh đại diện cho thời điểm có khách hàng mới bước vào quầy. 30 điểm xanh này sẽ chia 130 điểm đỏ thành 31 nhóm riêng biệt; theo nguyên lý chuồng thỏ, vì $4 \times 31 = 124 < 130$, chắc chắn phải có một nhóm chứa ít nhất 5 điểm đỏ liên tiếp.

Điều này chứng tỏ tồn tại một chuỗi 5 người được phục vụ liên tiếp mà trong khoảng thời gian từ lúc khách thứ nhất bắt đầu cho đến khi khách thứ năm bước lên quầy, hoàn toàn không có thêm vị khách mới nào xếp hàng. Kết hợp với nhận xét đã chứng minh ở trên, chuỗi 5 người này nhận được lượng thời gian phục vụ bằng nhau.

18. Đặt $a_n = m$. Ta có công thức:

$$a_{n+1} = (1 + \sqrt{3})m + \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

trong đó ε là phần thập phân của $(1 + \sqrt{3})m + \frac{1}{2}$. Tiếp theo, giá trị a_{n+2} được tính bằng phần nguyên của biểu thức:

$$(1 + \sqrt{3})a_{n+1} + \frac{1}{2} = (4 + 2\sqrt{3})m + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon(1 + \sqrt{3}). \quad (*)$$

Mặt khác, xét biểu thức:

$$2a_n + 2a_{n+1} = (4 + 2\sqrt{3})m + 1 - 2\varepsilon. \quad (**)$$

Vì ta đã biết biểu thức (**) mang giá trị nguyên, nên để chứng minh yêu cầu bài toán, ta chỉ cần kiểm tra xem giá trị tại công thức (*) có lớn hơn số tại công thức (**) và nhỏ hơn nó 1 đơn vị hay không, tức là kiểm tra bất đẳng thức kép:

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} + (1 - \sqrt{3})\varepsilon < 1.$$

Điều này luôn đúng: vế phải hiển nhiên đúng vì số hạng thứ hai $(1 - \sqrt{3})\varepsilon$ mang dấu âm; vế trái của bất đẳng thức vẫn đúng ngay cả trong trường hợp cực đoan $\varepsilon = 1$, vì

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + (1 - \sqrt{3}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Ta có thể xét phiên bản tổng quát hóa: giả sử α, β là các nghiệm vô tỉ của tam thức bậc hai $t^2 - at - b$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$). Xét dãy số nguyên (x_n) được xây dựng theo hệ thức:

$$x_{n+1} = \left[\alpha x_n + \frac{1}{2} \right].$$

Khi đó dãy số này thỏa mãn hệ thức truy hồi tuyến tính

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$$

khi và chỉ khi $|\beta| < 1$.

Chứng minh mệnh đề tổng quát:

Chiều thuận: giả sử $|\beta| < 1$. Ta cần chứng minh $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ với mọi n . Bằng cách khai triển như trên:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \frac{1}{2} - \varepsilon_n,$$

với $0 \leq \varepsilon_n < 1$ là phần thập phân của $\alpha x_n + \frac{1}{2}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \alpha x_{n+1} + \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1} \\ &= \alpha \left(\alpha x_n + \frac{1}{2} - \varepsilon_n \right) + \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1} \\ &= \alpha^2 x_n + \frac{\alpha}{2} - \alpha \varepsilon_n + \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Viète: $a = \alpha + \beta$, $b = -\alpha\beta$. Đặt phần chênh lệch:

$$\begin{aligned}\Delta &= x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_n \\ &= x_{n+2} - (\alpha + \beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n \\ &= \left(\alpha^2 x_n + \frac{\alpha}{2} - \alpha\varepsilon_n + \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1}\right) - (\alpha + \beta) \left(\alpha x_n + \frac{1}{2} - \varepsilon_n\right) + \alpha\beta x_n \\ &= \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1} + \beta \left(\varepsilon_n - \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Biết trước rằng Δ phải là một số nguyên, ta sẽ chứng minh $|\Delta| < 1$ để ép $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned}|\Delta| &= \left| \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1} + \beta \left(\varepsilon_n - \frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1} \right| + \left| \beta \left(\varepsilon_n - \frac{1}{2}\right) \right| \\ &< \left| \frac{1}{2} - \varepsilon_{n+1} \right| + \left| \varepsilon_n - \frac{1}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Chiều đảo: xét trường hợp $|\beta| > 1$. Ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của một dãy số làm phản ví dụ sao cho $x_3 \neq ax_2 + bx_1$. Đặt:

$$\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2|\beta|} > 0.$$

Chọn số hạng khởi đầu $x_1 = k$, khi đó $x_2 = \alpha k + \frac{1}{2} - \varepsilon_1$. Áp dụng định lý Kronecker, phần thập phân của dãy $y_k = \alpha k$ trù mật trong khoảng $[0, 1)$, nên luôn tồn tại giá trị k sao cho

$$\{\alpha k\} \in \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}\right).$$

Kéo theo đó $\varepsilon_1 \in (1 - \delta, 1)$.

Định lý Kronecker: nếu θ là số vô tỉ thì dãy phần thập phân $\{n\theta\}$ trù mật trong khoảng $[0, 1]$.

Nếu $\beta > 1$ thì

$$x_3 - ax_2 - bx_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon_2 + \beta \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2} - \varepsilon_2 + \beta \left(\frac{1}{2} - \delta\right) = 1 - \varepsilon_2 > 0.$$

Nếu $\beta < -1$ thì

$$x_3 - ax_2 - bx_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon_2 + \beta \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} - \varepsilon_2 + \beta \left(\frac{1}{2} - \delta\right) = -\varepsilon_2 < 0.$$

Như vậy trong cả hai kịch bản đều thiết lập được dãy số phản ví dụ, bác bỏ khả năng hệ thức truy hồi luôn đúng.

19. Bài 19 trùng với bài 14, xem lời giải của bài 14.

⁰Tham khảo thêm: A. I. Khrabrov, *Định lý Dirichlet và các dãy phân bố đều*, trong tuyển tập Olympic Toán học sinh Saint Petersburg 2003–2005, NXB Nevsky Dialect, 2007, tr. 368–415.

20. **Đáp án:** không thể.

Cách 1. Các đồ thị trong đề bài đều là các đường thẳng, trong số đó có chứa ba cặp đường thẳng song song. Tuy nhiên, một đường thẳng song song với một đường chéo của tứ giác thì không thể đồng thời đóng vai trò là một cạnh hay chính đường chéo của tứ giác đó (điều này đúng với cả tứ giác lồi lẫn tứ giác không lồi).

Cách 2. Xét hệ các đường thẳng chứa các cạnh và đường chéo của một tứ giác bất kỳ, trên mặt phẳng buộc phải tồn tại 4 giao điểm mà tại mỗi giao điểm đó có đúng 3 đường thẳng đồng quy (chính là 4 đỉnh của tứ giác); ngoài ra, có nhiều nhất 3 giao điểm khác là giao của đúng 2 đường (gồm hai giao điểm của các cặp cạnh đối diện và một giao điểm của hai đường chéo).

Đối chiếu với hệ đường thẳng đã cho, ta có các giao điểm $(0, a)$, $(0, b)$, $(0, c)$ chỉ là giao của đúng 2 đường; ba điểm này phải phân biệt, nếu không hệ sẽ không đủ 6 đường phân biệt. Tương tự, ba giao điểm $(1, a + b)$, $(1, a + c)$, $(1, b + c)$ cũng mang tính chất là giao điểm của đúng 2 đường và cũng phải đôi một phân biệt. Như vậy, hệ đường thẳng này tạo ra tới 6 giao điểm kiểu "giao của đúng 2 đường", vượt quá con số tối đa 3 của cấu hình hình học của một tứ giác.

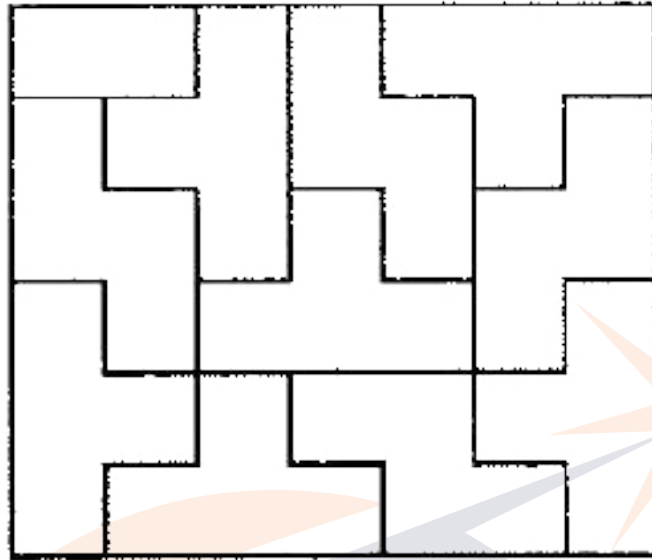
Cách 3 (Sử dụng đường thẳng đứng). Tập hợp giao điểm giữa các cạnh và đường chéo của tứ giác bao gồm: các đỉnh, giao điểm hai đường chéo, và giao điểm các cặp cạnh đối. Hãy gọi chung chúng là các "điểm nút". Trong hệ đường thẳng đã cho, các đường thẳng cắt nhau tại $(0, a)$, $(0, b)$, $(0, c)$, suy ra ba điểm này đều là điểm nút. Tuy nhiên, ba điểm này lại cùng nằm trên trục tung (đường thẳng đứng), trong khi trục tung không nằm trong số 6 đường thẳng của đề. Vậy đây là 3 điểm nút không nằm trên bất kỳ cạnh hay đường chéo nào, tức là chúng buộc phải rơi vào nhóm: một giao điểm đường chéo và hai giao điểm cạnh đối.

Thế nhưng ba điểm này không thể thẳng hàng. Đối với tứ giác lồi, đường thẳng nối hai giao điểm của các cạnh đối diện luôn nằm ngoài tứ giác, do đó không thể đi qua giao điểm của hai đường chéo (vốn nằm bên trong). Đối với tứ giác không lồi, ba điểm tương ứng đó nằm trên ba cạnh của tam giác giới hạn bên ngoài, hiển nhiên không thể thẳng hàng.

21. **Đáp án:** số mảnh ghép nhỏ nhất cần thiết là 1100.

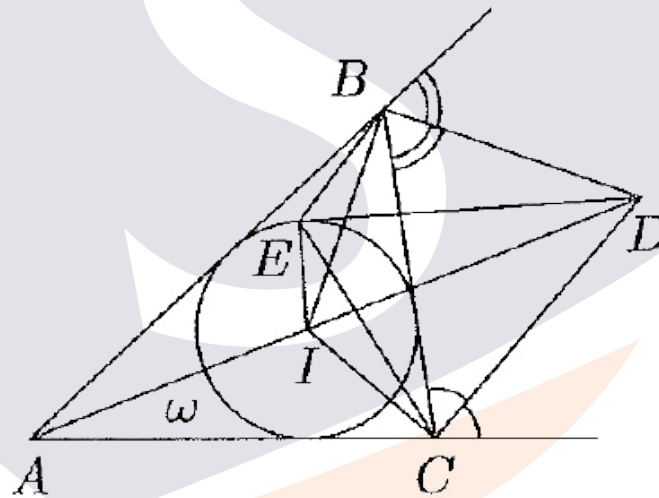
Chặn dưới. Kích thước tối đa của mỗi mảnh ghép ở dạng hoàn thiện là 4 ô. Diện tích mỗi hình chữ nhật 6×7 bằng 42, như vậy bắt buộc phải cắt ra ít nhất 11 mảnh từ mỗi hình. Với tổng số 100 hình, tổng lượng mảnh ghép không thể thấp hơn con số 1100.

Cấu hình thỏa mãn. Cưa mỗi tấm hình chữ nhật thành 11 mảnh theo sơ đồ. Nhờ vậy, ta thu được các khối hình 4 ô đúng dạng cần thiết, đồng thời dư thêm 100 khối domino 1×2 ; từ số khối dư này có thể xếp thành 50 hình hoàn chỉnh tiếp theo.



22. **Đáp án:** $\widehat{BEC} = 111,5^\circ$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau tại tâm bàng tiếp D , nên D nằm trên đường phân giác AI .



Ta nhận thấy các góc chắn đoạn ID sau đây đều là góc vuông: \widehat{IED} (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và bán kính), \widehat{IBD} và \widehat{ICD} (góc tạo bởi hai phân giác của các cặp góc kề bù). Do đó 5 điểm I, E, B, D, C cùng nằm trên một đường tròn.

Từ tính chất của tứ giác nội tiếp, ta suy ra:

$$\widehat{BEC} = \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

23. **Cách 1 (Khảo sát trực tiếp).**

Nếu a_n lẻ thì quy tắc ở bước tiếp theo sẽ sinh ra số chẵn, tức là dãy luôn duy trì được sự xuất hiện của các số chẵn. Khi gặp số chẵn, ta liên tục thực hiện phép chia 2 cho đến khi dãy trở về số lẻ.

Giả sử xét một số lẻ a_n . Nếu $a_n \equiv 1 \pmod{4}$, tức là a_n có dạng $4k + 1$, thì:

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 = 12k + 4$$

số này hiển nhiên chia hết cho 4.

Nếu $a_n = 4k + 3$, ta mô phỏng quá trình tiếp theo:

$$a_{n+1} = 12k + 10,$$

$$a_{n+2} = 6k + 5,$$

$$a_{n+3} = 18k + 16,$$

$$a_{n+4} = 9k + 8.$$

Trường hợp k chẵn, thì a_{n+3} chia hết cho 4; vậy ta chỉ cần xét nhánh mà k là số lẻ.

Đặt tham số $m = 2$. Khởi đầu với $a_n = 4k + 3$, ta đã có:

$$a_{n+4} = 3^m k + (3^m - 1). \quad (*)$$

(với điều kiện k lẻ). Tiếp tục viết $k = 2k' + 1$ để xét nhánh lẻ, suy ra:

$$a_{n+4} = 3^m \cdot 2k' + (2 \cdot 3^m - 1),$$

$$a_{n+5} = 3^{m+1} \cdot 2k' + (2 \cdot 3^{m+1} - 2).$$

Nếu k' là số chẵn, giá trị thu được lập tức chia hết cho 4; như vậy chỉ xét nhánh mà k' lẻ. Dưới giả định này ta có:

$$a_{n+6} = 3^{m+1} k' + (3^{m+1} - 1).$$

Cấu trúc biểu thức này lặp lại chính xác dạng (*), đi kèm với việc k' vẫn duy trì tính lẻ, nhưng giá trị k' đã bị thu nhỏ ($k' < k/2$).

Bằng lập luận tương tự, nếu dãy số cứ chạy mãi mà không bao giờ xuất hiện bội số của 4 thì số tự nhiên k phải giảm không ngừng, đây là một điều vô lý.

Cách 2 (Theo số dư).

Giả sử phản chứng rằng không có bất kỳ số hạng nào chia hết cho 4. Khi đó, tính chẵn/lẻ của các số hạng trong dãy phải xen kẽ đều đặn, đồng nghĩa với việc hai quy tắc "chia 2" và "nhân 3 cộng 1" cũng được thực hiện luân phiên.

Giả sử a_{2n} chẵn, a_{2n+1} lẻ. Ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề: nếu trải qua $2n$ bước mà dãy vẫn chưa tạo được một bội số nào của 4, thì số hạng khởi đầu $a_1 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$.

Từ mệnh đề này suy ra $a_1 \geq 2^n - 1$, điều này không thể đúng với các giá trị n đủ lớn. Do đó, dãy bắt buộc phải chứa một bội số của 4.

Quy ước cách viết: "dư $2^n - 1$ " được viết ngắn gọn thành "dư -1 ", "dư $2^n - 2$ " viết thành "dư -2 ", v.v.

Bước cơ sở: a_1 là số lẻ.

Bước quy nạp: giả sử $a_3 \equiv -1 \pmod{2^{n-1}}$. Khi đó:

$$a_2 = 2a_3 \equiv -2 \pmod{2^n}$$

(giải thích: vì $a_3 = x \cdot 2^{n-1} - 1 \Rightarrow a_2 = x \cdot 2^n - 2$).

Mặt khác, $a_2 = 3a_1 - 1 \equiv -2 \pmod{2^n}$ dẫn đến $3a_1 \equiv -3 \pmod{2^n}$. Bằng tính chất cơ bản của đồng dư, ta suy ra $a_1 \equiv -1 \pmod{2^n}$.

Bổ đề. Nếu hai số N và k nguyên tố cùng nhau, thì từ hệ thức đồng dư:

$$ka \equiv kb \pmod{N}$$

ta có thể giản ước thành:

$$a \equiv b \pmod{N}.$$

Cách 3 (Xây dựng dãy phụ).

Tiếp tục giả sử phản chứng rằng dãy không chứa bội số của 4, dẫn tới tính chẵn/lẻ và hai quy tắc biến đổi xuất hiện luân phiên. Tập trung vào các số hạng chẵn a_n , ta thiết lập một dãy số phụ (b_n) gồm toàn số nguyên theo định nghĩa:

$$b_n = a_n + 2.$$

Lúc này ta có hệ thức:

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 2 = \frac{a_n}{2} + 2 = \frac{b_n - 2}{2} + 2 = \frac{b_n}{2} + 1,$$

và tiếp theo:

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+2} + 2 = (3a_{n+1} + 1) + 2 \\ &= 3(b_{n+1} - 2) + 3 = 3b_{n+1} - 3 = \frac{3}{2}b_n. \end{aligned}$$

Tóm lại $b_{n+2} = \frac{3}{2}b_n$. Nếu b_n phân tích chứa đúng m lần thừa số 2 (chia hết cho 2^m nhưng không chia hết cho 2^{m+1}), thì:

$$b_{n+2m+2} = \frac{3^{m+1}}{2^{m+1}}b_n$$

sẽ bị gãy thành một phân số (không còn là số nguyên), mâu thuẫn trực tiếp với tính nguyên của dãy phụ ban đầu.

24. **Đáp án:** hoàn toàn có thể.

(Người dùng có thể vẽ một bảng 5×11 làm ví dụ, đánh dấu "+" xen kẽ như bàn cờ)

Ví dụ, trong bảng ô vuông, ta có thể tự do điền các số chẵn vào các ô được đánh dấu "+", và lấp đầy các số lẻ vào các ô còn lại. Khi đó mọi hình vuông con 2×2 đều có chứa 3 ô lẻ và 1 ô chẵn (hoặc 1 ô lẻ và 3 ô chẵn), tổng luân phiên ra số lẻ.

25. Bài 25 trùng với bài 17, xem lời giải của bài 17.

26. **Đáp án:** không tồn tại bộ số nào như vậy.

Nhắc lại công thức tính số lượng ước số: nếu phân tích ra thừa số nguyên tố của n là

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k},$$

thì tổng số ước của n được tính bởi

$$(\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) \dots (\nu_k + 1).$$

Theo định nghĩa, số ước chung của hai số a, b chính là số lượng ước số của ước chung lớn nhất $\gcd(a, b)$; tính chất này tương tự đối với nhóm ba số.

Khởi tạo dạng phân tích:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}.$$

Khi đó ước chung lớn nhất biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) &= p_1^{\tau_1} p_2^{\tau_2} \dots p_k^{\tau_k}, \\ \gcd(a, c) &= p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_k^{\sigma_k}, \\ \gcd(a, b, c) &= p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \dots p_k^{\rho_k}, \end{aligned}$$

trong đó $\rho_i = \min\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$, $\tau_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, và $\sigma_i = \min\{\alpha_i, \gamma_i\}$. Rõ ràng đối với mỗi chỉ số i , ít nhất một trong hai giá trị τ_i, σ_i (thậm chí có khả năng cả hai) phải bằng đúng ρ_i .

Giả sử tồn tại các số thỏa mãn điều kiện đề bài. Vì số ước chung của nhóm ba số a, b, c là 350 (chia hết cho 7), dựa vào công thức tính số lượng ước số, chắc chắn phải tồn tại một chỉ số i sao cho $\rho_i + 1$ là một bội số của 7. Dựa trên nhận xét phía trên, một trong hai nhân tử $\tau_i + 1$ hoặc $\sigma_i + 1$ lúc này cũng phải chia hết cho 7. Do đó, lượng ước số của $\gcd(a, b)$ hoặc của $\gcd(a, c)$ bắt buộc phải chia hết cho 7. Thế nhưng cả hai con số 1000 và 720 đều không chia hết cho 7, mâu thuẫn hoàn toàn.

27. **Đáp án:** độ dài của đoạn thứ hai bằng:

$$\frac{\sqrt{21} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Theo giả thiết, hai đoạn thẳng dài 1 có chung một đầu mút, đặt tọa độ của giao điểm đó là (u, v) . Tịnh tiến đồ thị theo vectơ $\vec{v} = (-u, -v)$, tương đương với phép đổi biến $x \leftrightarrow (x - u)$ và $y(x) \leftrightarrow (y(x) - v)$. Sau phép tịnh tiến, hai đoạn đơn vị đó nằm hoàn toàn trên trục OX , và giao điểm chung trùng với gốc tọa độ. Vì phép tịnh tiến không làm thay đổi hệ số của bậc ba, đồ thị mới thu được có phương trình:

$$y = x(x - 1)(x + 1).$$

Đường thẳng song song với $y = x$ sau tịnh tiến sẽ mang dạng $y = x + s$. Đồ thị hàm số cắt đường thẳng này tại 3 điểm; một trong các đoạn thẳng giới hạn bởi giao điểm có độ dài $\sqrt{2}$,

điều này tương đương với việc khoảng cách giữa hai hoành độ của đầu mút bằng 1. Đặt hoành độ của chúng là p và $p + 1$, còn hoành độ của giao điểm thứ ba là q . Ba giá trị $p, p + 1, q$ chính là ba nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$$x(x - 1)(x + 1) = x + s.$$

Khai triển ra dạng $x^3 - 2x - s = 0$ và áp dụng định lý Viète:

$$p + (p + 1) + q = 0, \quad p(p + 1) + pq + (p + 1)q = -2.$$

Thế q từ phương trình bậc nhất vào phương trình thứ hai, ta được phương trình bậc hai theo p :

$$3p^2 + 3p - 1 = 0.$$

Từ đây giải ra được hai bộ nghiệm (sắp xếp tăng dần). Bộ nghiệm thứ nhất:

$$q_1 = -\frac{\sqrt{21}}{3}, \quad p_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}, \quad p_1 + 1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}.$$

Khi đó, độ dài hình chiếu của đoạn thẳng cần tìm là:

$$p_1 - q_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 1).$$

Bộ nghiệm thứ hai mang tính chất đối xứng với bộ thứ nhất qua trục tung:

$$p_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}, \quad p_2 + 1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{6}, \quad q_2 = -\frac{\sqrt{21}}{3},$$

do đó cung cấp cùng một đáp số.

Vì đường thẳng tạo với trục hoành một góc 45° , độ dài của đoạn thẳng cần tìm sẽ bằng độ dài hình chiếu của nó nhân với $\sqrt{2}$, tức là:

$$\frac{\sqrt{21} - 1}{\sqrt{2}}.$$

28. Từ bộ dữ kiện đề bài, ta dễ dàng thiết lập được một đẳng thức:

$$9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2.$$

Ta sẽ chứng minh rằng sự tồn tại của hệ thức này tương đương với đặc tính hình học hai cạnh AC và BD vuông góc với nhau.

Xét tam giác ABD , kẻ đường cao AH vuông góc với đáy BD . Do $AB = 6 > 2 = AD$, chân đường cao H sẽ nằm gần đỉnh D hơn đỉnh B . Theo định lý Pythagoras:

$$BH^2 - HD^2 = (BA^2 - AH^2) - (DA^2 - AH^2) = BA^2 - DA^2 = 32.$$

Thực hiện các thao tác tương tự với đường cao CH' của tam giác BCD , ta thu được:

$$BH'^2 - H'D^2 = 32.$$

Hàm số $BH^2 - HD^2$ biến thiên đơn điệu khi điểm H dịch chuyển trên đoạn BD , do đó từ hai đẳng thức trên suy ra điểm H và điểm H' phải trùng nhau. Hệ quả là $AC \perp BD$.

Bây giờ, ta đặt tứ diện định hướng sao cho mặt phẳng chứa AC và BD song song với mặt phẳng ngang, rồi chiếu theo phương thẳng đứng. Hình chiếu của tứ diện xuống mặt phẳng là một tứ giác lồi $ABCD$ với hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau. Diện tích của tứ giác hình chiếu bằng một nửa tích độ dài hai đường chéo, tức là $\frac{AC \cdot BD}{2}$. Diện tích toàn phần của tứ diện bao trùm toàn bộ hình chiếu này hai lần (một lần ở mặt trên và một lần ở mặt dưới), vì thế diện tích toàn phần của tứ diện phải lớn hơn diện tích của hai lần mặt chiếu.

Dưới góc nhìn đại số:

$$S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{AH \cdot BD}{2} + \frac{CH \cdot BD}{2} = \frac{BD(AH + CH)}{2} > \frac{BD \cdot AC}{2}.$$

Chứng minh tương tự đối với tổng diện tích hai mặt còn lại, ta cũng có kết quả chứng lớn hơn $\frac{AC \cdot BD}{2}$. Lấy tổng của cả 4 mặt suy ra điều phải chứng minh.

29. Theo luật bù trừ tính chia hết: nếu trên bảng có 4 số lẻ thì tích của nhóm 4 số đó cũng là số lẻ, nên không thể chia hết cho 30. Vậy bảng chỉ có thể chứa tối đa 3 số lẻ. Bảng lập luận y hệt, bảng chỉ chứa nhiều nhất 3 số không chia hết cho 3, và chứa nhiều nhất 3 số không chia hết cho 5.

Ba nhóm "số loại trừ" này chiếm tối đa 9 vị trí trên bảng. Mà bảng có tổng cộng 10 con số, do đó tồn tại ít nhất 1 con số không thuộc cả ba nhóm bị loại trên. Con số này hội tụ đủ ba điều kiện: là số chẵn, chia hết cho 3, và chia hết cho 5, tức là bản thân nó chia hết cho 30.

30. **Đáp án:** 1234567890123456789.

Giả sử trên con số đang xét tồn tại một cặp chữ số liền kề sao cho khi trao đổi vị trí của chúng thì giá trị của số đó không hề tăng lên. Tách con số đó tại vị trí cặp chữ số kề nhau đó, ta được hai phần rời rạc (phần phía sau có thể khởi đầu bằng chữ số 0). Cả hai phần này đều phải thừa hưởng đặc tính riêng biệt: khi đổi chỗ hai chữ số liền kề bất kỳ, giá trị của nó luôn tăng lên, nên các chữ số cấu tạo nên từng phần buộc phải được sắp xếp theo thứ tự tăng ngặt. Tập hợp chữ số có giới hạn, nên phần đầu dài tối đa 9 chữ số, phần sau dài tối đa 10 chữ số. Do đề bài quy định con số phải có chính xác 19 chữ số, nên phần đầu buộc phải là dải 123456789, và phần sau buộc phải là dải 0123456789.

Nếu như không tồn tại bất kỳ cặp chữ số liền kề nào làm giảm giá trị như giả định trên, thì toàn bộ 19 chữ số của số đó phải được sắp xếp tăng dần ngặt, điều này là vô lý vì giới hạn chỉ có 10 chữ số hệ thập phân.

31. **Đáp án:** $N = 4034$.

Nếu $N \leq 4033$, thì một khi đứng ở tầng 2017, ta không thể di chuyển đến bất kỳ tầng nào khác. Thật vậy, thao tác bấm từ tầng 2017 đến một tầng $b \neq 2017$ chỉ kích hoạt thang máy chạy nếu $2017 + b$ là bội của 2017 hoặc $2017 - b$ là bội của 2018. Rõ ràng với ngưỡng $N \leq 4033$, trong khoảng từ 1 đến N chỉ có duy nhất con số 2017 chia hết cho 2017, nên $2017 + b$ tuyệt đối không chia hết cho 2017 khi $b \neq 2017$. Còn với biểu thức $2017 - b$, giá trị của nó dao động

trong khoảng $[-2016, 2016]$, và trong dải này chỉ có duy nhất số 0 là bội của 2018, cũng không thỏa mãn.

Cần chứng minh rằng với ngưỡng $N = 4034$, từ mọi tầng đều có thể đi xuống được tầng 1 (và do tính đối xứng, từ tầng 1 cũng có thể đi đến mọi tầng). Giả sử người đi đang ở tầng a .

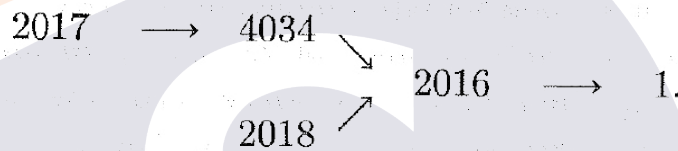
Nếu $a < 2016$, áp dụng liên hoàn các bước thao tác sau:

$$a \rightarrow a + 2018 \rightarrow 4034 - (a + 2018) = 2016 - a \rightarrow 2017 - (2016 - a) = a + 1.$$

Lặp đi lặp lại quy trình nhảy tầng trên để tiến dần lên tầng 2016, rồi từ đó bấm một mạch về tầng 1.

Nếu $a > 2018$, ta sử dụng quyền di chuyển giảm xuống 2018 tầng (nếu chênh lệch lớn thì lặp lại nhiều lần bước này), rồi quay trở lại sử dụng quy trình nhảy tầng như trên.

Nếu không may bị kẹt ở mức $a = 2017$ hoặc $a = 2018$, sử dụng chuỗi nút bấm sau đây:



Từ các bước trên suy ra từ bất kỳ tầng nào đều có con đường quay về đích tầng 1.

32. **Đáp án:** Petya là người giành chiến thắng.

Tổng quát hóa trò chơi: gọi số lượng ghi trên bảng ban đầu là N . Ta chứng minh quy luật: nếu N là một lũy thừa của 2 thì người đi sau có chiến lược thắng; ngược lại, người đi trước sẽ là người chiến thắng. Chỉ cần chứng minh hai mệnh đề độc lập:

- Nếu số trên bảng hiện tại là số k không phải là lũy thừa của 2, thì người chơi ở lượt đó luôn có cách đi một bước hợp lệ để biến nó thành một lũy thừa của 2.
- Nếu số trên bảng hiện tại đã là một lũy thừa của 2, thì người chơi ở lượt đó tuyệt đối không thể đi một bước hợp lệ nào để chuyển thành một lũy thừa của 2 khác.

Chứng minh ý (1): xác định lũy thừa của 2 lớn nhất nhỏ hơn k , gọi là 2^n . Khi đó:

$$2^n < k < 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n,$$

nghĩa là số k không thể chia hết cho 2^n . Theo luật của trò chơi, người đó được quyền thay số k trên bảng bằng con số 2^n .

Chứng minh ý (2): nếu số k đang đứng trên bảng là một lũy thừa của 2 thì k hiển nhiên chia hết cho mọi lũy thừa nhỏ hơn của chính 2, nên theo quy định, không thể thay bằng một lũy thừa của 2 nào khác trong vòng một bước duy nhất.

Từ đó thiết lập nên chiến lược bất bại: nếu N không phải là lũy thừa của 2 thì người đi đầu tiên lập tức biến đổi nó về một lũy thừa của 2 ngay trong nước đi đầu; sau đó, mỗi khi đối phương cựa quậy đưa nó thành một số không phải lũy thừa của 2, người đầu tiên lại gạt ngược

nó về trạng thái lũy thừa của 2. Ván cờ tàn cục khi người thứ nhất viết ra số 2 (số 1 bị cấm trong trò chơi này).

Trong trường hợp N khởi đầu là lũy thừa của 2 thì chiến lược trên rơi vào tay người chơi thứ hai.

Cuối cùng, xét trường hợp bài toán 10^{2017} , đây không phải là lũy thừa của 2 (vì có chứa nhân tử 5), vì vậy người đi trước là Petya sẽ giành phần thắng.

33. Hai thợ sơn thực hiện thao tác đổi màu theo hai chu trình ngược nhau. Cụ thể, nếu thợ thứ hai đi vào một ô ngay sau thợ thứ nhất, thì sau khi sơn, ô đó sẽ trở lại màu ban đầu. Tổng quát hơn, nếu thợ thứ hai lặp lại đúng hành trình của thợ thứ nhất, mọi tác động đổi màu của thợ thứ nhất sẽ bị triệt tiêu hoàn toàn.

Dựa vào tính chất này, thợ thứ hai có thể áp dụng chiến lược sau: trước tiên, di chuyển theo đường ngắn nhất (ví dụ đi men theo biên) để tiến đến ô xuất phát của thợ thứ nhất. Giai đoạn này mất tối đa 15 bước. Trong 15 bước đó, thợ thứ nhất cũng đi được 15 bước, do đó tổng số ô bị đổi màu xám trên bảng không vượt quá 30 ô. Sau đó, thợ thứ hai chỉ việc lặp lại chính xác chuỗi nước đi mà thợ thứ nhất đã thực hiện trước đó 15 bước.

Xét tính trạng tại một thời điểm: ở bước thứ 16, thợ thứ nhất có thể làm xuất hiện ô thứ 31 không có màu xám. Tuy nhiên, ở bước thứ 16 của mình, thợ thứ hai lại đi tới đúng ô mà thợ thứ nhất đã tới ở bước thứ 1. Do chu trình đổi màu ngược nhau, tác động của thợ thứ nhất ở bước 1 và thợ thứ hai ở bước 16 sẽ triệt tiêu. Vì vậy, các ô không mang màu xám tại bất kỳ thời điểm nào chỉ bao gồm các ô do thợ thứ nhất tô ở các bước từ 2 đến 16, cùng với các ô do thợ thứ hai tô trong 15 bước đầu, tổng cộng không vượt quá 30 ô.

Lập luận tương tự cho các bước tiếp theo, số lượng ô không có màu xám luôn bị chặn trên bởi 31. Do đó, số ô màu xám trên bảng luôn không nhỏ hơn:

$$8 \cdot 9 - 31 = 41 \text{ (ô)}.$$

Cuối cùng, ta cần kiểm tra xem thợ thứ nhất có thể cản trở thợ thứ hai hay không. Tô màu bảng ô vuông theo kiểu bàn cờ. Ban đầu, hai thợ sơn đứng ở hai ô khác màu. Sau mỗi nước đi của thợ thứ nhất, hai người ở trên các ô cùng màu, nên khi thợ thứ hai chuẩn bị đi, thợ thứ nhất không thể đứng ở ô kề cạnh với thợ thứ hai. Sau khi thợ thứ hai đi xong, hai người lại ở hai ô khác màu, và tình huống lặp lại. Vậy thợ thứ hai luôn thực hiện được chiến lược đã đề ra.

34. **Lời giải 1.** Trước kỳ nghỉ Năm Mới, giả sử trường có N học sinh, trong đó số học sinh nam là M , chiếm tỉ lệ $k\%$. Khi đó ta có:

$$M = \frac{k}{100}N \Leftrightarrow 100M = kN.$$

Sau kỳ nghỉ, số học sinh nam là $M + 1$, tổng số học sinh toàn trường là $N + 3$. Nếu tỉ lệ học sinh nam lúc này là $\ell\%$ (với $\ell < 100$), thì:

$$100(M + 1) = \ell(N + 3).$$

Kết hợp với phương trình $100M = kN$, ta thu được:

$$\ell N + 3\ell = 100M + 100 = kN + 100,$$

suy ra:

$$100 - 3\ell = (\ell - k)N.$$

Nếu $3\ell < 100$ (tức là học sinh nam chiếm dưới $1/3$), thì N phải là một ước số dương của $100 - 3\ell < 100$, do đó $N < 100$.

Nếu $3\ell > 100$ (hiển nhiên $3\ell \neq 100$), thì:

$$(k - \ell)N = 3\ell - 100 \leq 3 \cdot 99 - 100 = 197,$$

suy ra $N \leq 197$.

Vậy trong mọi trường hợp, tổng số học sinh toàn trường trước kỳ nghỉ đều nhỏ hơn 200.

Lời giải 2. Gọi m, d lần lượt là số học sinh nam và nữ trước kỳ nghỉ. Theo giả thiết:

$$\frac{100m}{m+d} = x$$

với x là một số nguyên.

Trước hết xét trường hợp tỉ lệ học sinh nam không thay đổi sau kỳ nghỉ:

$$\frac{100(m+1)}{m+d+3} = x.$$

Khi đó ta có đẳng thức:

$$\frac{100m}{m+d} = \frac{100(m+1)}{m+d+3},$$

quy đồng ta được:

$$100m(m+d+3) = 100(m+1)(m+d),$$

rút gọn thành:

$$3m = m + d.$$

Nghĩa là học sinh nam chiếm đúng $\frac{1}{3}$ toàn trường, điều này không thể tương ứng với một tỉ lệ phần trăm nguyên. Dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy chỉ còn lại hai khả năng:

$$\frac{100m}{m+d} - \frac{100(m+1)}{m+d+3} \geq 1 \quad \text{hoặc} \quad \frac{100(m+1)}{m+d+3} - \frac{100m}{m+d} \geq 1.$$

Hai trường hợp này có cách giải hoàn toàn tương tự nhau. Xét trường hợp thứ nhất, quy đồng mẫu số ta thu được:

$$100m(m+d+3) - 100(m+1)(m+d) \geq (m+d)(m+d+3).$$

Thu gọn về trái:

$$100(2m-d) \geq (m+d)(m+d+3).$$

Suy ra:

$$m + d \leq \frac{100(2m - d)}{m + d + 3}.$$

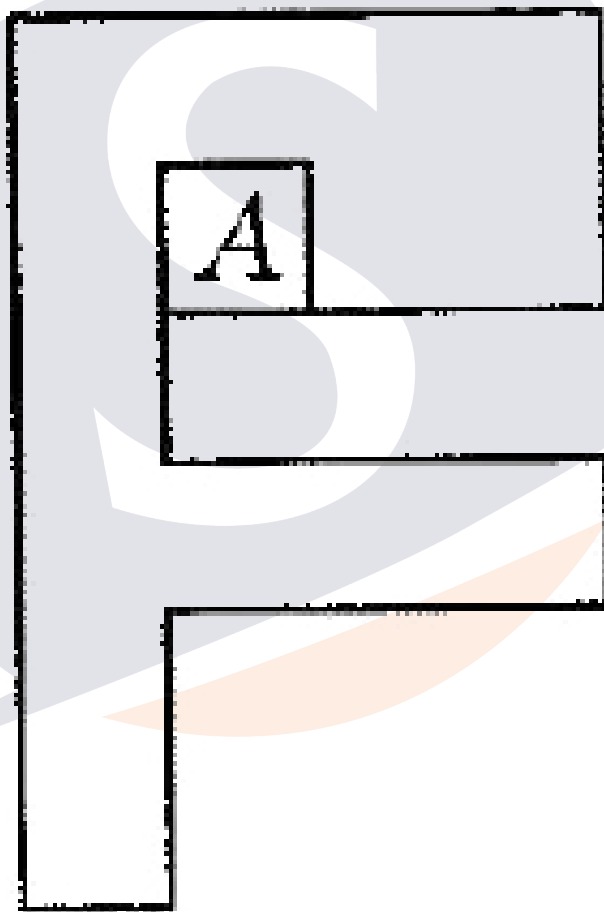
Sử dụng bất đẳng thức hiển nhiên:

$$\frac{2m - d}{m + d + 3} < 2,$$

ta dễ dàng suy ra $m + d < 200$.

35. **Đáp án:** Có thể cắt được nhiều nhất 6000 hình chữ F.

Xét mỗi hình chữ F, ta đánh dấu ô vuông A nằm ngay dưới thanh ngang phía trên của chữ F (như hình minh họa). Nhận thấy rằng, với mọi cách sắp xếp các hình chữ F không có phần trong chung trên mặt phẳng, ô A của một hình sẽ không bao giờ bị phủ lên bởi bất kỳ phần nào của một hình chữ F khác.



Hơn nữa, các ô A của các hình phân biệt sẽ luôn là các ô phân biệt trên lưới. Do đó, có thể coi mỗi ô A được liên kết duy nhất với một hình chữ F. Bây giờ, ta ghép hai hình chữ F thành một hình chữ nhật kích thước 5×6 như hình bên dưới. Hình vuông 300×300 hiển nhiên có thể được phân hoạch thành 3000 hình chữ nhật 5×6 , tương đương với 6000 hình chữ F. Đây cũng là số lượng tối đa có thể đạt được, do toàn bộ diện tích hình vuông đã được sử dụng hết.

Bất đẳng thức thứ ba $CD + BC > BE$ cũng được chứng minh hoàn toàn tương tự.

37. Sau các thao tác xóa theo đề bài, trên bảng chỉ còn lại các hợp số mà mọi thừa số nguyên tố của chúng đều phải thuộc một trong hai đoạn: $[101, 999]$ hoặc $[10001, 1000000]$. Khi đó, không có số nào còn lại trên bảng có thể là tích của từ ba thừa số nguyên tố trở lên, vì nếu như vậy giá trị của nó sẽ lớn hơn:

$$100 \cdot 100 \cdot 100 = 1000000.$$

Điều này vô lý. Vậy mỗi số còn lại bắt buộc phải phân tích được thành tích của đúng hai số nguyên tố.

Hơn nữa, cả hai thừa số nguyên tố đó đều phải thuộc đoạn $[101, 999]$; nếu không, tích của chúng sẽ vượt quá:

$$100 \cdot 10000 = 1000000.$$

Ngược lại, tích của bất kỳ hai số nguyên tố nào nằm trong đoạn $[101, 999]$ (kể cả bình phương của một số nguyên tố) đều có giá trị không vượt quá:

$$999 \cdot 999 < 1000000,$$

nên chắc chắn chúng không bị xóa và vẫn còn lại trên bảng.

Do đó, nếu p_1, p_2, \dots, p_k là danh sách tất cả các số nguyên tố từ 101 đến 999, thì các số còn sót lại trên bảng chính là tất cả các tích chập đôi một của chúng:

$$\begin{aligned} p_1 p_1, & p_1 p_2, p_1 p_3, \dots, p_1 p_k, \\ p_2 p_2, & p_2 p_3, \dots, p_2 p_k, \\ p_3 p_3, & \dots, p_3 p_k, \quad \text{v.v.} \end{aligned}$$

Vì vậy, tích của tất cả các số còn lại trên bảng sẽ bằng:

$$(p_1 p_2 \dots p_k)^{k+1},$$

đây chính là một lũy thừa (với số mũ lớn hơn 1) của một số tự nhiên.

38. Giả sử phản chứng rằng mỗi học sinh chỉ quen nhiều nhất 5 bạn trong câu lạc bộ. Khi đó, tồn tại ít nhất một học sinh quen không quá 4 bạn (thật vậy, nếu tất cả 49 em đều quen đúng 5 bạn thì theo định lý đồ thị, tổng số cặp quen nhau sẽ là $\frac{49 \cdot 5}{2}$, không phải là số nguyên, vô lý).

Chọn học sinh đó và gọi là Petya. Xét tập hợp gồm Petya, các bạn quen của Petya (không quá 4 em), và các bạn quen của những học sinh đó (không quá 16 em, vì mỗi bạn trong nhóm quen của Petya có nhiều nhất 4 mối quen biết khác ngoài Petya). Lấy tập hợp này loại ra khỏi câu lạc bộ, tổng số học sinh bị loại tối đa là $1 + 4 + 16 = 21$ em.

Chọn thêm một học sinh khác ngoài nhóm vừa loại, gọi là Vasya. Bằng lập luận tương tự, tập hợp gồm Vasya, các bạn quen của Vasya và những bạn quen của họ có nhiều nhất 26 em. Tiếp tục loại nhóm này ra.

Tổng số học sinh đã loại nhiều nhất là $21 + 26 = 47$, nên vẫn còn sót lại ít nhất 2 em, ta chọn một em và gọi là Timur.

Lúc này, ba học sinh Petya, Vasya và Timur đôi một không quen biết nhau và cũng không có bất kỳ một người bạn quen chung nào (nếu có thì người bạn chung đó đã bị loại ở một trong hai bước trước). Điều này mâu thuẫn trực tiếp với giả thiết của đề bài. Vậy giả sử sai, phải có ít nhất một học sinh quen từ 6 bạn trở lên.

39. **Đáp án:** $BC = 1$.

Lời giải 1. Trong tam giác ACD có hai góc bằng 75° nên:

$$\widehat{DAC} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$

Do đó:

$$\widehat{BAC} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Hạ các đường cao DX và BY vuông góc xuống đường thẳng AC . Ta có:

$$\widehat{XDC} = 90^\circ - \widehat{XCD} = 15^\circ.$$

Suy ra hai tam giác vuông DXC và BYA bằng nhau theo trường hợp cạnh huyền - góc nhọn (do $CD = AB = 1$), dẫn tới:

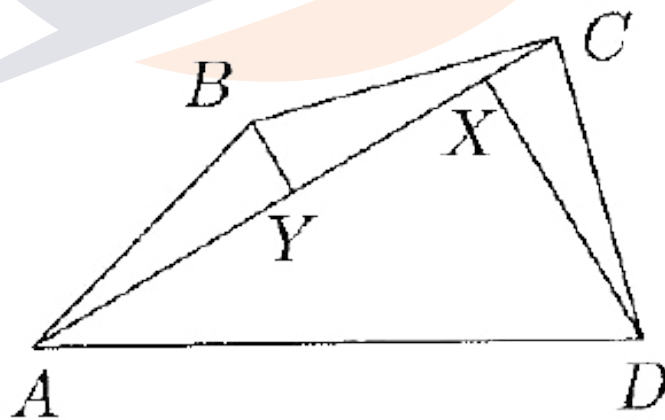
$$AY = DX.$$

Trong tam giác vuông ADX , do có góc $\widehat{DAX} = 30^\circ$ nên:

$$AD = 2DX = 2AY.$$

Suy ra $CY = AC - AY = AD - AY = 2AY - AY = AY$. Vậy Y là trung điểm của đoạn AC , suy ra tam giác ABC cân tại B . Do đó:

$$BC = AB = 1.$$



Lời giải 2. Tương tự như trên, ta xác định được:

$$\widehat{DAC} = 30^\circ, \quad \widehat{BAC} = 15^\circ.$$

Dựng tam giác đều CDE vào phía bên trong tứ giác. Khi đó, điểm A và E cùng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng CD , do đó AE là tia phân giác của góc \widehat{CAD} . Suy ra:

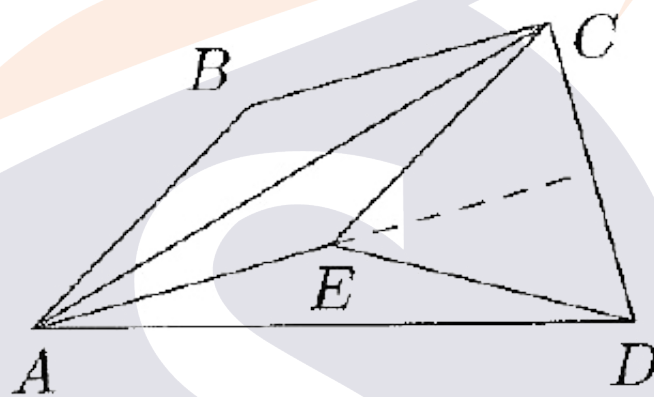
$$\widehat{EAC} = 15^\circ = 75^\circ - 60^\circ = \widehat{ACE}.$$

Kéo theo tam giác AEC là tam giác cân tại E , và:

$$AE = EC = CD = AB = 1.$$

Vậy điểm E chính là điểm đối xứng của B qua trục đối xứng AC . Từ phép đối xứng này ta suy ra:

$$BC = EC = 1.$$



40. Xét tập hợp các số Palindrome có 449 chữ số dưới đây, được chia làm 225 nhóm, mỗi nhóm gồm 9 số:

$$\begin{matrix} 1000 \dots 0001, & 2000 \dots 0002, & \dots, & 9000 \dots 0009, \\ 9100 \dots 0019, & 9200 \dots 0029, & \dots, & 9900 \dots 0099, \\ 9910 \dots 0199, & 9920 \dots 0299, & \dots, & 9990 \dots 0999, \\ \dots & \dots & \dots, & \dots \\ \underbrace{99 \dots 9}_{224} 1 \underbrace{99 \dots 9}_{224}, & \underbrace{99 \dots 9}_{224} 2 \underbrace{99 \dots 9}_{224}, & \dots, & \underbrace{99 \dots 9}_{224} 9 \underbrace{99 \dots 9}_{224}. \end{matrix}$$

Tổng cộng có:

$$9 \cdot 225 = 2025$$

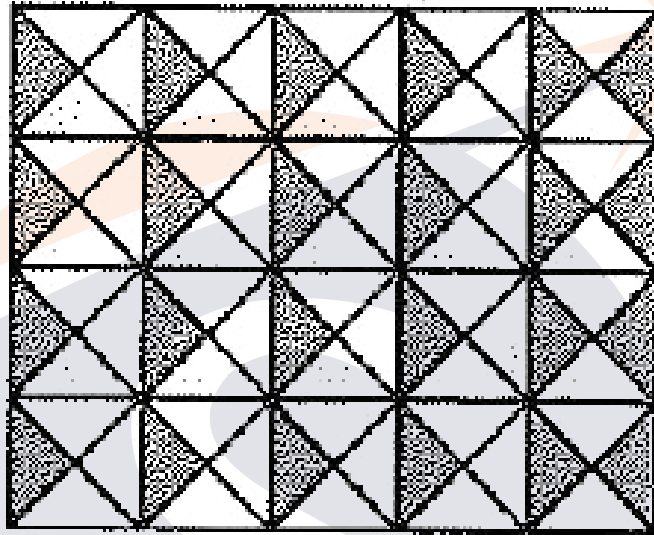
số. Vì 2025 lớn hơn 2017, theo nguyên lý Dirichlet, khi chia tập hợp này cho số nguyên tố $p \leq 2017$, chắc chắn phải có hai số cho cùng một số dư.

Lấy hiệu của hai số đó (số lớn trừ số nhỏ), ta thu được một số Palindrome có 449 chữ số chia hết cho p (có thể nó bắt đầu và kết thúc bằng một vài chữ số 0). Nếu $p \neq 2$ và $p \neq 5$, ta hoàn toàn có thể bỏ qua các chữ số 0 ở hai đầu mà vẫn giữ được một số Palindrome hợp lệ chia hết cho p . Nếu $p = 2$ hoặc $p = 5$, thì số Palindrome chia hết cho p có thể lấy ngay là chính số p .

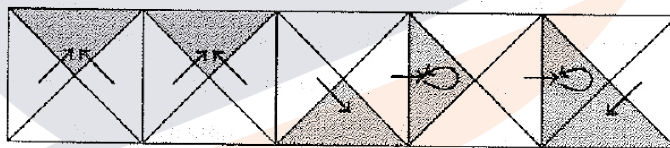
41. **Đáp án:** Số lượng tam giác đen nhỏ nhất có thể là:

$$mn + \min(m, n).$$

Cấu hình tối ưu. Không mất tính tổng quát, giả sử $m \leq n$. Ta tô đen tất cả các tam giác nằm ở phía bên trái trong mỗi ô vuông, và ở cột ngoài cùng bên phải, ta tô đen thêm các tam giác nằm ở phía bên phải. Khi đó, tổng số tam giác đen là $mn + m$, thỏa mãn hoàn toàn yêu cầu của bài toán.



Đánh giá dưới. Xét một hàng ngang bất kỳ. Mỗi hàng có $2n$ tam giác có cạnh thẳng đứng (gọi tắt là "tam giác đứng"). Với mỗi tam giác đứng màu trắng, ta thiết lập một mũi tên trỏ về một tam giác màu đen kề cạnh với nó trong cùng hàng; nếu tam giác đứng đó đã tô màu đen, ta cho mũi tên trỏ về chính nó. Như vậy, mỗi hàng phát ra tổng cộng $2n$ mũi tên.



Mỗi tam giác trong hàng chỉ có thể nhận tối đa 2 mũi tên: tam giác nằm ngang chỉ nhận mũi tên từ hai tam giác đứng kề nó trong cùng một ô; tam giác đứng chỉ nhận mũi tên từ chính nó và từ tam giác đứng kề bên cạnh. Để nhận đủ $2n$ mũi tên, trong mỗi hàng phải có ít nhất n tam giác màu đen. Lập luận tương tự theo cột, trong mỗi cột cũng phải có ít nhất m tam giác đen.

Giả sử tồn tại một hàng có đúng n tam giác đen. Khi đó, mỗi tam giác đen trong hàng này phải nhận chính xác 2 mũi tên. Tam giác đứng nằm ngoài cùng bên trái không thể có màu đen (nếu màu đen thì nó chỉ nhận 1 mũi tên từ chính nó), do đó nó phải màu trắng. Mũi tên từ tam giác trắng này chắc chắn phải trỏ vào tam giác ngang kề nó, suy ra tam giác ngang đó mang màu đen. Để tam giác ngang này nhận đủ 2 mũi tên, tam giác đứng bên phải trong cùng ô cũng phải mang màu trắng. Áp dụng suy luận này dọc theo toàn bộ hàng, ta kết luận được

rằng trong mỗi ô vuông của hàng đó chỉ có đúng một tam giác đen, và đó chính là tam giác ngang.

Hoàn toàn tương tự, nếu một cột có đúng m tam giác đen, thì trong mỗi ô vuông thuộc cột đó cũng có duy nhất một tam giác đen, và đó là tam giác đứng.

Hai trường hợp này không thể xảy ra đồng thời, bởi tại ô vuông là giao của hàng đó và cột đó sẽ xuất hiện một tam giác đen vừa đóng vai trò là tam giác ngang vừa là tam giác đứng — mâu thuẫn.

Do đó, hoặc tất cả các hàng đều phải chứa từ $n + 1$ tam giác đen trở lên, hoặc tất cả các cột đều phải chứa từ $m + 1$ tam giác đen trở lên. Từ đó suy ra tổng số tam giác đen trên toàn bảng không thể nhỏ hơn:

$$\min\{m(n + 1), n(m + 1)\} = mn + \min(m, n).$$

44. **Đáp án:** Số thứ 2017 nhỏ hơn số thứ 83.

Lời giải 1 (Loại bỏ dần các cặp). Ta tiến hành ghép các số thành từng cặp theo thứ tự chúng được viết ra: số thứ nhất ghép với số thứ hai, số thứ ba với số thứ tư, v.v. Khẳng định rằng: bắt đầu từ số thứ ba trở đi, mọi số được viết ra đều nằm trong đoạn thẳng giới hạn bởi cặp số đầu tiên trên trục số.

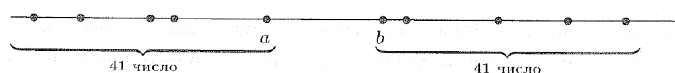
Thật vậy, giả sử khẳng định này sai; gọi số đầu tiên vi phạm quy luật này (nằm ngoài đoạn của cặp đầu tiên). Tại thời điểm viết con số vi phạm đó, ở một phía của nó trên trục số không có bất kỳ con số nào, trong khi ở phía còn lại có ít nhất 2 số (chính là cặp số đầu tiên). Điều này trái với điều kiện của đề bài (chênh lệch số lượng các số ở hai bên không vượt quá 1).

Vì vậy, ta hoàn toàn có thể xóa cặp số đầu tiên đi mà điều kiện của bài toán vẫn được bảo toàn cho các số còn lại. Áp dụng liên tiếp lập luận này, ta thu được quy luật: bắt đầu từ số thứ năm, mọi số đều nằm trong đoạn tạo bởi cặp thứ hai; từ số thứ bảy thì nằm trong đoạn tạo bởi cặp thứ ba; v.v.

Nói cách khác, mỗi con số luôn nằm trọn trong tất cả các đoạn thẳng tạo bởi các cặp số được viết ra trước nó. Hãy phân loại mỗi số thành "số trái" hoặc "số phải" tùy thuộc vào vị trí của nó so với số được ghép cặp cùng. Dựa vào nhận xét trên, mỗi con số luôn lớn hơn toàn bộ các "số trái" xuất hiện trước nó, và nhỏ hơn toàn bộ các "số phải" xuất hiện trước nó. Vì số thứ 219 lớn hơn số thứ 84, chứng tỏ số thứ 84 phải là "số trái". Kéo theo số được ghép cặp với nó (số thứ 83) phải là "số phải". Vì là "số phải", nó luôn lớn hơn tất cả các số được viết ra sau này, bao gồm cả số thứ 2017.

(Cách giải này do ban biên tập tạp chí *Kvantik* gợi ý; tác giả: A. Perepechko.)

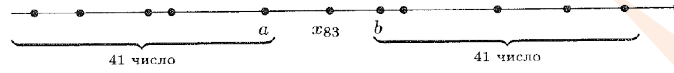
Lời giải 2 (Giới hạn vị trí số kế tiếp). Đánh chỉ số các số theo thứ tự chúng xuất hiện. Gọi số thứ 83 là x_{83} . Khi số này được viết ra, đã có 82 số ngự trị trên trục số. Hãy gọi a, b lần lượt là số lớn thứ 41 và thứ 42 (tính theo thứ tự tăng dần) trong số 82 con số ấy.



Lúc này, x_{83} bắt buộc phải thuộc khoảng (a, b) . Nếu không, chẳng hạn $x_{83} > b$, thì có ít nhất 42 con số nhỏ hơn x_{83} và không quá 40 con số lớn hơn x_{83} , độ chênh lệch ít nhất là 2, vi phạm điều kiện bài toán.

Tương tự, đối với mọi số thứ tự lẻ $(2n + 1)$, con số đó bắt buộc phải lọt vào giữa hai số "trung tâm" (số lớn thứ n và số lớn thứ $n + 1$ trong các số hiện có).

Xét số thứ 84:



Lập luận tương tự chỉ ra rằng x_{84} chỉ có thể rơi vào một trong hai khoảng (a, x_{83}) hoặc (x_{83}, b) . Khi x_{84} được viết ra, x_{83} và x_{84} trở thành hai số trung tâm mới của tập hợp; do đó cặp số kế tiếp x_{85}, x_{86} đều phải nằm giữa x_{83} và x_{84} . Lập luận quy nạp cho thấy mọi số có chỉ số lớn hơn 84 đều nằm giữa x_{83} và x_{84} .

Nếu $x_{84} \in (x_{83}, b)$ thì mọi con số về sau, kể cả x_{219} , đều phải nằm trong (x_{83}, x_{84}) , dẫn đến $x_{219} < x_{84}$, điều này mâu thuẫn trực tiếp với giả thiết đề bài $x_{219} > x_{84}$. Vậy chỉ còn khả năng duy nhất: $x_{84} \in (a, x_{83})$. Hệ quả là mọi số ra đời sau đó, bao gồm cả số thứ 2017, đều thuộc (x_{84}, x_{83}) , điều này chứng minh $x_{2017} < x_{83}$.

45. Ta chỉ cần chứng minh $DF_1 = BC$. Áp dụng tính đối xứng, ta cũng sẽ có $DF_2 = BC$, từ đó suy ra $DF_1 = DF_2$.

Lời giải 1 (Sử dụng tam giác bằng nhau). Ba cạnh của tam giác E_1CF_1 lần lượt song song với ba cạnh của tam giác cân ABE_1 . Vì tính chất đồng dạng, tam giác E_1CF_1 cũng là tam giác cân, tức là:

$$E_1C = F_1C.$$

Xét hai tam giác BCE_1 và DF_1C , ta có:

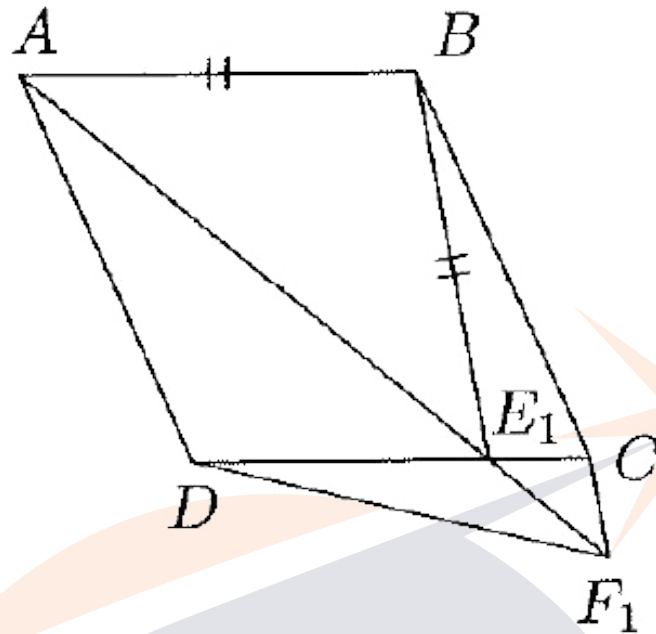
$$E_1C = F_1C, \quad BE_1 = AB = DC,$$

và góc xen giữa:

$$\widehat{BE_1C} = \widehat{DCF_1}$$

(do $BE_1 \parallel CF_1$). Suy ra hai tam giác này bằng nhau (cạnh-góc-cạnh), dẫn đến:

$$DF_1 = BC.$$

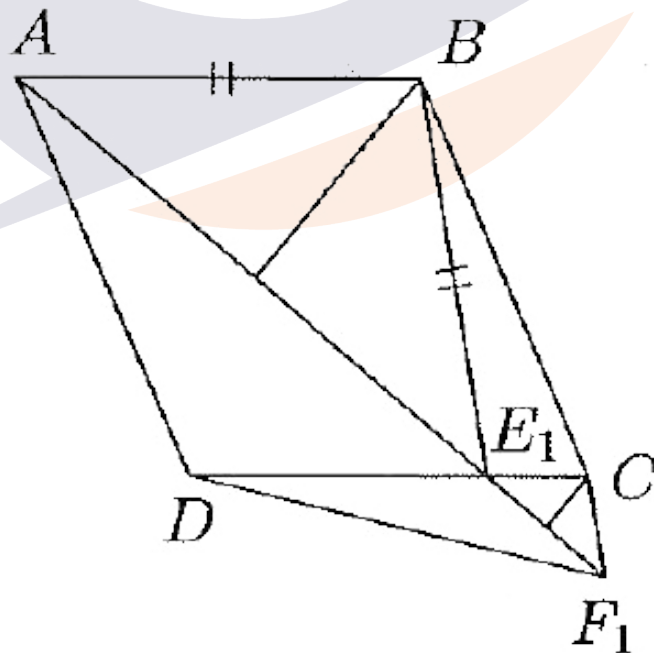


Lời giải 2 (Sử dụng phép chiếu). Từ việc tam giác E_1CF_1 cân tại C , hình chiếu vuông góc của đoạn BC lên đường thẳng AE_1 sẽ bằng:

$$\frac{1}{2}AE_1 + \frac{1}{2}E_1F_1 = \frac{1}{2}AF_1.$$

Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $BC \parallel AD$ và $BC = AD$, vì vậy hình chiếu của đoạn AD lên AE_1 cũng có độ dài bằng $\frac{1}{2}AF_1$. Điều này chứng tỏ hình chiếu của DF_1 chiếm đúng phần nửa còn lại của AF_1 , qua đó kết luận:

$$DF_1 = AD = BC.$$



46. **Đáp án:** Số lượng nhân viên tối đa là $n + 1$ người.

Ví dụ phản chứng cho số lượng nhiều hơn. Giả sử doanh nghiệp có $k \geq n + 2$ nhân viên. Xét kịch bản phân phối lương sau: tất cả nhân viên (trừ giám đốc) đều có mức lương là 1 tugrik; riêng giám đốc nhận phần lương còn lại. Khi đó, doanh nghiệp cần chi trả $k - 1 \geq n + 1$ đồng xu mệnh giá 1 tugrik, nhưng đội thu ngân chỉ mang đến đúng n đồng xu loại này. Việc phát đủ lương là không thể.

Chứng minh luôn khả thi với số lượng không vượt quá $n + 1$ người. Ta chứng minh cho trường hợp có đúng $n + 1$ nhân viên (chấp nhận có nhân viên nhận lương 0 tugrik). Thuật toán phân phát tiền sẽ tuân theo phương pháp tham lam (greedy algorithm) từ mệnh giá lớn nhất xuống nhỏ dần: đối với mỗi loại đồng xu, ta ưu tiên phát cho những ai đang còn bị thiếu một khoản tiền lớn hơn hoặc bằng chính mệnh giá đó.

Giả sử thuật toán bị tắc ở đồng xu mệnh giá $k > 1$, nghĩa là không thể phát đồng xu này cho bất kỳ ai. Khi đó, số tiền còn thiếu của mỗi người đều đang nhỏ hơn k , tức là tối đa chỉ là $k - 1$. Do đó, tổng số tiền chưa được phát của toàn bộ công ty không vượt quá:

$$(n + 1)(k - 1) = nk + k - n - 1.$$

Mặt khác, trong quỹ hiện tại vẫn còn nguyên vẹn toàn bộ các đồng xu mệnh giá $1, 2, \dots, k - 1$ và ít nhất một đồng xu mệnh giá k . Tổng số tiền mặt thực tế chưa phát ít nhất là:

$$n(1 + 2 + \dots + (k - 1)) + k \geq n(1 + (k - 1)) + k = nk + k > nk + k - n - 1.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn: tổng số tiền mặt hiện có lại lớn hơn tổng số tiền cần phải thanh toán. Mâu thuẫn này chứng tỏ thuật toán phát tiền tham lam sẽ luôn khả thi và tiền lương luôn được phát đủ theo đúng quy tắc.

Mở rộng. Nếu doanh nghiệp có các mức lương nguyên, đội thu ngân mang đến n đồng 1 tugrik, n đồng 2 tugrik, ..., n đồng k tugrik, tổng đúng bằng tổng quỹ lương. Tìm số nhân viên lớn nhất để vẫn luôn phát đủ nếu biết lương mỗi người ít nhất: a) 2 tugrik; b) 3 tugrik.

47. Gọi C' là trung điểm của cạnh AB . Lấy điểm E trên tia đối của tia MC sao cho:

$$CM = ME.$$

Khi đó, đoạn DM đóng vai trò vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của tam giác CDE , suy ra tam giác CDE cân tại D , tức là:

$$CD = DE.$$

Theo tính chất trọng tâm chia đường trung tuyến theo tỉ lệ $2 : 1$, ta có:

$$ME = CM = 2MC',$$

điều này chứng tỏ C' cũng chính là trung điểm của đoạn ME . Vì hai đường chéo AB và ME cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, tứ giác $AMBE$ là một hình bình hành. Hệ quả trực tiếp là hai tam giác $AC'M$ và $BC'E$ bằng nhau, dẫn tới diện tích của chúng cũng bằng nhau:

$$S_{AME} = S_{AEB}.$$

Mặt khác, xét hai tam giác chung đáy AM và cùng đường cao hạ từ C và E :

$$S_{AME} = S_{AMC}.$$

Từ các đẳng thức trên, ta có:

$$S_{AMC} = S_{AME} = S_{AEB}.$$

Đồng thời, do hai đường thẳng AD và BC song song với nhau:

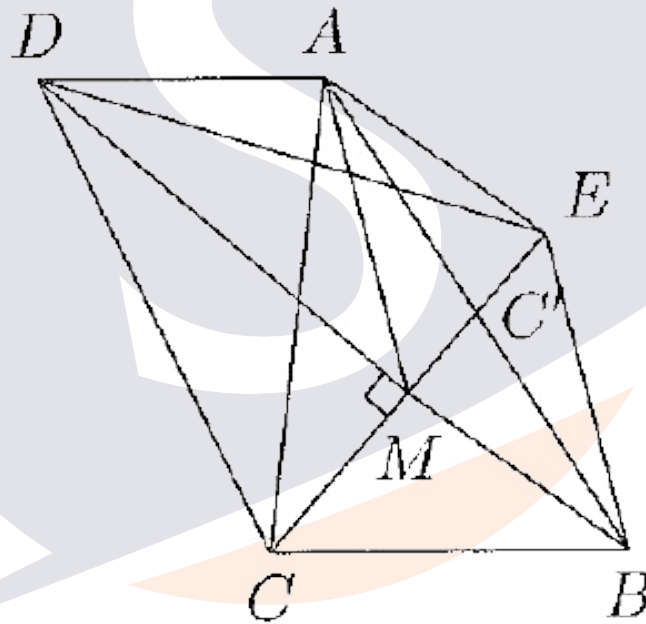
$$S_{ACD} = S_{ABD}.$$

Tổng hợp lại để tính diện tích:

$$S_{AMCD} = S_{ACD} + S_{AMC} = S_{ABD} + S_{AEB} = S_{AEBD}.$$

Áp dụng tính chất hình học: với bất kỳ tứ giác nào, hai lần diện tích của nó luôn nhỏ hơn hoặc bằng tích độ dài hai đường chéo. Áp dụng vào tứ giác $AEBD$:

$$2S = 2S_{AMCD} = 2S_{AEBD} \leq AB \cdot DE = AB \cdot CD.$$



48. **Đáp án:** Vasya là người giành chiến thắng.

Mấu chốt của bài toán là ta có thể xem trò chơi không diễn ra trên một dải ô thẳng, mà trên một vòng gồm 99 hạt (một chuỗi hạt có khóa). Xem "khóa" như một hạt đặc biệt; khi sử dụng quyền đặc biệt để tô một ô có dấu chấm, ta hiểu thao tác này tương đương với việc tô hạt mang dấu chấm tương ứng cùng với hạt khóa.

Khi đó luật chơi trở nên đối xứng: có một vòng 100 hạt, mỗi lượt người chơi tô màu hai hạt kề nhau chưa được tô; ai không thể thực hiện nước đi sẽ thua cuộc. Trong mô hình này, người đi sau (Vasya) sẽ giành chiến thắng bằng chiến lược đối xứng tâm: ở mỗi nước đi, Vasya luôn tô cặp hạt đối xứng qua tâm vòng tròn với cặp hạt mà đối thủ vừa tô.

49. **Đáp án:** Khẳng định đúng.

Thuật toán máy tính của Sasha như sau: Đưa thẻ ghi số s vào máy, máy sẽ trả lại thẻ đó và in thêm thẻ mang số $s + 1$. Tiếp theo, nạp đồng thời hai thẻ $s + 1$ và s vào máy. Máy tính sẽ in ra các nghiệm thực của tam thức bậc hai:

$$x^2 + (s + 1)x + s = 0,$$

tam thức này có các nghiệm là -1 và $-s$, do đó máy in ra hai thẻ mang số -1 và $-s$.

Sử dụng thẻ số -1 , nạp lại vào máy để sinh ra thẻ số 0 . Cuối cùng, nạp cặp thẻ 0 và $-s$ vào máy, máy sẽ tính toán nghiệm của phương trình:

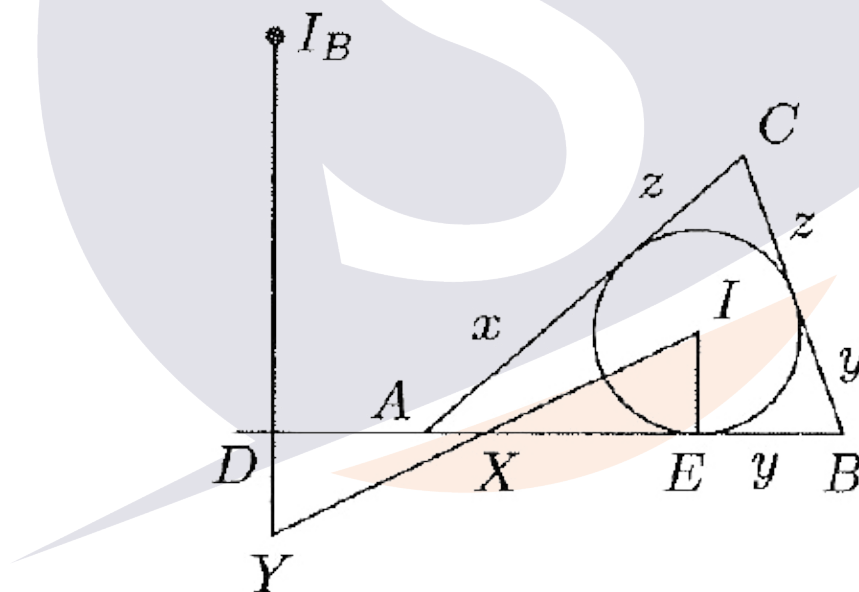
$$x^2 + 0 \cdot x - s = 0,$$

tức là in ra thành công thẻ mang số \sqrt{s} và thẻ $-\sqrt{s}$.

50. Gọi x, y, z lần lượt là độ dài các đoạn tiếp tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C đến các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác. Ta có mối liên hệ:

$$AB = x + y, \quad BC = y + z, \quad CA = z + x,$$

và tổng $x + y + z$ chính là nửa chu vi của tam giác ABC .



Gọi D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc B trên phần kéo dài của tia BA , và E là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên cạnh AB . Vì đường thẳng $I_B D \perp AB$, bài toán quy về việc chứng minh $D Y \perp AB$; khi đó 3 điểm I_B, D, Y sẽ thẳng hàng và nằm trên đường vuông góc chung đó.

Ta sẽ chứng minh hai tam giác $X D Y$ và $X I E$ bằng nhau theo trường hợp cạnh-góc-cạnh (vì $\widehat{I E X} = 90^\circ$): Dữ kiện bài toán đã cho điểm Y đối xứng với tâm I qua X , tức là:

$$I X = X Y.$$

Góc xen giữa bằng nhau do là hai góc đối đỉnh:

$$\widehat{IXE} = \widehat{YXD}.$$

Việc còn lại là chứng minh:

$$XD = XE.$$

Biểu diễn các độ dài qua hệ tọa độ x, y, z :

$$\begin{aligned} XE &= BX - BE \\ &= BX - y = \frac{AB + BC}{2} - y \\ &= \frac{(x + y) + (y + z)}{2} - y = \frac{x + z}{2}. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$XD = BD - BX = (x + y + z) - \frac{(x + y) + (y + z)}{2} = \frac{x + z}{2}.$$

Vậy ta đã chứng minh được $XD = XE$, kéo theo các kết luận được thỏa mãn.

51. **Đáp án:** Hoàn toàn có thể.

Biên của bàn cờ 100×100 được cấu thành từ 396 ô vuông, và nhận thấy:

$$396 = 3 \cdot 132.$$

Ta quy ước 396 ô vuông này tương đương với 396 đỉnh của một đa giác đều nội tiếp. Hai ô kề cạnh tương ứng với hai đỉnh kề nhau; hai ô đối xứng qua tâm bàn cờ tương ứng với hai đỉnh đối xứng qua tâm O của đa giác.

Chiến lược phối hợp giữa Vasya và Tolya diễn ra như sau: bất cứ khi nào Petya chọn tô màu một đỉnh P , Vasya sẽ tính toán và tô đỉnh V sao cho góc quay quanh tâm O :

$$\widehat{POV} = 120^\circ,$$

và ngay sau đó, Tolya sẽ đi nước cờ của mình vào đỉnh T sao cho góc quay:

$$\widehat{TOP} = 120^\circ$$

(các góc được đo theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Ba đỉnh P, V, T này tạo thành một tam giác đều. Nhờ chiến lược này, sau mỗi lượt của Tolya, tập hợp các ô đã tô luôn giữ được tính bất biến dưới phép quay tâm O góc $\pm 120^\circ$.

Ta kiểm tra xem Vasya và Tolya có luôn thực hiện được nước đi hay không. Giả sử đến lượt Vasya đi (sau khi Petya vừa tô P), mà Vasya lại không thể tô ô V . Điều này chỉ xảy ra nếu V đã bị tô từ trước, hoặc một ô đối xứng (kề cạnh) với V đã bị tô. Dựa vào tính bất biến dưới phép quay góc 120° , trường hợp thứ nhất dẫn đến đỉnh P cũng đã bị tô từ trước; trường hợp thứ hai dẫn đến việc một ô kề cạnh với đỉnh P đã bị tô. Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn với quy tắc trò chơi. Qua đó chứng tỏ Vasya luôn có đường đi; lập luận tương tự đảm bảo Tolya cũng luôn đi được.

Do số lượng ô trống là hữu hạn (396 ô), trò chơi chắc chắn sẽ kết thúc, và người lâm vào thế không thể đi tiếp chỉ có thể là Petya.

52. **Đáp án:** Chỉ có thể xảy ra khi n là một số lẻ.

Trước tiên, ta xét trường hợp n là số chẵn. Giả sử ta đã tìm được cách điền các số vào bảng thỏa mãn mọi yêu cầu đề bài. Xét một cột chứa ba số a, b, c . Tổng các tích đôi một của chúng là:

$$ab + bc + ca.$$

Biểu thức này chia hết cho n , mà n là số chẵn, nên biểu thức này cũng phải là một số chẵn.

Nếu trong ba số a, b, c có 2 hoặc 3 số lẻ, thì giá trị của $ab + bc + ca$ sẽ là số lẻ, gây mâu thuẫn. Điều này ép buộc trong mỗi cột, chỉ được phép chứa tối đa một số lẻ. Hệ quả là trên toàn bộ bảng sẽ có không vượt quá n số lẻ.

Tuy nhiên, theo quy định, mỗi hàng là một hoán vị của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$, do đó mỗi hàng sẽ chứa đúng $\frac{n}{2}$ số lẻ. Tính trên cả 3 hàng, tổng số lượng số lẻ thực tế trên bảng phải là:

$$\frac{3n}{2}.$$

Con số này lớn hơn n , tạo ra sự mâu thuẫn. Do đó n không thể là số chẵn.

Bây giờ, xét trường hợp n là số lẻ. Ta xây dựng bảng như sau: hàng 1 và hàng 2 chứa các số chẵn:

$$2, 4, 6, \dots, 2n,$$

trong khi hàng 3 chứa các số âm tương ứng:

$$-1, -2, \dots, -n.$$

Với cấu hình này, mỗi cột trong bảng sẽ có định dạng $(2k, 2k, -k)$. Kiểm tra tổng tích đôi một của bộ ba này:

$$2k \cdot 2k + 2k \cdot (-k) + 2k \cdot (-k) = 0,$$

số 0 hiển nhiên chia hết cho n .

Cuối cùng, ta thay thế mỗi số trong bảng bằng phần dư của nó theo modulo n (đặc biệt các số chia hết cho n thì được gán bằng n). Thông qua phép biến đổi này, mọi số hạng đều thuộc tập $\{1, 2, \dots, n\}$, và tính chất chia hết theo cột vẫn được bảo toàn. Ta chỉ cần kiểm tra xem các số trên cùng một hàng có đôi một khác biệt hay không; điều này được bảo đảm vì dãy số gốc trên mỗi hàng tạo ra hệ thặng dư đầy đủ theo modulo n .

53. **Đáp án:**

$$\angle DHE = 100^\circ.$$

Dễ thấy hai tam giác ABC và EBD đồng dạng với nhau theo trường hợp góc-góc, vì tứ giác $ADEC$ nội tiếp nên góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện:

$$\angle BED = 180^\circ - \angle DEC = \angle BAC.$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác BDE , và đặt số đo góc:

$$\angle BAC = \angle BED = \alpha.$$

Áp dụng tính chất góc ở tâm đường tròn, ta có:

$$\angle DOB = 2\alpha,$$

từ đó suy ra số đo góc đáy của tam giác cân ODB :

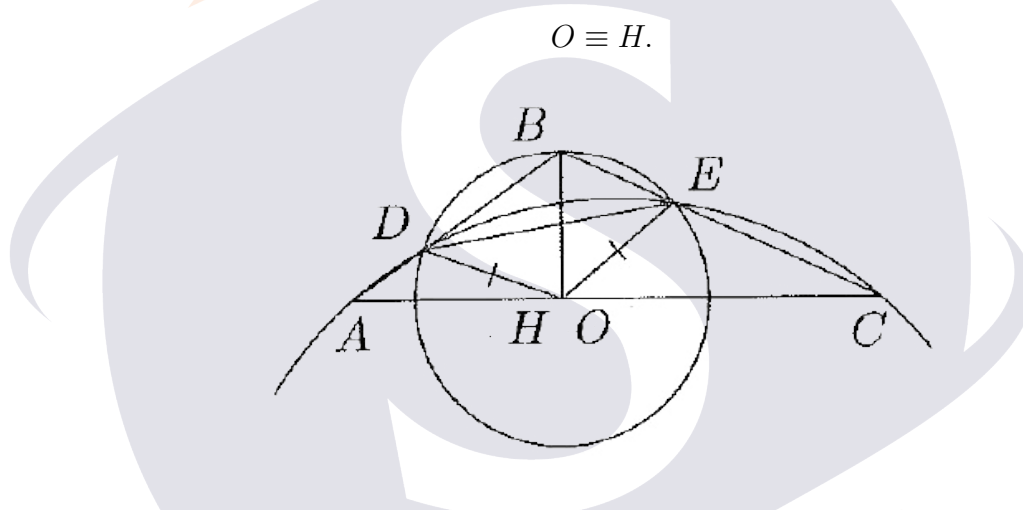
$$\angle ODB = \angle OBD = 90^\circ - \alpha.$$

Mặt khác, trong tam giác vuông ABH , ta cũng có:

$$\angle ABH = 90^\circ - \alpha.$$

Điều này chứng tỏ tia BO và tia BH trùng nhau, hay tâm O nằm trên đường thẳng BH . Ngoài ra, theo định nghĩa, tâm O cũng phải nằm trên đường trung trực của đoạn DE .

Đồng thời, điểm H nằm trên đường cao BH , và theo giả thiết của đề bài ($HD = HE$), H cũng nằm trên đường trung trực của đoạn DE . Vì vậy, điểm O và H trùng nhau:



Xác nhận được H chính là tâm đường tròn đi qua B, D, E , ta cần tính góc ở tâm $\angle DHE$. Góc ở tâm bù với nó (góc lớn) sẽ bằng hai lần góc nội tiếp chắn cùng cung:

$$360^\circ - \angle DHE = 2\angle B = 2 \cdot 130^\circ = 260^\circ,$$

từ đó ta tính được:

$$\angle DHE = 100^\circ.$$

54. **Đáp án:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 2.

Lời giải 1. Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân (AM-GM) cho hai số dương, ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{1-a^2}} \geq \frac{a^2}{\frac{1}{2}(a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2)} = 2a^2.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức tương tự cho các biến a, b, c :

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2.$$

Vậy tổng cần tìm luôn bị chặn dưới bởi 2.

Dấu bằng đạt được, chẳng hạn khi ta chọn:

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = 0,$$

khi đó biểu thức đạt giá trị chính xác bằng 2.

Lời giải 2 (Phương pháp dồn biến). Xét hàm số:

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

bài toán quy về việc tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$f(x) + f(y) + f(z)$$

với điều kiện ràng buộc:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x, y, z \in [0, 1].$$

Đặt tổng ba biến là:

$$x + y + z = s \in (1, \sqrt{3}].$$

Do vai trò của các biến là đối xứng, ta có thể giả sử:

$$0 \leq x \leq y \leq z < 1,$$

từ đó suy ra:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Cố định biến x , hai biến y, z sẽ được xác định bởi hệ phương trình:

$$y + z = s - x, \quad y^2 + z^2 = 1 - x^2.$$

Ký hiệu $y = y(x), z = z(x)$ và xét hàm số:

$$g(x) = f(x) + f(y(x)) + f(z(x)).$$

Lấy vi phân hệ phương trình trên:

$$y'(x) + z'(x) = -1,$$

$$2y(x)y'(x) + 2z(x)z'(x) = -2x,$$

giải hệ ta thu được:

$$y'(x) = \frac{x - z(x)}{z(x) - y(x)}, \quad z'(x) = \frac{y(x) - x}{z(x) - y(x)}.$$

Từ đó, đạo hàm của hàm tổng $g(x)$ là:

$$g'(x) = \left(\frac{f'(z) - f'(y)}{z - y} - \frac{f'(x) - f'(y)}{x - y} \right) (y - x).$$

Khảo sát đạo hàm của $f(t)$:

$$f'(t) = (1 - t^2)^{-3/2}$$

đây là một hàm lồi ngặt, do đó biểu thức trong ngoặc lớn mang dấu dương; kết hợp với $y \geq x$, suy ra:

$$g'(x) > 0.$$

Vậy hàm g đồng biến ngặt, nên với s cho trước, hàm đạt cực tiểu khi biến x nhỏ nhất. Xét điều kiện biên, ta có hai trường hợp: $x = 0$ hoặc $y = z$.

Trường hợp $x = 0$, ta có $z = \sqrt{1 - y^2}$, do đó:

$$f(x) + f(y) + f(z) = \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2,$$

dấu bằng xảy ra khi $y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trường hợp $y = z = \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}$, ta khảo sát hàm:

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + 2 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đạo hàm của $h(x)$ là:

$$h'(x) = \frac{(1 + x^2)^{3/2} + 4x^3 - 4x}{(1 - x^4)^{3/2}}.$$

Giải phương trình $h'(x) = 0$, ta được phương trình:

$$15x^6 - 35x^4 + 13x^2 - 1 = 0,$$

trên đoạn đang khảo sát, phương trình chỉ có các nghiệm:

$$x_1 = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đánh giá giá trị của $h(x)$ tại các điểm biên 0 và $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$h(0) = 2,$$

và:

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 2.$$

So sánh các giá trị, giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 2.

55. **Lời giải 1.** Ta sẽ chứng minh mệnh đề tổng quát hơn: trong góc phần tư mặt phẳng được chia thành lưới ô vuông vô hạn, nếu ta tô màu $a \geq n^2$ ô vuông, thì số lượng ô kề cạnh với ít nhất một ô được tô màu luôn không nhỏ hơn:

$$a + n.$$

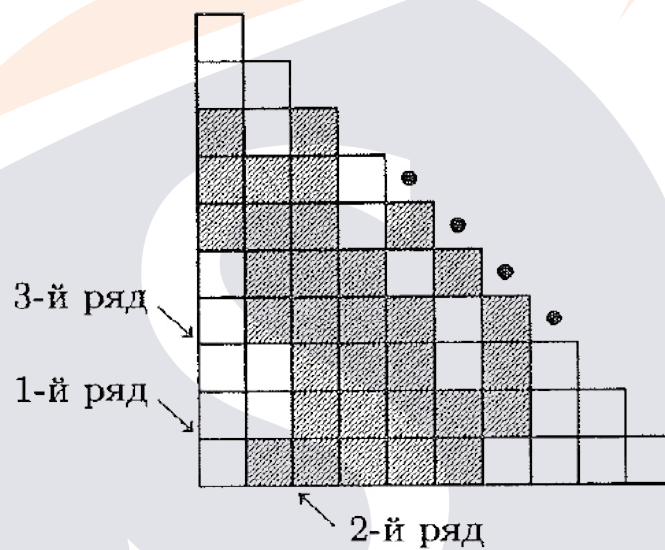
Chúng minh bằng quy nạp theo tham số n . Bước cơ sở $n = 0$ là hiển nhiên: số ô kề cạnh luôn lớn hơn hoặc bằng số ô tô màu (mỗi ô tô màu có thể liên kết với một ô kề bên phải phân biệt).

Quá trình quy nạp được xây dựng trên hai nhận xét:

Nhận xét 1. Chia toàn bộ góc phần tư thành các dải cột thẳng đứng có bề rộng 2 ô. Với bất kỳ dải cột nào không rỗng (chứa ít nhất một ô được tô màu), số ô kề cạnh nằm trọn trong dải cột đó luôn lớn hơn số ô được tô màu tối thiểu là 1 ô.

Hệ quả: nếu có ít nhất n dải cột không rỗng, thì ta chắc chắn thu được ít nhất $a + n$ ô kề.

Nhận xét 2. Phân hoạch lưới ô vuông thành các đường chéo. Xét đường chéo nằm ở vị trí cao nhất mà vẫn chứa ô tô màu. Trên đường chéo này, chọn một dải gồm k ô tô màu liên tiếp nhau.



Trên đường chéo liên kề phía trên, có đúng $k + 1$ ô trống kề sát với dải này, và các ô trống này không kề cạnh với bất kỳ ô tô màu nào khác trên bảng. Do đó, nếu ta loại bỏ dải k ô này khỏi tập hợp các ô tô màu, số lượng ô kề sẽ giảm đi đúng $k + 1$ ô.

Vì vậy, nếu sau khi loại bỏ, số lượng ô kề còn lại vẫn lớn hơn số ô tô màu còn lại ít nhất là $n - 1$, thì trước khi loại bỏ, sự chênh lệch đó phải đạt ít nhất là n .

Phân tích dựa trên giá trị của k :

Nếu $k \geq 2n$, dải này sẽ giao với ít nhất n dải đứng bề rộng 2. Áp dụng Nhận xét 1, bài toán được giải quyết.

Nếu $k \leq 2n - 1$, sau khi loại bỏ khối này, số ô tô màu còn lại thỏa mãn:

$$a - k \geq n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2.$$

Tại đây, ta có thể áp dụng giả thiết quy nạp cho bậc $n - 1$.

Mệnh đề đã được chứng minh hoàn toàn.

Với giới hạn $a = n^2$, cận dưới này là chặt: cấu hình đạt được bằng cách điền kín n đường chéo đầu tiên sát gốc tọa độ, khi đó số lượng ô kề đúng bằng $n^2 + n$.

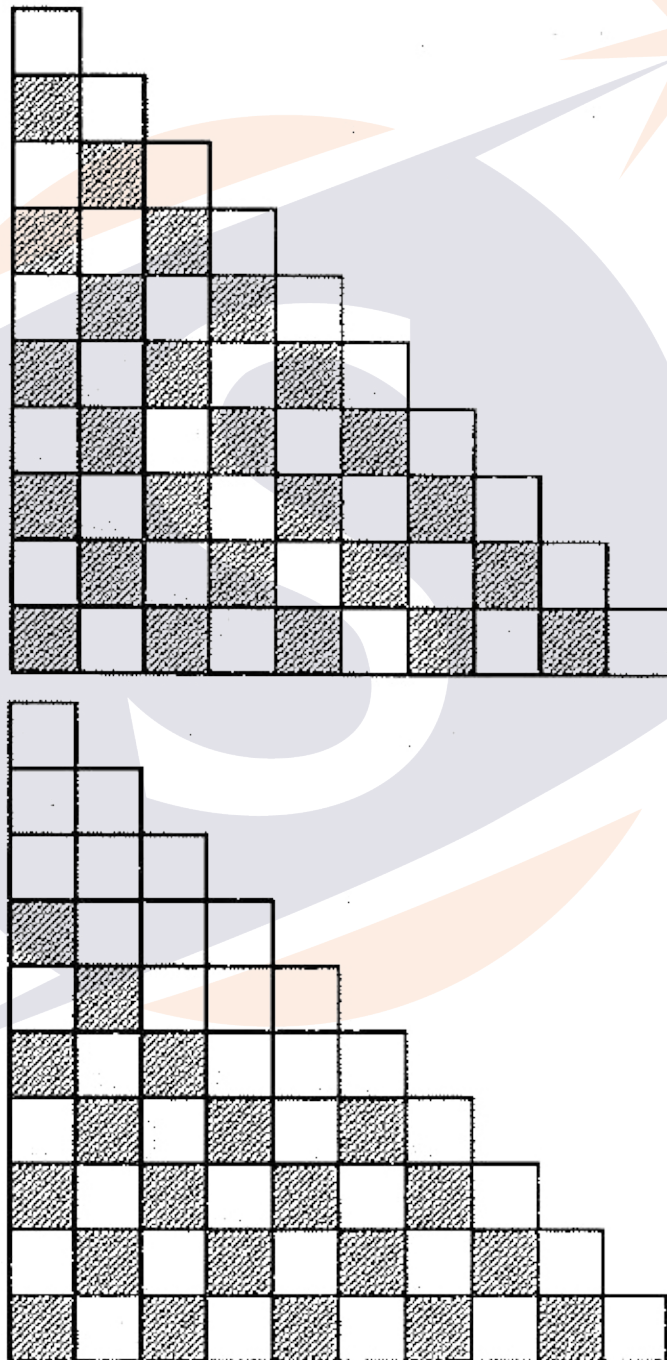
Nếu tổng quát hóa cho $a > n^2$, bất đẳng thức vẫn giữ tính đúng đắn dưới dạng:

$$\text{số ô kê} \geq a + n + 1,$$

từ đó cung cấp hệ quả quan trọng:

$$\text{số ô kê} \geq a + \sqrt{a}.$$

Giới hạn này cũng được khẳng định là chặt.



Ghi chú. Hệ quả từ chứng minh trên áp dụng cho bảng ô vuông hữu hạn: nếu trong một bảng ô vuông, dải hàng trên cùng và dải cột ngoài cùng bên phải không có ô nào được tô, và ta tô ngẫu nhiên a ô, thì số ô kê với các ô tô màu không nhỏ hơn $a + \sqrt{a}$.

Lời giải 2 (Sử dụng bất đẳng thức đại số). Ta tiến hành chứng minh trực tiếp cận:

$$\text{số ô kè} \geq a + \sqrt{a}.$$

Tô màu nền bảng theo mô hình bàn cờ vua (đen-trắng đan xen). Khảo sát cấu hình đơn sắc: nếu ta chỉ xét đến a ô màu trắng được tô, thì số lượng ô kè bao quanh chúng (các ô đen) đạt ít nhất $a + \sqrt{a}$ ô (tương tự áp dụng cho các ô đen được tô).

Gọi a_1, a_2, \dots, a_k là số lượng ô trắng đã tô trên các đường chéo trắng liên tiếp. Ta có:

$$a_1 + \dots + a_k = a.$$

Số ô kè (màu đen) chắc chắn không nhỏ hơn:

$$\begin{aligned} A := & \max\{0, a_1 - 1\} + \max\{a_1 + 1, a_2 - 1\} + \max\{a_2 + 1, a_3 - 1\} + \dots \\ & + \max\{a_{k-1} + 1, a_k - 1\} + a_k + 1. \end{aligned}$$

Giả sử điều ngược lại: $A < a + \sqrt{a}$. Cố định một chỉ số $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$ và đánh giá các biểu thức max, ta rút ra được:

$$k < \sqrt{a},$$

và với mọi $\ell = 1, \dots, k$,

$$a_\ell < \sqrt{a} - k + 2\ell - 1.$$

Cộng dồn các bất đẳng thức này dọc theo ℓ :

$$\begin{aligned} a = a_1 + \dots + a_k & < k(\sqrt{a} - k) + (1 + 3 + \dots + (2k - 1)) \\ & = k(\sqrt{a} - k) + k^2 = k\sqrt{a} < a. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn hiển nhiên $a < a$.

Vậy kết luận đối với cấu hình đơn sắc đã được chứng minh: số lượng ô kè $\geq a + \sqrt{a}$.

Trở lại với bài toán tổng quát. Giả sử tập hợp a ô được phân thành x ô trên nền đen và y ô trên nền trắng, với $x + y = a$. Ô kè của ô trắng là ô đen, và ngược lại. Do đó, tổng số ô kè không nhỏ hơn:

$$(x + \sqrt{x}) + (y + \sqrt{y}) \geq x + y + \sqrt{x + y} = a + \sqrt{a}.$$

56. **Đáp án:** Mệnh đề đã nêu là sai.

Xét tam thức bậc hai:

$$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Tam thức này vô nghiệm thực, bởi vì biệt thức Δ của nó có giá trị:

$$\Delta = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} < 0.$$

Dáng chú ý là, nếu ta thay thế bất kỳ hệ số nào trong ba hệ số của tam thức bằng chính giá trị biệt thức $\Delta = -\frac{1}{3}$, thì các hệ số của tam thức hoàn toàn không thay đổi. Vì vậy, từ tam thức ban đầu, qua bất kỳ số lần biến đổi nào, ta cũng không thể thu được một tam thức bậc hai có nghiệm thực.

57. Ta chứng minh mệnh đề đúng với điều kiện $a_1 \geq 4$. Khi đó, hiển nhiên $a_2 \geq 6$. Giả sử phản chứng rằng số lượng các số hạng trong dãy bằng gấp đôi chỉ số của nó là hữu hạn, và gọi số hạng cuối cùng có tính chất này là:

$$a_n = 2n.$$

Vì $n \neq 1$ và $n \neq 2$, ta có $n - 1 \geq 2$. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của $n - 1$. Theo tính chất, $n - 1$ nguyên tố cùng nhau với tất cả các số $2, 3, \dots, p - 1$.

Ta sẽ chứng minh chuỗi:

$$a_{n+k} = 2n + k \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \dots, p - 2,$$

và số hạng tiếp theo:

$$a_{n+p-1} = 2n + 2p - 2.$$

Sử dụng phương pháp quy nạp theo k . Bước cơ sở $k = 0$ là hiển nhiên. Giả sử đúng đến $k - 1$, ta tính:

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= a_{n+k-1} + \gcd(n+k, a_{n+k-1}) \\ &= 2n+k-1 + \gcd(n+k, 2n+k-1) \\ &= 2n+k-1 + \gcd(n+k, n-1) \\ &= 2n+k-1 + \gcd(k+1, n-1). \end{aligned}$$

Với $k = 1, 2, \dots, p - 2$, giá trị $\gcd(k+1, n-1)$ luôn bằng 1, do đó:

$$a_{n+k} = 2n + k.$$

Khi $k = p - 1$, ta có:

$$\gcd(p, n-1) = p,$$

suy ra:

$$a_{n+p-1} = 2n + p - 2 + p = 2n + 2p - 2 = 2(n + p - 1).$$

Như vậy, số hạng ở vị trí $n + p - 1$ lại bằng chính xác gấp đôi chỉ số của nó, mâu thuẫn với giả thiết "số hạng cuối cùng".

Phân tích ý tưởng (Gợi ý). Việc sử dụng "ước nguyên tố nhỏ nhất của $n - 1$ " bắt nguồn từ việc mô phỏng các bước kế tiếp sau $a_n = 2n$:

$$a_{n+1} = 2n + \gcd(2n, n+1) = 2n + \gcd(n-1, n+1),$$

giá trị này phụ thuộc vào việc $n + 1$ (hay $n - 1$) có chia hết cho 2 hay không. Nếu chia hết, ta nhận được ngay số hạng thỏa mãn; nếu không, ta tiếp tục:

$$a_{n+2} = 2n + 1 + \gcd(2n + 1, n + 2) = 2n + 1 + \gcd(n - 1, n + 2).$$

Câu hỏi về tính chia hết lần lượt chuyển sang các số $3, 4, 5, \dots$ đối với hằng số $n - 1$. Trọng số "có" đầu tiên xuất hiện chính xác tại ước nguyên tố nhỏ nhất của $n - 1$.

Với các điều kiện biên: nếu $a_1 = 2$, ta dễ dàng kiểm tra được:

$$a_n = n + 2 \quad (n \geq 2),$$

và chỉ có duy nhất một số hạng bằng hai lần chỉ số ($a_2 = 4$). Nếu $a_1 = 3$, ta có:

$$a_n = n + 2 \quad \text{với mọi } n,$$

và cũng chỉ có một số hạng như vậy.

Giả sử $a_1 \neq 3$, và có một số hạng cao gấp ba lần chỉ số. Ta sẽ chứng minh tồn tại vô hạn các số hạng mang tính chất này.

Giả sử ngược lại, gọi số hạng cuối cùng thỏa mãn là:

$$a_n = 3n.$$

Vì $a_1 \neq 3$ nên $n \geq 2$. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của $2n - 1$. Khi đó $2n - 1$ nguyên tố cùng nhau với $2, 3, \dots, p - 1$.

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh:

$$a_{n+k} = 3n + k \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \dots, \frac{p-3}{2},$$

và:

$$a_{n+\frac{p-1}{2}} = 3 \left(n + \frac{p-1}{2} \right).$$

Chứng minh quy nạp theo k :

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= a_{n+k-1} + \gcd(n+k, a_{n+k-1}) \\ &= 3n+k-1 + \gcd(n+k, 3n+k-1) \\ &= 3n+k-1 + \gcd(n+k, 2n-1) \\ &= 3n+k-1 + \gcd(2n+2k, 2n-1) \\ &= 3n+k-1 + \gcd(2k+1, 2n-1). \end{aligned}$$

Đối với $k = 1, 2, \dots, \frac{p-3}{2}$, giá trị gcd bằng 1, do đó:

$$a_{n+k} = 3n + k.$$

Tại $k = \frac{p-1}{2}$, giá trị gcd bằng p :

$$\gcd(p, 2n-1) = p,$$

kéo theo:

$$a_{n+\frac{p-1}{2}} = 3n + \frac{p-3}{2} + p = 3 \left(n + \frac{p-1}{2} \right).$$

Sự tồn tại của số hạng này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Nghiên cứu dãy các hiệu số:

$$b_n = a_{n+1} - a_n.$$

Từ chứng minh trên, nếu có $a_k = 3k$, thì với những $n \geq k$, dãy (b_n) sẽ lặp lại chu kỳ: gồm một dãy các số 1, tiếp theo là một số nguyên tố, rồi chu kỳ lặp lại.

Do đó, đối với một số giá trị a_1 , dãy b_n chỉ bao gồm số 1 và số nguyên tố. Ví dụ, điều này đúng với $a_1 \in \{4, 7, 8\}$. Nếu $a_1 = 4$, ta có $a_2 = 6 = 3 \cdot 2$, từ đó xác định được toàn bộ chuỗi b_n .

Vẫn còn câu hỏi mở: liệu với bất kỳ $a_1 \in \mathbb{N}$ nào, cũng tồn tại một ngưỡng N để với $n \geq N$, giá trị

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

luôn là 1 hoặc số nguyên tố hay không? Điều này hiện vẫn chưa được xác nhận.

Thực nghiệm tính toán cho mọi $a_1 < 10^6$ đều cho thấy xuất hiện số hạng gấp ba chỉ số; và hệ quả là dãy b_n bị giới hạn thành 1 hoặc số nguyên tố. Do đó, dãy số không bao giờ có thể tạo ra số hạng bằng đúng gấp đôi chỉ số.

58. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , và K là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A). Dễ thấy, K nằm trên đường phân giác AL . Hai tam giác AHL và KML đồng dạng, kết hợp với giả thiết $LH < LM$, ta có:

$$AL < KL.$$

Lời giải 1. Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng AK , khi đó P nằm trên tia KL . Tâm O nằm trong tam giác nhọn ABC , trong khi P nằm ngoài đường tròn, dẫn đến:

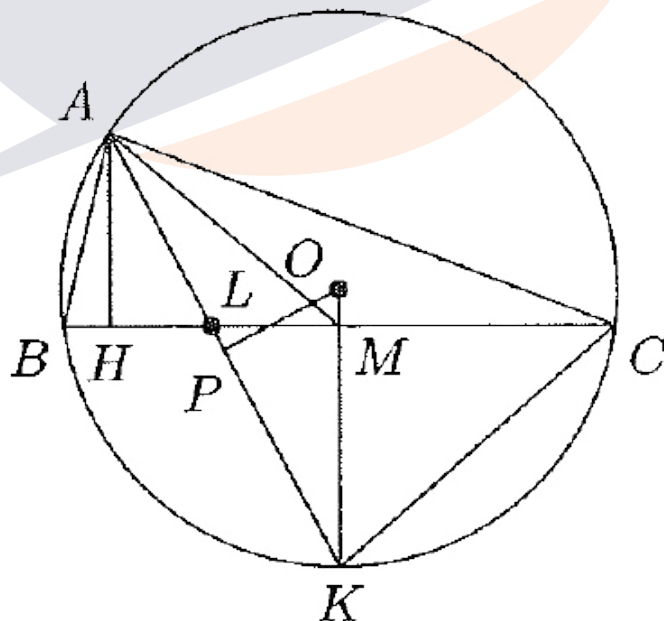
$$OM < OP.$$

Áp dụng định lý Pythagoras trong các tam giác vuông tương ứng:

$$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} > \sqrt{OA^2 - OP^2} = AP > AL.$$

Do đó:

$$BC = 2BM > 2AL.$$



Lời giải 2. Bài toán quy về việc chứng minh:

$$AK < BC.$$

Ta so sánh hai góc nhọn $\angle BAC$ và $\angle ACK$ chắn các dây cung tương ứng. Ta có:

$$\angle ACK = \angle ACB + \angle BCK,$$

đồng thời:

$$\angle BAC = 2\angle BAK = 2\angle BCK.$$

Bài toán trở thành so sánh $\angle BCK$ và $\angle ACB$.

Áp dụng hàm số tang (tangent) cho hai góc này:

$$\tan \angle BCK = \frac{MK}{MC} > \frac{AH}{HC} = \tan \angle ACB.$$

Vì hàm tang đồng biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$, suy ra $\angle BCK > \angle ACB$, từ đó $\angle ACK > \angle BAC$, kéo theo $AK < BC$.

Lời giải 3. Sử dụng hệ thức lượng trong đường tròn:

$$AL^2 < AL \cdot LK = BL \cdot LC \leq \frac{BC^2}{4},$$

suy ra trực tiếp:

$$BC > 2AL.$$

59. Giả sử $n = 2000$. Thực tế, trong quá trình chứng minh ta chỉ sử dụng tính chẵn của n , nên bài toán đúng cho mọi số chẵn n .

Tổng các số từ 1 đến n^2 là:

$$\frac{1}{2}n^2(n^2 + 1).$$

Nếu chia thành n phần bằng nhau, mỗi phần có tổng là:

$$s = \frac{1}{2}n(n^2 + 1).$$

Ghép các số từ 1 đến n^2 thành các cặp có tổng bằng $n^2 + 1$. Giả sử trong tập hợp các số màu đỏ, có k cặp mà cả hai số đều màu đỏ, và $n - 2k$ cặp chỉ chứa đúng một số màu đỏ.

Người thứ hai (Petya) có thể thiết lập chiến lược như sau: tô màu xanh cho tất cả các số còn lại trong $n - 2k$ cặp hỗn hợp đó, đồng thời chọn thêm k cặp chưa được tô màu và tô xanh cả hai số trong mỗi cặp. Khi đó, có tổng cộng n cặp chứa cả số màu đỏ và màu xanh, đảm bảo tổng của các số màu đỏ và màu xanh bằng:

$$n(n^2 + 1) = 2s.$$

Vì tổng của các số màu đỏ đã cho là s , nên tổng của các số màu xanh cũng phải bằng s .

Quá trình này được lặp lại tương tự cho các màu sắc còn lại: mỗi màu sẽ chọn $\frac{n}{2}$ cặp chưa có chủ và tô đồng bộ cả hai phần tử. Tổng của mỗi màu luôn được giữ ở mức s .

60. **Lời giải 1.** Áp dụng bất đẳng thức đại số cơ bản:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca).$$

Bất đẳng thức này dễ dàng được chứng minh thông qua phép biến đổi tương đương thành tổng của ba bình phương:

$$\frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - a)^2 \geq 0.$$

Áp dụng vào giả thiết của đề bài:

$$\sqrt{xyz} = xy + yz + zx,$$

bình phương hai vế, ta được:

$$xyz = (xy + yz + zx)^2 \geq 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy) = 3xyz(x + y + z).$$

Vì x, y, z là các số dương, ta có thể chia cả hai vế cho đại lượng $xyz > 0$ để thu được:

$$x + y + z \leq \frac{1}{3}.$$

Lời giải 2 (Phương pháp pqr). Sử dụng phép đổi biến:

$$a = \frac{1}{x}, \quad b = \frac{1}{y}, \quad c = \frac{1}{z}.$$

Giả thiết của bài toán trở thành $a + b + c = \sqrt{abc}$, và cần chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3}.$$

Với các biến dương a, b, c , đặt:

$$a + b + c = p, \quad abc = r.$$

Ta sẽ chứng minh biểu thức:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc}$$

đạt giá trị lớn nhất khi có hai biến bằng nhau.

Tập hợp các điểm (a, b, c) thỏa mãn $a, b, c > 0$, $a + b + c = p$, $abc = r$ tạo thành một không gian compact, do đó hàm số liên tục trên miền này chắc chắn đạt cực đại. Giả sử điểm cực đại đạt tại tọa độ (a_0, b_0, c_0) , không mất tính tổng quát ta sắp xếp:

$$c_0 \leq b_0 \leq a_0.$$

Ta sẽ chứng minh $a_0 = b_0$ hoặc $b_0 = c_0$.

Giả sử a là số lớn nhất và khác biệt với các số còn lại. Từ hệ thức:

$$b + c = p - a, \quad bc = \frac{r}{a},$$

ta biểu diễn hàm cần tối ưu:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{b+c}{bc} = \frac{1}{a} + \frac{p-a}{r/a} = \frac{1}{a} + \frac{ap-a^2}{r}.$$

Gọi về phải là $f(a)$, ta lấy đạo hàm:

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{1}{a^2} + \frac{p-2a}{r} = -\frac{1}{a^2} + \frac{(a+b+c)-2a}{abc} \\ &= \frac{ab+ac-a^2-bc}{a^2bc} = -\frac{(a-b)(a-c)}{a^2bc} < 0. \end{aligned}$$

Đạo hàm âm chứng tỏ khi a giảm, biểu thức sẽ tăng lên. Vì vậy, cực đại đạt được khi a nhận giá trị nhỏ nhất có thể.

Nếu duy trì $c < b < a$, hai biến b, c là nghiệm phân biệt của phương trình:

$$t^2 - (p-a)t + \frac{r}{a} = 0.$$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là biệt thức $\Delta > 0$:

$$d = (p-a)^2 - \frac{4r}{a} > 0.$$

Khi đó, ta có thể giảm a đi một lượng nhỏ sao cho d vẫn dương, điều này làm tăng giá trị biểu thức và mâu thuẫn với giả thiết điểm đang xét là cực đại. Vậy trạng thái $c_0 < b_0 < a_0$ không thể xảy ra, bắt buộc $c_0 = b_0$ hoặc $b_0 = a_0$.

Ta có thể khóa bài toán vào trường hợp hai biến bằng nhau. Đặt $y = z$, hệ thức giả thiết trở thành:

$$2xy + y^2 = \sqrt{xy^2} = y\sqrt{x},$$

giả ước y , ta có:

$$y = \sqrt{x} - 2x.$$

Thay vào biểu thức tổng:

$$x + y + z = x + 2(\sqrt{x} - 2x) = 2\sqrt{x} - 3x \leq \frac{1}{3},$$

bất đẳng thức này tương đương với:

$$3x + \frac{1}{3} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{1}{3}} = 2\sqrt{x},$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

61. Dựng điểm E sao cho tứ giác $AMBE$ là hình bình hành. Từ đó, tứ giác $MCBE$ cũng trở thành hình bình hành.

Ta thiết lập được các hệ thức góc:

$$\angle MHC = \angle MCH = \angle MEB,$$

chứng tỏ tứ giác $EBHM$ là tứ giác nội tiếp.

còn lại (trong đó chắc chắn có một thành phần biên mới) sẽ là tập con thực sự của U , mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của U khi chọn Z .

63. Quy trình phân bố: chọn ngẫu nhiên k học sinh từ câu lạc bộ thứ nhất và xếp vào k phòng khác nhau. Lặp lại thao tác này cho các câu lạc bộ tiếp theo.

Giả sử trường có N câu lạc bộ, mỗi câu lạc bộ có mk học sinh. Ta cần chứng minh luôn tồn tại cách xếp toàn bộ học sinh vào k phòng sao cho mỗi phòng đều có đại diện của mọi câu lạc bộ. Ta sẽ chứng minh điều này khả thi khi $N \approx e^{m/2}$.

Mở rộng số phòng thành $k + a$ (tham số a sẽ được điều chỉnh sau). Phân bố mỗi học sinh một cách ngẫu nhiên và đều đặn vào các phòng. Ta định nghĩa một phòng là *không đủ đại diện* nếu thiếu học sinh từ ít nhất một câu lạc bộ.

Ta muốn số lượng phòng "không đủ đại diện" không vượt quá a . Nếu điều này xảy ra, sẽ có ít nhất k phòng chứa đủ thành viên của tất cả các câu lạc bộ, thoả mãn yêu cầu.

Xác suất để điều này xảy ra lớn hơn 0 nếu kỳ vọng E của số phòng không đủ đại diện nhỏ hơn $a + 1$. Kỳ vọng được tính bởi:

$$E = (k + a) \cdot \mathbb{P}(\text{một phòng chỉ định không đủ đại diện}),$$

với đánh giá xác suất theo bất đẳng thức Boole:

$$\mathbb{P}(\text{phòng không đủ đại diện}) \leq N \left(1 - \frac{1}{k + a}\right)^{km}.$$

Vì vậy, nếu ta thoả mãn bất đẳng thức:

$$N(k + a) \left(1 - \frac{1}{k + a}\right)^{km} < a + 1,$$

thì chắc chắn tồn tại cách phân bố hợp lệ.

Ngay cả khi đặt $a = k$, ta đã có một chặn trên phát triển theo hàm mũ của m . Bằng cách tối ưu hóa, ta nhận được giới hạn xấp xỉ

$$\frac{e^{m-1}}{m}$$

khi thiết lập $a \approx \frac{k}{m-1}$.

64. Gọi M là trung điểm cạnh AB , K là điểm chính giữa cung PQ nằm trên đoạn CM , và B' là điểm đối xứng của B qua trung tuyến CM .

Sử dụng phương pháp phản chứng, giả sử mệnh đề sai. Khi đó B' không trùng với A ($B' \neq A$), đường thẳng AB' song song với CM , và dẫn đến các hệ thức góc:

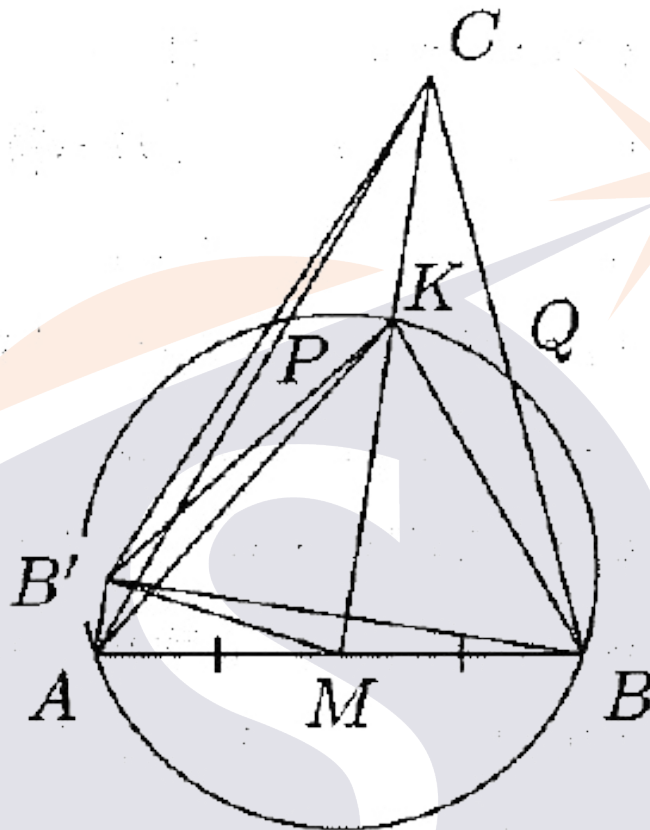
$$\angle CAK = \angle PAK = \angle QBK = \angle CB'K.$$

Hệ quả là CK và AB' trở thành hai đáy của một hình thang nội tiếp đường tròn. Mọi hình thang nội tiếp đều là hình thang cân, do đó tứ giác $AB'CK$ là hình thang cân.

Tính chất của hình thang cân cho ta:

$$AK = CB' = CB, \quad AC = KB' = KB.$$

Suy ra hai tam giác AKB và BCA bằng nhau theo trường hợp cạnh-cạnh-cạnh.



Mâu thuẫn xảy ra vì một tam giác không thể chứa một tam giác bằng nó nằm hoàn toàn bên trong nó. Vậy giả thiết phản chứng sai.

65. **Đáp án:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 2.

Biến đổi cơ bản của hàm lượng giác:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{2 \cos^2 x}{\sin 2x} \geq 2 \cos^2 x.$$

Áp dụng cho bốn biến số:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} t \geq 2(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t) = 2.$$

Vậy tổng luôn không nhỏ hơn 2. Dấu bằng xảy ra khi:

$$x = y = \frac{\pi}{4}, \quad z = t = \frac{\pi}{2},$$

thỏa mãn giả thiết:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = 1,$$

và tính giá trị biểu thức:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} t = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2.$$

Giá trị cực tiểu đạt được là 2.

66. Giả sử phản chứng mệnh đề sai. Khi đó, ta có thể chia dãy số tự nhiên thành các đoạn liên tiếp độ dài 199 số; ngoại trừ một vài đoạn đầu tiên, mọi đoạn về sau đều phải chứa ít nhất một số gần bình phương.

Tích lũy tính chất này trên tập các số từ 1 đến n^2 , số lượng số gần bình phương sẽ không nhỏ hơn:

$$\frac{n^2}{199} - c,$$

với c là một hằng số.

Tuy nhiên, số gần bình phương có dạng ab với các điều kiện:

$$a \leq n, \quad b \in \left[a, a + \frac{a}{100} \right].$$

Đếm trực tiếp, số lượng các số này không vượt quá:

$$\sum_{a=1}^n \left(\frac{a}{100} + 1 \right) = n + \frac{n(n+1)}{200} < \frac{n^2}{199} - c$$

với n đủ lớn. Mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai.

67. Dựa vào tính chất hệ thức lượng của đường thẳng vuông góc, ta có:

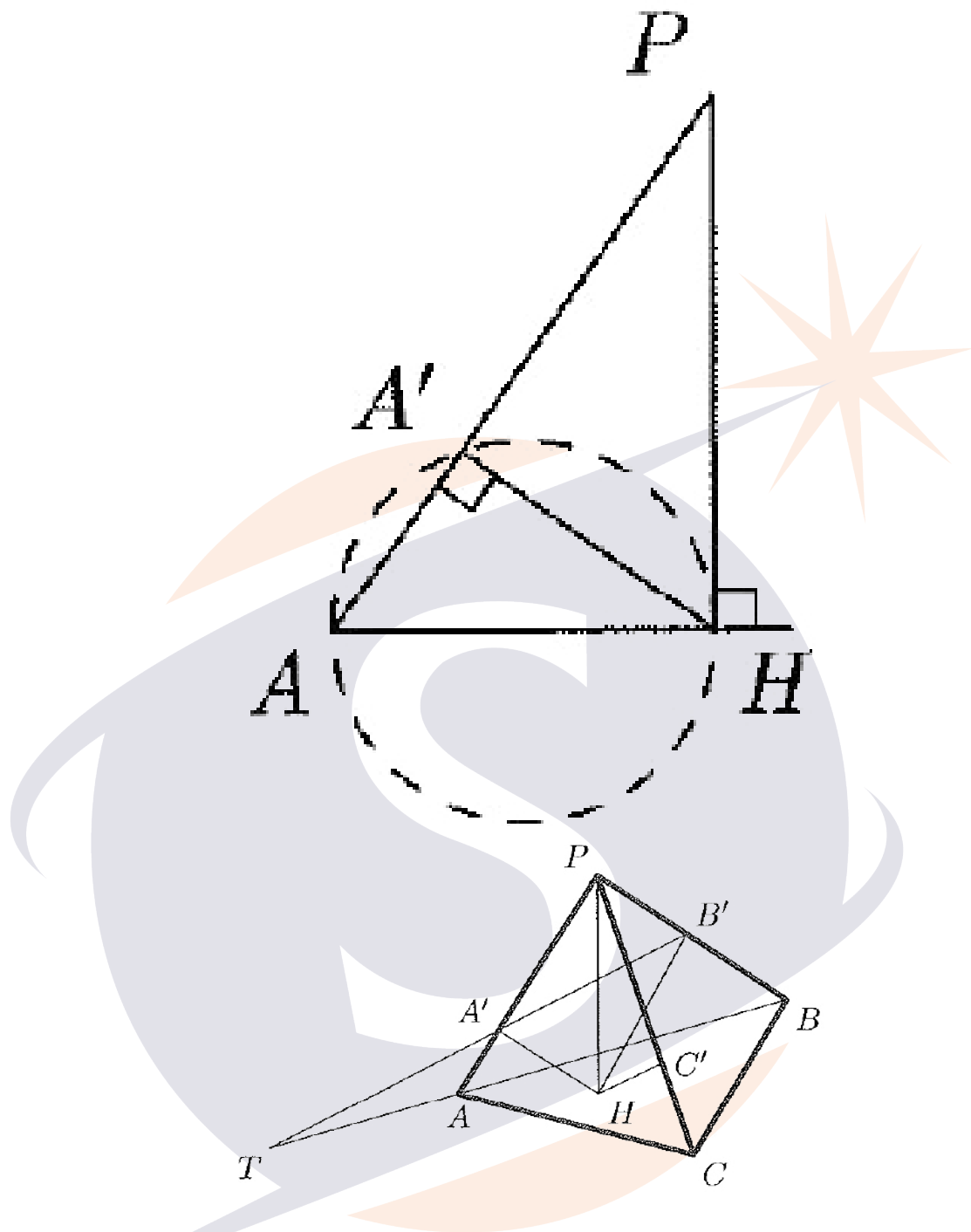
$$PA \cdot PA' = PH^2 = PB \cdot PB',$$

suy ra bốn điểm A, B, A', B' đồng viên (cùng nằm trên một đường tròn).

Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng AB và $A'B'$. Ta thiết lập phương tích:

$$TA \cdot TB = TA' \cdot TB' = TH^2,$$

do TH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PH , còn $TB'A'$ là một cát tuyến.



Điều này chứng tỏ T nằm trên trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và "đường tròn điểm" tâm H . Lập luận tương tự, các điểm giao cắt:

$$BC \cap B'C', \quad AC \cap A'C'$$

cũng nằm trên trục đẳng phương này. Do đó, giao tuyến l của hai mặt phẳng

$$l = ABC \cap A'B'C'$$

chính là trục đẳng phương. Theo tính chất cơ bản, trục đẳng phương vuông góc với đường nối tâm, suy ra:

$$l \perp OH.$$

68. Đồ thị biểu diễn các mối quan hệ quen biết này là một đồ thị dây (chordal graph) - tức là mọi chu trình có chiều dài từ 4 đỉnh trở lên đều có ít nhất một dây cung. Ta cần chứng minh trên mọi đồ thị dây G , giá trị của hàm số:

$$f(G) := c_1 - c_2 + c_3 - \dots$$

(trong đó c_i là số lượng các đồ thị đầy đủ - clique gồm i đỉnh) bằng đúng số lượng thành phần liên thông $k(G)$.

Lời giải 1. Giả sử mệnh đề sai. Chọn đồ thị G là phản ví dụ có số đỉnh ít nhất.

Đồ thị G hiển nhiên có nhiều hơn 1 đỉnh và liên thông. Xóa một đỉnh v bất kỳ, phần còn lại $G \setminus v$ phân rã thành các thành phần liên thông G_1, \dots, G_k . Gọi H_1, \dots, H_k là các đồ thị con thuộc G_1, \dots, G_k mà các đỉnh của nó kề với v .

Dựa trên định nghĩa của hàm f , ta có:

$$f(G) = 1 + \sum_{i=1}^k f(G_i) - \sum_{i=1}^k f(H_i), \tag{*}$$

trong đó:

- Số hạng 1 tương ứng với clique $\{v\}$.
- Tổng $f(G_i)$ thống kê các clique không chứa v .
- Tổng $-f(H_i)$ thống kê các clique chứa v (khi gộp thêm v , kích thước của clique tăng 1, làm đổi dấu của số hạng trong tổng đan dấu).

Vì G là phản ví dụ nhỏ nhất, mệnh đề đúng với các đồ thị con, suy ra $f(G_i) = 1$ và $f(H_i) = k(H_i)$. Ta sẽ chứng minh $k(H_i) = 1$ với mọi i .

Giả sử tồn tại một H_i không liên thông, phân hoạch thành hai tập V^- và V^+ không có cạnh nối. Xét đường đi ngắn nhất giữa một đỉnh $x \in V^-$ và $y \in V^+$ đi qua G_i . Khi đó chu trình:

$$v x \dots y v$$

có độ dài ít nhất là 4 nhưng không có dây cung, mâu thuẫn với tính chất của đồ thị dây.

Vậy $f(H_i) = f(G_i) = 1$ với mọi i . Thay vào phương trình (*), ta có:

$$f(G) = 1 = k(G),$$

mâu thuẫn với việc G là phản ví dụ.

Lời giải 2. Xóa một đỉnh khỏi đồ thị dây vẫn sinh ra một đồ thị dây. Gọi một đỉnh là *đỉnh đơn giản* (simplicial vertex) nếu tập hợp các đỉnh kề với nó tạo thành một đồ thị đầy đủ (clique).

Bổ đề. Mọi đồ thị dây có từ hai đỉnh trở lên đều chứa ít nhất hai đỉnh đơn giản.

Chứng minh bổ đề. Giả sử phản chứng, chọn đồ thị G là phản ví dụ có số đỉnh nhỏ nhất.

Không có đỉnh nào kề với tất cả các đỉnh còn lại (nếu có, việc xóa nó sẽ cho ta một phản ví dụ nhỏ hơn). Lấy một đỉnh không đơn giản v . Gọi N là tập hợp các đỉnh kề v , và $H = G \setminus (N \cup v)$.

Nếu có hai đỉnh $u_1, u_2 \in N$ không kề nhau, chúng cũng không thể được kết nối bởi một đường đi hoàn toàn thuộc H ; nếu có, đường đi đó cùng với v sẽ tạo thành chu trình không có dây cung.

Gọi H_1 là một thành phần liên thông của H , và $N_1 \subset N$ là tập các đỉnh kề với H_1 . Dựa vào lập luận trên, N_1 phải là một đồ thị đầy đủ, suy ra $N_1 \neq N$.

Xét đồ thị dây con sinh bởi v, N_1, H_1 . Vì nó nhỏ hơn G , nó chứa một đỉnh đơn giản $w \neq v$. Đỉnh w không thể thuộc N_1 (vì các đỉnh trong N_1 kề với cả v và H_1 , không thỏa mãn tính đơn giản), nên $w \in H_1$. Đỉnh w này cũng là đỉnh đơn giản trong G . Lặp lại quá trình xuất phát từ một láng giềng của w , ta tìm được đỉnh đơn giản thứ hai. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán chính, áp dụng phương pháp quy nạp theo số lượng đỉnh. Với một đỉnh đơn giản v , quá trình chuyển từ $G \setminus v$ sang G rất rõ ràng:

- Nếu v là đỉnh cô lập, hàm f tăng thêm 1 đơn vị, tương tự với số lượng thành phần liên thông.
- Nếu v có đỉnh kề, cả giá trị hàm f và số thành phần liên thông đều giữ nguyên.

Từ đó, mệnh đề được chứng minh hoàn toàn.

69. **Lời giải 1.** Xét một véc-tơ $\vec{v} \in V_2 \setminus V_1$. Do tính lồi, \vec{v} nằm trong hoặc trên biên của một tam giác tạo bởi ba đỉnh $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_1$, nên ta có biểu diễn:

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c},$$

với các hệ số α, β, γ là các số hữu tỉ không âm và thỏa mãn:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Gọi $N = N(\vec{v})$ là mẫu số chung của α, β, γ . Khi đó N bước nhảy theo véc-tơ \vec{v} hoàn toàn có thể được thay thế bằng:

$$\alpha N \text{ bước theo } \vec{a}, \quad \beta N \text{ bước theo } \vec{b}, \quad \gamma N \text{ bước theo } \vec{c}.$$

Nhờ quy tắc này, ta có thể giới hạn chiến lược di chuyển của châu chấu thứ hai: đối với mỗi véc-tơ $\vec{v} \in V_2 \setminus V_1$, số lần sử dụng luôn nhỏ hơn $N(\vec{v})$.

Giả sử phản chứng mệnh đề của bài toán là sai. Khi đó tồn tại một dãy tọa độ x_i sao cho chênh lệch số bước:

$$f(x_i) - g(x_i) \rightarrow \infty,$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là số bước tối thiểu để châu chấu thứ nhất và thứ hai đi tới x .

Bằng cách trích xuất dãy con, ta có thể cố định tổ hợp các bước nhảy ngoài V_1 của châu chấu thứ hai (vì số lượng khả năng bị giới hạn). Khai thác dãy con sâu hơn, ta giả định số lượng bước nhảy $n_i(\vec{a})$ dọc theo mỗi $\vec{a} \in V_1$ hoặc là cố định, hoặc tăng dần đến vô hạn.

Khi $i > j$, điểm x_i hoàn toàn có thể đạt được từ điểm x_j thông qua một chuỗi các bước nhảy thuần túy thuộc V_1 , với tổng số bước là:

$$g(x_i) - g(x_j).$$

Điều này cho phép châu chấu thứ nhất có thể đi đến x_i với tổng số bước:

$$f(x_j) + g(x_i) - g(x_j) = g(x_i) + c,$$

kết quả này mâu thuẫn với giả định $f(x_i) - g(x_i) \rightarrow \infty$.

Lời giải 2. Ta sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề. Gọi K là tập hợp các bộ gồm m số nguyên không âm:

$$(k_1, k_2, \dots, k_m).$$

Giả sử đối với mọi cặp:

$$(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)$$

luôn tồn tại hai chỉ số i, j sao cho:

$$a_i < b_i \quad \text{và} \quad a_j > b_j.$$

Khi đó tập hợp K là hữu hạn.

Áp dụng vào bài toán chính. Tồn tại hằng số giới hạn $M = \max N(\vec{v})$. Bất kỳ lộ trình di chuyển nào của châu chấu thứ hai đều có thể tái cấu trúc (không làm thay đổi số bước và điểm đến) sao cho số lần sử dụng mỗi véc-tơ ngoài V_1 luôn nhỏ hơn M .

Gọi một điểm là *điểm chấp nhận được* nếu cả hai châu chấu đều có thể tới đó. Với mỗi điểm chấp nhận được D , quá trình di chuyển của châu chấu thứ hai bao gồm các bước nhảy ngoài V_1 (có giới hạn) để tới một trạm trung chuyển E , sau đó từ E tới D chỉ bằng các bước nhảy trong V_1 . Tập hợp tất cả các trạm trung chuyển E này là một tập hữu hạn W .

Với mỗi trạm $E \in W$, theo dõi mọi lộ trình của châu chấu thứ nhất xuất phát từ E . Tại mỗi điểm chấp nhận được A mà nó đi qua, ghi nhận số lượng mỗi véc-tơ trong V_1 đã được sử dụng. Nếu một lộ trình vượt qua một lộ trình khác (sử dụng nhiều hơn hoặc bằng số véc-tơ đối với mọi loại), ta loại bỏ lộ trình thừa. Tập hợp các điểm A không bị loại bỏ, theo Bổ đề, tạo thành một tập hữu hạn U_E . Tập hợp

$$U = \bigcup_{E \in W} U_E$$

cũng là một tập hữu hạn.

Giờ đây, đối với mọi lộ trình của châu chấu thứ hai đáp xuống điểm A , ta xét trạm trung chuyển E . Châu chấu thứ nhất có thể mô phỏng lộ trình bằng cách tiến tới một điểm đánh dấu $C \in U_E$ trước, sau đó lặp lại chính xác các bước nhảy thuộc V_1 mà châu chấu thứ hai đã đi. Quá trình này đảm bảo sai lệch số bước của hai châu chấu bị chặn trên bởi một hằng số c (là số bước tối đa để tới một điểm trong U).

Chứng minh bổ đề. Áp dụng quy nạp toán học theo tham số m . Giả sử tập K là vô hạn. Với một bộ cố định $s \in K$, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại vô hạn các bộ so sánh được với s thông qua cùng một cặp chỉ số i, j . Đối với các bộ này, do $a_i < s_i$, tọa độ i nhận số lượng giá trị giới hạn. Do đó, tồn tại một tập vô hạn các bộ có cùng giá trị tại tọa độ i . Bỏ qua tọa độ i , ta thu

được một tập vô hạn các bộ kích thước $m - 1$ vẫn bảo toàn tính chất ban đầu, mâu thuẫn với giả thiết quy nạp.

Ghi chú. Nếu đa giác đối xứng tâm qua O , điểm E luôn là điểm chấp nhận được; do đó hai tập U và W trùng nhau và phép chứng minh sẽ đơn giản hơn đáng kể.

70. Ta tiến hành chứng minh cho một mệnh đề tổng quát hơn: lấy tổng trên mọi hoán vị (z_1, \dots, z_n) của các biến số dương v_1, \dots, v_n , biểu thức:

$$\frac{z_1}{z_1} \cdot \frac{z_2}{z_1 + z_2} \cdot \dots \cdot \frac{z_n}{z_1 + \dots + z_n}$$

luôn có giá trị bằng 1.

Lời giải 1 (Quy nạp toán học). Sử dụng phương pháp quy nạp theo tham số n . Bước cơ sở $n = 1$ là hiển nhiên.

Bước quy nạp: Cố định giá trị của z_n . Theo giả thiết quy nạp, tổng các biểu thức ứng với tất cả các hoán vị của $n - 1$ biến còn lại bằng:

$$\frac{z_n}{S}, \quad \text{với } S = z_1 + \dots + z_n = v_1 + \dots + v_n.$$

Lấy tổng qua tất cả n khả năng lựa chọn của z_n , ta thu được kết quả bằng 1.

Lời giải 2 (Mô hình xác suất). Giả sử có n que với độ dài tương ứng là v_1, v_2, \dots, v_n . Xếp các que này nối tiếp nhau thành một đoạn thẳng dài và chọn ngẫu nhiên một điểm phân bố đều trên đoạn thẳng đó. Que chứa điểm được chọn sẽ bị lấy đi; các que còn lại được dồn sát lại thành một đoạn mới và lặp lại quá trình tương tự.

Xác suất để thứ tự các que được lấy ra là chuỗi:

$$\pi_n, \pi_{n-1}, \dots, \pi_1$$

chính xác được tính bởi biểu thức:

$$\prod_{j=1}^n \frac{v_{\pi_j}}{v_{\pi(1)} + v_{\pi(2)} + \dots + v_{\pi(j)}}.$$

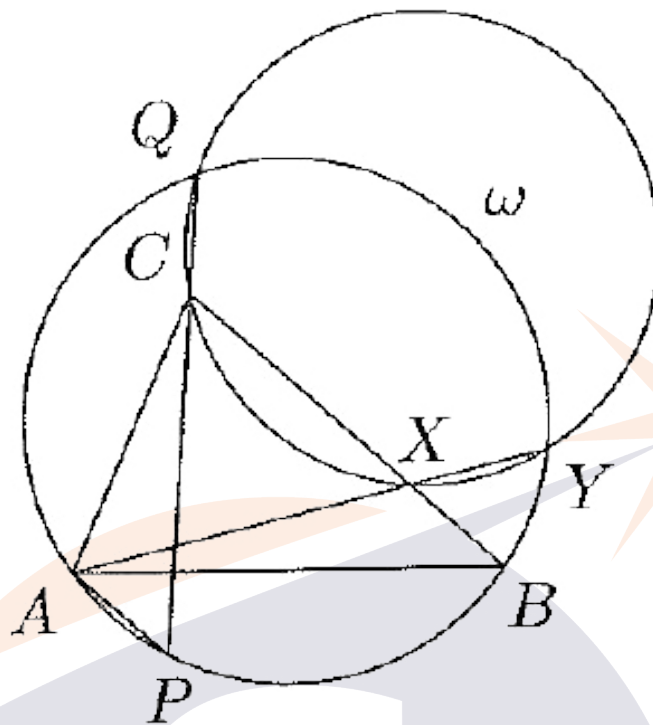
Do không gian mẫu phủ kín toàn bộ các hoán vị, tổng các xác suất này luôn bằng 1.

71. Đặt P là giao điểm thứ hai của đường thẳng đi qua A song song với CB và đường tròn ω . Gọi Q là giao điểm thứ hai của tia PC cắt ω .

Ta sẽ chứng minh bốn điểm C, Q, X, Y cùng nằm trên một đường tròn. Dựa trên tính chất của góc định hướng:

$$\begin{aligned} \angle(CX, XY) &= \angle(AP, AY) \\ &= \angle(QP, QY) = \angle(CQ, QY), \end{aligned}$$

đẳng thức này chứng minh trực tiếp rằng tứ giác C, Q, X, Y nội tiếp. Do Q không phụ thuộc vào cách chọn X, Y chính là điểm cố định cần tìm.



Phân tích mở rộng. Ta có thể xác định Q bằng cách khảo sát trạng thái cực hạn. Cho điểm X dịch chuyển về phía B . Khi X trùng với B , vị trí giới hạn của đường tròn ngoại tiếp (CXY) là đường tròn đi qua C, B và tiếp xúc với AB .

Tiếp tục, gọi C' là giao điểm thứ hai của tia BC với ω . Cho X dịch chuyển về C' . Khi X trùng với C' , đường tròn (CXY) có vị trí giới hạn là đường tròn đi qua C', C và tiếp xúc với AC' . Giao điểm Q chính là giao điểm của hai đường tròn giới hạn này.

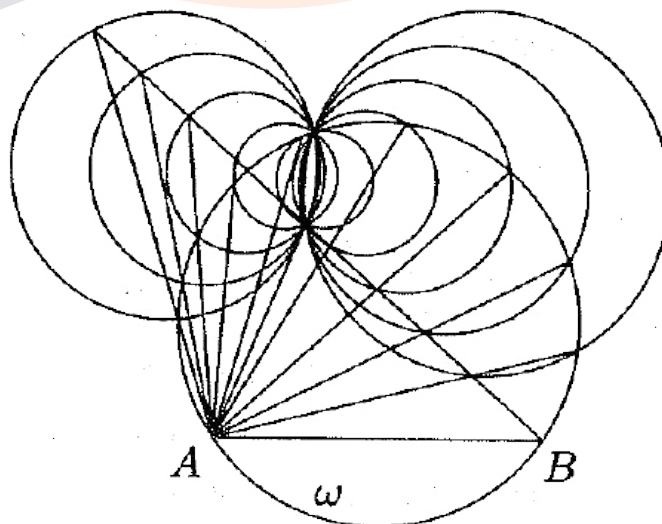
Quan sát thêm cấu trúc hình học:

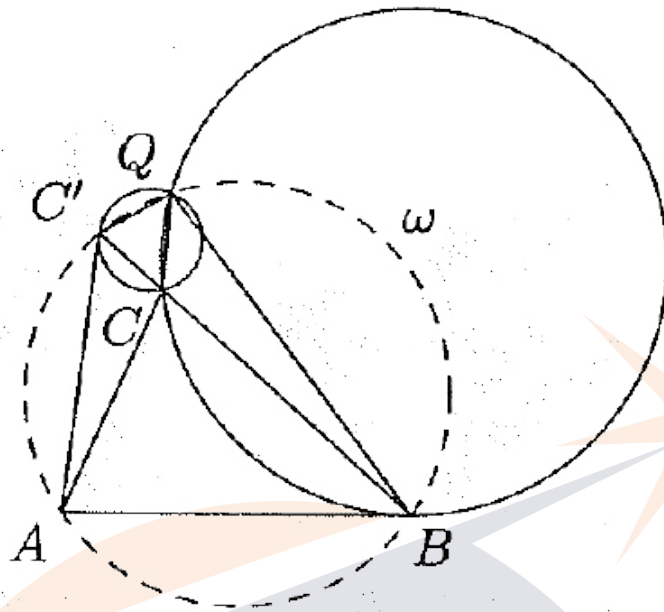
$$\angle C'QC = \angle AC'C, \quad \angle CQB = \angle ABC,$$

dẫn đến:

$$\angle C'QB = \angle C'AB,$$

điều này khẳng định Q cũng thuộc đường tròn ω .





72. Đáp án:

$$n = 15.$$

Kiểm tra nghiệm tầm thường $x = 1, y = n$, ta suy ra:

$$n = 2^k - 1$$

với điều kiện $k \in \mathbb{N}$.

Giả sử phân tích thành:

$$n = ab, \quad a \geq b > 2,$$

và tổng của chúng có dạng:

$$a + b = 2^t$$

với tham số $t \in \mathbb{N}$. Logic yêu cầu $k > t$. Thiết lập hệ phương trình:

$$2^k + 2^t = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1),$$

$$2^k - 2^t = ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1).$$

Nhân hai phương trình với nhau, ta thu được biểu thức:

$$(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)$$

chia hết cho 2^{2t} .

Trong hai cặp nhân tử $(b - 1, b + 1)$, số lượng nhân tử 2 của một số chỉ bằng 1, trong số còn lại không vượt quá $t - 1$; quy luật tương tự áp dụng cho $(a - 1, a + 1)$. Để tích này chia hết cho 2^{2t} , số lượng nhân tử 2 của cả hai thành phần trội phải đạt chính xác $t - 1$. Hệ quả là:

$$b = 2^{t-1} - 1, \quad a = 2^{t-1} + 1$$

(dựa vào các ràng buộc $a \geq b$ và tổng $a + b = 2^t$).

Trạng thái này ấn định $k = 2t - 2$, dẫn đến $2^k - 1$ phải chia hết cho 3. Sự lựa chọn duy nhất cho b là:

$$b = 3.$$

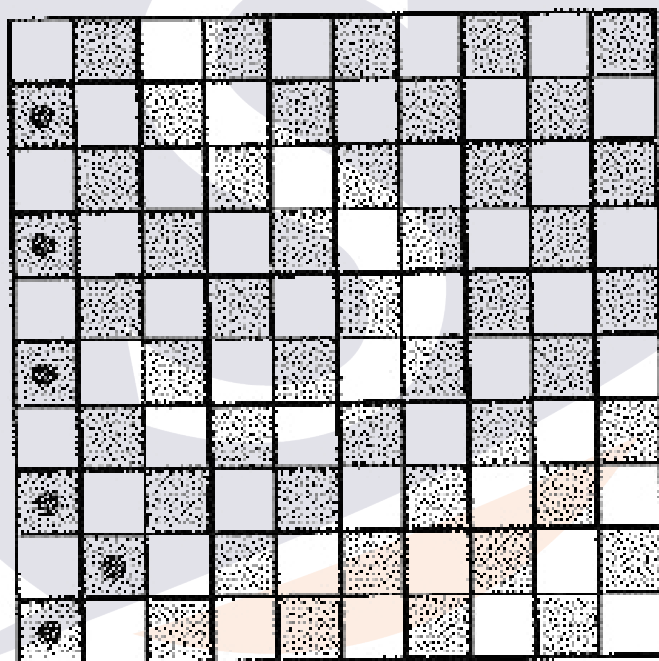
Từ đó xác định $a = 5$, và thu được nghiệm duy nhất:

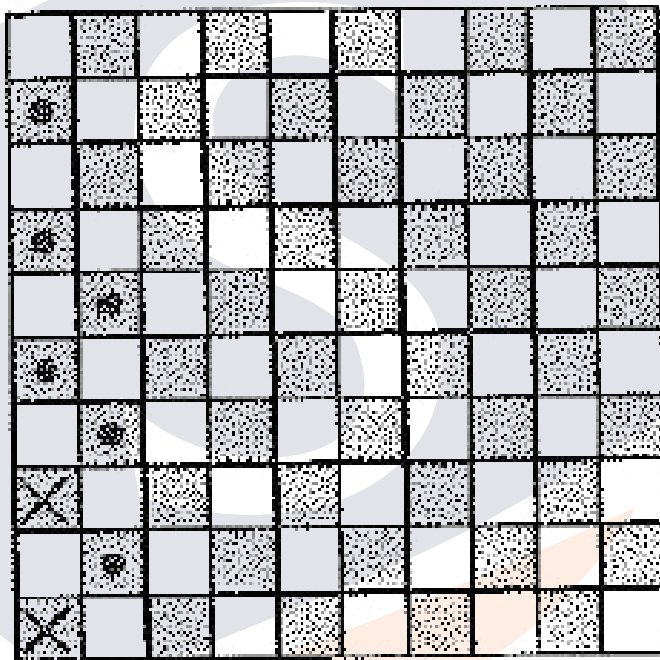
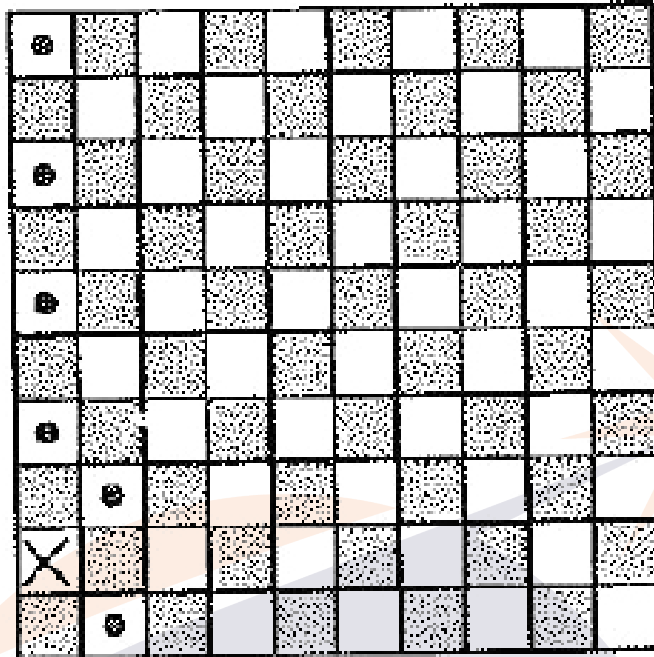
$$n = ab = 15.$$

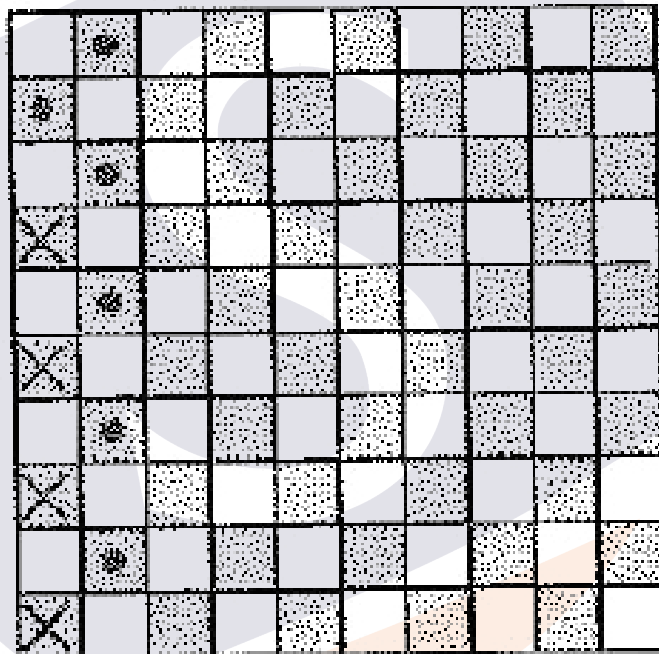
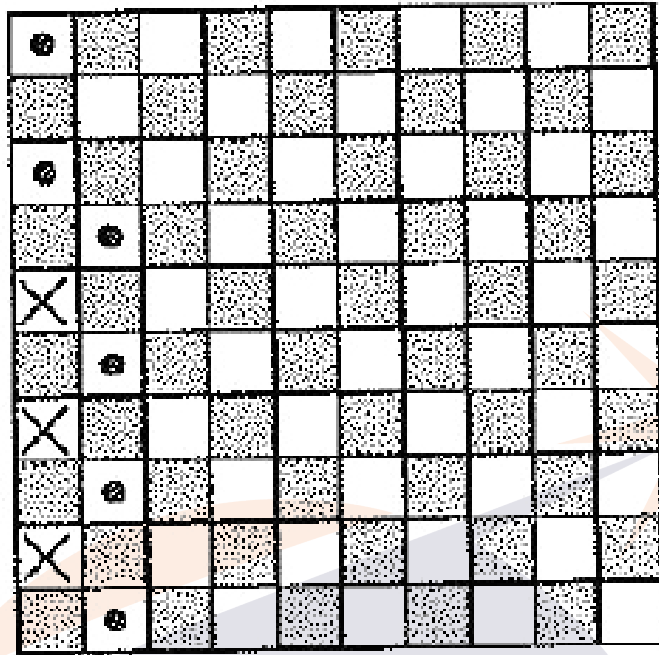
73. **Đáp án:** Có, pháo binh chắc chắn có chiến lược bắn trúng được xe tăng.

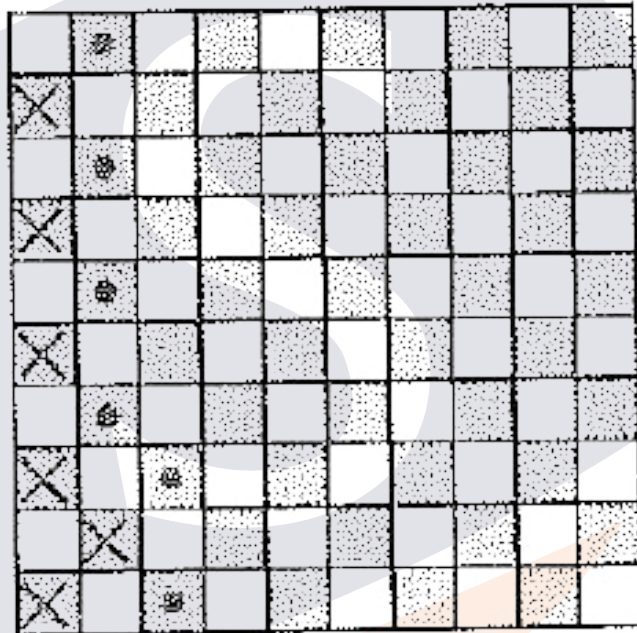
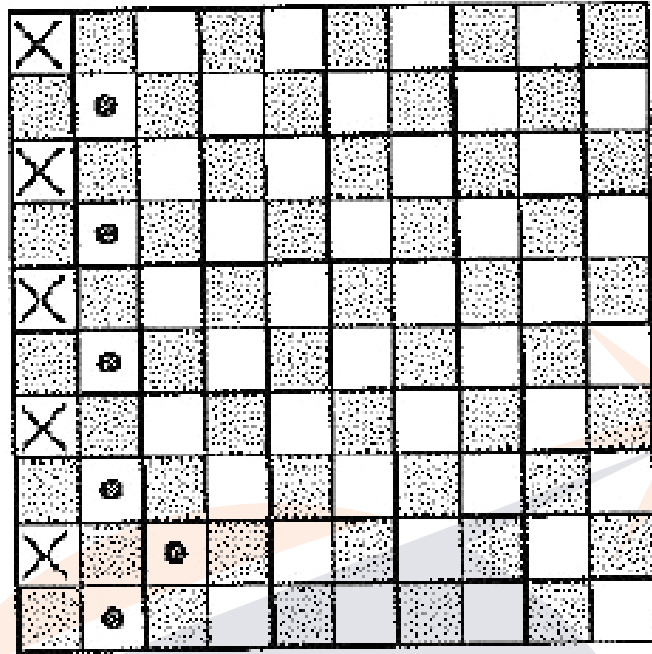
Thực tế, đối với bàn cờ $2n \times 2n$, ở mỗi lượt bắn chỉ cần mục tiêu là $n + 1$ ô (trong đề gốc là 51 ô). Dưới đây mô tả thuật toán thông qua ví dụ trên bàn cờ 10×10 với mỗi phát bắn hướng vào 6 ô.

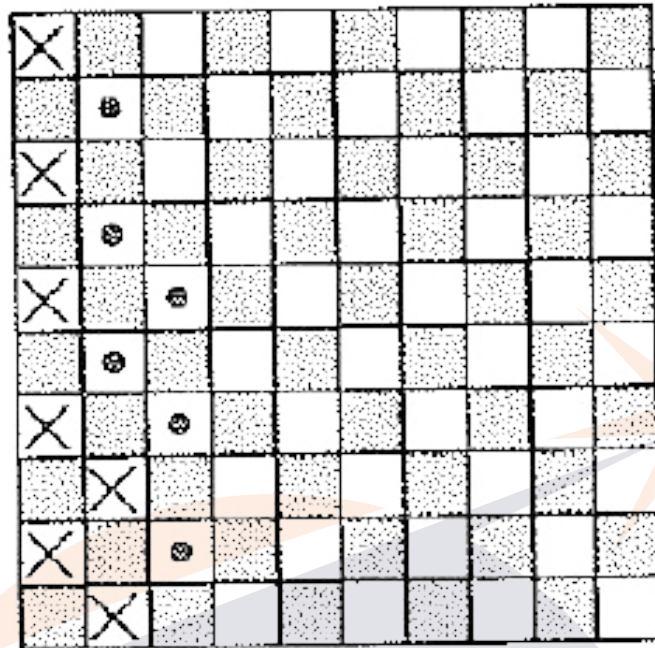
Tiến hành tô màu bàn cờ theo kiểu đen - trắng xen kẽ. Trước hết, giả sử ban đầu xe tăng nằm ở ô màu đen. Trên các hình minh họa dưới đây, các ô được đánh dấu "bom" là mục tiêu sẽ bị bắn ở phát kế tiếp; dấu "x" biểu thị các ô mà xe tăng chắc chắn không thể đứng trước khi phát đạn đó được bắn.



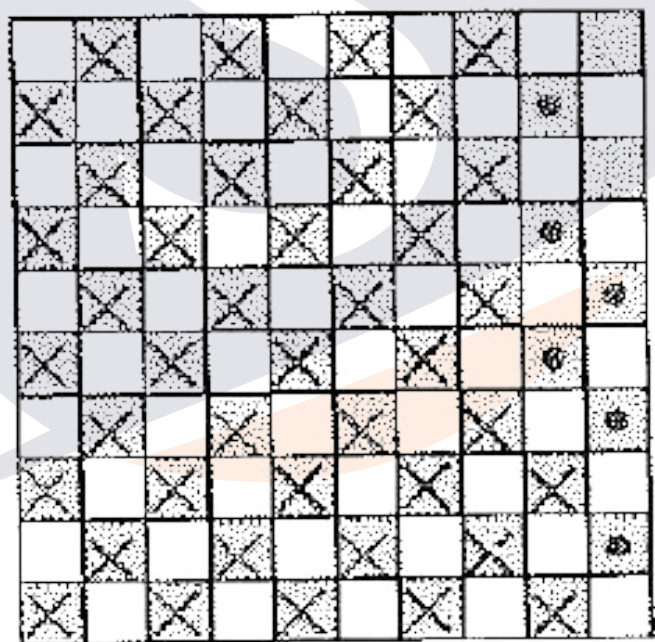


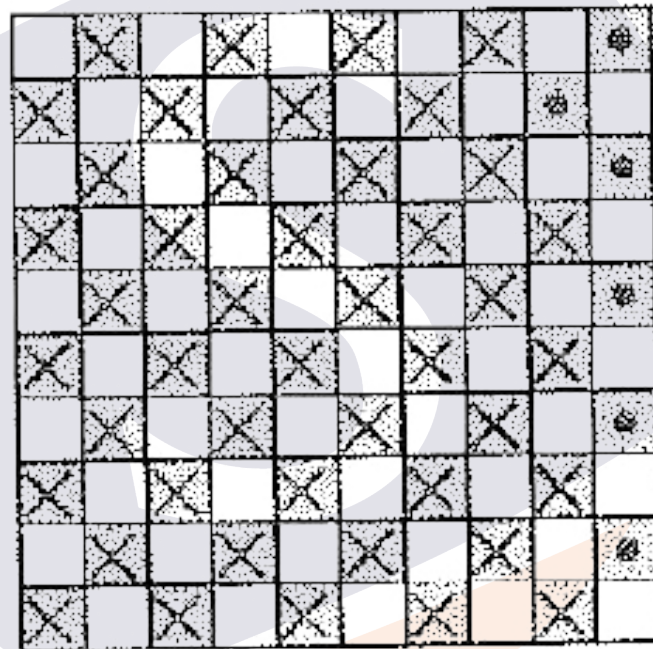
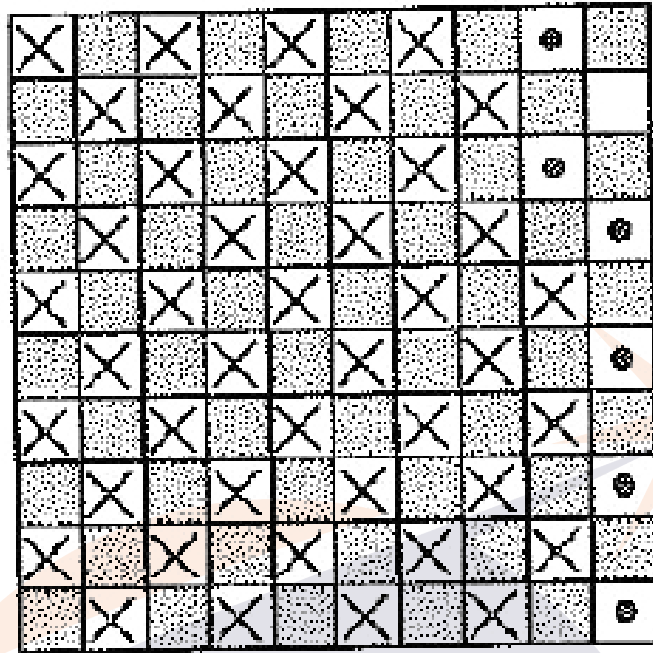


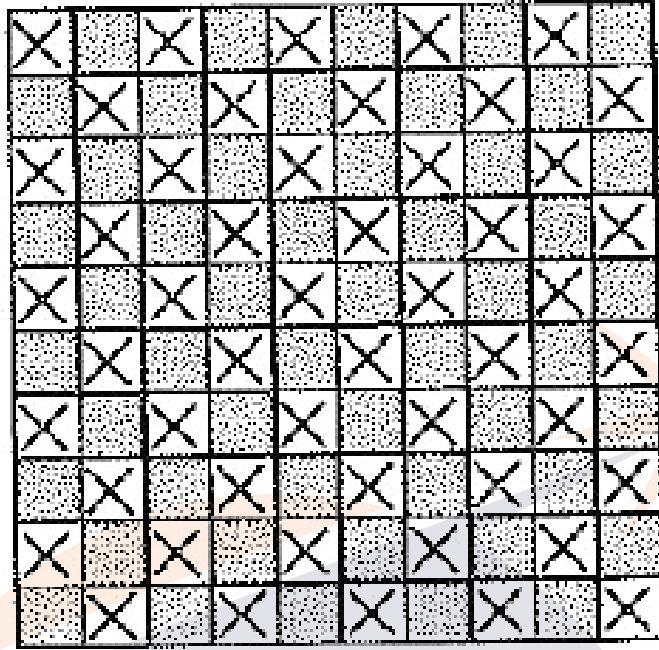




Sau mỗi bước, xe tăng bắt buộc phải đổi màu ô đang đứng (do đặc điểm di chuyển sang ô kề cạnh) và đồng thời xuất hiện thêm một dấu "x" mới. Cấu hình của 4 bước cuối cùng (với $n = 5$) được minh họa như sau:







Mặc dù có thể tối ưu hóa thêm ở một vài phát bắn cuối, nhưng ngay cả khi không tối ưu, sau phát bắn thứ

$$2n^2 - n - 1$$

ta đã loại trừ được đúng $2n^2 - n - 1$ ô, tất cả các ô này đều có cùng một màu (màu này phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của n ; ví dụ với $n = 5$ là ô màu đen). Ở phát bắn tiếp theo, ta chỉ việc bắn vào $n + 1$ ô còn lại của màu đó.

Như vậy, sau

$$2n^2 - n$$

phát bắn, toàn bộ các ô thuộc một màu đã bị cấm hoàn toàn. Nếu xe tăng vẫn chưa bị hạ, chứng tỏ nó bắt buộc phải đang đứng ở ô thuộc màu còn lại; khi đó, ta lặp lại chính xác thuật toán trên để loại trừ nốt và chắc chắn tiêu diệt được mục tiêu.

74. **Bổ đề.** Trong tam giác ABC , giả sử thỏa mãn hệ thức:

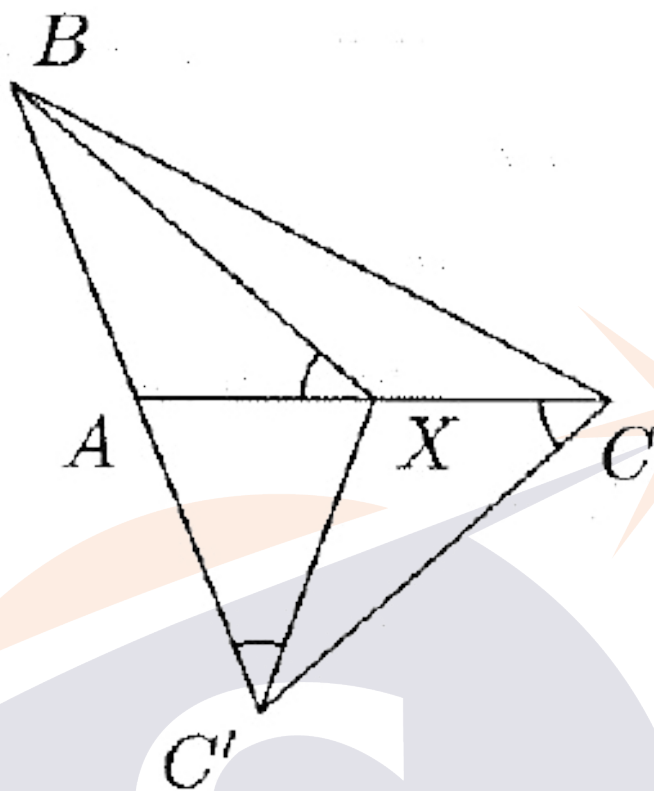
$$\sqrt{2}(BC - BA) = AC,$$

và X là trung điểm của AC . Khi đó:

$$2\angle AXB = \angle A - \angle C.$$

Chứng minh bổ đề. Áp dụng công thức đường trung tuyến:

$$\begin{aligned} BX^2 &= \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) \\ &= \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - 2(BC - BA)^2) = AB \cdot BC. \end{aligned}$$



Đựng điểm C' đối xứng với C qua đường phân giác góc B . Nâng cấp hệ thức lên thành:

$$BX^2 = AB \cdot BC',$$

từ đó ta có tỉ lệ đồng dạng:

$$BA : BX = BX : BC'.$$

Do đó hai tam giác BAX và BXC' đồng dạng, kéo theo:

$$\angle BXA = \angle BC'X.$$

Từ giả thiết của bổ đề, ta có:

$$AX \cdot AC = \frac{1}{2}AC^2 = (BC - BA)^2,$$

kết hợp quy trình tương tự suy ra:

$$\angle AC'X = \angle ACC'.$$

Do tam giác BCC' cân, ta có:

$$2\angle BCC' = 180^\circ - \angle ABC = \angle A + \angle C.$$

Tổng hợp lại:

$$\begin{aligned} 2\angle AXB &= 2\angle ACC' \\ &= 2(\angle BCC' - \angle BCA) \\ &= (\angle A + \angle C) - 2\angle C = \angle A - \angle C. \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề vừa chứng minh vào hai tam giác ABC và ADC (điều kiện được thỏa mãn vì $\sqrt{2}(DC - AD) = \sqrt{2}(BC - BA) = AC$), kết luận của bài toán được suy ra trực tiếp.

75. Sử dụng nhận xét đại số: nếu $b < a$, thì phần dư của phép chia a cho b bị giới hạn chặt chẽ dưới mức:

$$\frac{a}{2}$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp sự tồn tại của một hàm số chặn trên $f(n)$, sao cho với mọi bộ đôi (x, y) khởi đầu, số lượng các giá trị được sinh ra thuộc khoảng:

$$\Delta_n = \left[\frac{y}{2^{n+1}}, \frac{y}{2^n} \right)$$

luôn không vượt quá $f(n)$. (Thuật ngữ "bị chặn" trong lời giải này được hiểu là bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào y).

Bước cơ sở $n = 0$: mọi giá trị mới sinh ra đều nhỏ hơn $\frac{y}{2}$, do đó $f(0) = 2$ thỏa mãn.

Bước quy nạp: trong mọi tiến trình tính toán, ta có thể ưu tiên xác định tất cả các số lớn hơn $\frac{y}{2^n}$ (nhóm "lớn hơn") trước khi sinh ra các số thuộc Δ_n (nhóm "đang xét"). Các số nhỏ hơn không ảnh hưởng đến số lượng của nhóm đang xét.

Theo giả thiết quy nạp, kích thước của nhóm "lớn hơn" đã bị chặn. Dựa vào nhận xét ban đầu, các số thuộc nhóm "đang xét" chỉ có thể xuất hiện từ hai nguồn:

- Số dư của phép chia giữa hai số thuộc nhóm "lớn hơn".
- Số dư của phép chia một số thuộc nhóm "lớn hơn" cho một số thuộc nhóm "đang xét".

Số lượng các giá trị sinh ra từ nguồn thứ nhất rõ ràng bị chặn do kích thước nhóm "lớn hơn" bị chặn.

Xét các giá trị sinh ra từ nguồn thứ hai, chúng tạo thành các chuỗi liên tiếp:

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow \dots,$$

trong đó y_1 là sản phẩm của nguồn thứ nhất, còn y_{i+1} là số dư khi chia một số "lớn hơn" cho y_i .

Ta chứng minh: nếu một số z (thuộc nhóm "lớn hơn") xuất hiện hai lần làm số bị chia trong chuỗi (chia cho y_i và y_j với $j > i$), thì hai thương số nguyên phải hoàn toàn khác biệt. Thật vậy, nếu chúng có chung một thương số k , thì:

$$z = ky_i + y_{i+1} > ky_i + y_{j+1} > ky_j + y_{j+1} = z,$$

điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Do đó, mỗi số thuộc nhóm "lớn hơn" chỉ có thể làm số bị chia trong chuỗi tối đa:

$$2^{n+1}$$

lần. Vì lượng số "lớn hơn" bị chặn và tần suất sử dụng cũng bị chặn, tổng số lượng chuỗi và số lượng các giá trị thuộc nhóm "đang xét" là bị chặn. Bước quy nạp hoàn thành.

Cuối cùng, nếu ta chọn

$$y > 10000000 \sum_{n=0}^{100} f(n),$$

thì tổng số lượng các giá trị phân biệt xuất hiện trên bảng không thể vượt quá:

$$\sum_{n=0}^{100} f(n) + \frac{y}{2^{100}} < \frac{y}{10000000}.$$

76. **Đáp án:** Giá trị lớn nhất của s là:

$$s = 1.$$

Lời giải 1. Áp dụng thử với bộ số:

$$a = \frac{1}{t^2}, \quad b = 1, \quad c = t$$

khi t đủ lớn. Hai vế của bất đẳng thức tiến dần về 1, từ đó giới hạn trên của s là:

$$s \leq 1.$$

Ta sẽ chứng minh $s = 1$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2 \geq \frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$. Ta có các đánh giá:

$$\frac{2}{(a+b)(a+c)} - \frac{1}{a^2+bc} = \frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)(a^2+bc)} \geq 0,$$

$$\frac{2}{(c+a)(c+b)} - \frac{1}{c^2+ab} = \frac{(c-a)(c-b)}{(c+a)(c+b)(c^2+ab)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{b^2+ac}$$

được chứng minh thông qua biến đổi đại số tương đương:

$$b^4 + a^3c + ac^3 \geq a^2c^2 + 2ab^2c,$$

điều này luôn đúng dựa trên hai đánh giá AM-GM:

$$a^3c + ac^3 \geq 2a^2c^2, \quad b^4 + a^2c^2 \geq 2ab^2c.$$

Lời giải 2 (Phương pháp pqr). Ta sử dụng bổ đề đại số sau:

Bổ đề. Cho $a \leq b \leq c$, và hằng số hóa $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ (với điều kiện $p^2 \geq 3q$).

Khi đó:

- $r = abc$ đạt giá trị lớn nhất khi $a = b$,

- $r = abc$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = c$.

Nếu bổ sung điều kiện $0 \leq a \leq b \leq c$, thì r đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 0$ hoặc $b = c$.

Đặt các cực trị của nghiệm phương trình:

$$x = \frac{p - 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \quad y = \frac{p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}.$$

Biểu thức:

$$(b - c)^2 = -3a^2 + 2pa + p^2 - 4q \geq 0$$

cho thấy a phải nằm giữa hai nghiệm của $f(t) = 3t^2 - 2pt - p^2 + 4q$, do đó $a \geq x$; dấu bằng đạt tại $b = c$.

Tương tự:

$$(a - b)(a - c) = 3a^2 - 2ap + q \geq 0$$

chứng tỏ a không nằm giữa hai nghiệm của $g(t) = 3t^2 - 2pt + q$, do đó $a \leq y$.

Khảo sát hàm số $r(a) = a^3 - pa^2 + qa$. Đạo hàm và biến đổi cho thấy hàm $r(a)$ tăng ngặt trên $[x, y]$, từ đó Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng Bổ đề vào bài toán, ký hiệu $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$. Ta viết lại hai vế:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{p^2 + q}{pq - r},$$

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} = \frac{p^2q - q^2 - 2pr}{q^3 + p^3r - 6pqr + 8r^2}.$$

Bài toán yêu cầu tìm s lớn nhất để:

$$\left(\frac{p^2 + q}{pq - r}\right)^2 \geq s \cdot \frac{p^2q - q^2 - 2pr}{q^3 + p^3r - 6pqr + 8r^2}.$$

Cố định p, q . Khi r giảm, vế trái tăng và vế phải giảm. Do đó ta tập trung vào giá trị nhỏ nhất của r . Dựa vào Bổ đề, điều này đạt được khi $a = 0$ hoặc $b = c$.

Trường hợp $a = 0$, bất đẳng thức rút gọn thành:

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b+c}\right)^2 \geq s \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Nếu $s > 1$, ta chọn $b = 1/n, c = 1$ với n đủ lớn, bất đẳng thức sẽ sai. Do đó $s \leq 1$.

Trường hợp $b = c$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Vậy giá trị tối đa là $s = 1$.

Lời giải 3 (Phương pháp khai triển đại số). Từ Lời giải 1 ta đã có $s \leq 1$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $s = 1$.

Chuyển tất cả các số hạng về một vế, bình phương, khai triển và thu gọn các biểu thức. Tử số thu được là tổng của 384 hạng tử đều mang dấu dương, do đó bất đẳng thức được chứng minh. Cụ thể, biểu thức tử số có dạng:

$$3(6, 4, 0) + \frac{7}{2}(5, 5, 0) + \frac{1}{2}(8, 1, 1) + 3(7, 2, 1) + 6(6, 3, 1) \\ + 6(5, 4, 1) + 5(6, 2, 2) + 13(5, 3, 2) + 8(4, 4, 2) + 9(4, 3, 3),$$

với ký hiệu quy ước (p, q, r) là tổng đối xứng:

$$a^p b^q c^r + a^p b^r c^q + a^q b^p c^r + a^q b^r c^p \\ + a^r b^p c^q + a^r b^q c^p.$$

77. Mô hình hóa cấu trúc thành một đồ thị có hướng, trong đó học sinh là các đỉnh, và có mối quan hệ thù địch sẽ được thay thế bằng một cặp cung ngược chiều nối giữa hai đỉnh.

Gọi bậc của một đỉnh là số cung xuất phát từ nó (bằng số cung đi vào). Ta gán cho cung đi từ đỉnh a có bậc $2x$ tới đỉnh b có bậc $2y$ trọng số là:

$$\frac{y}{x}.$$

Xét một đỉnh $a \in A$ có bậc $2n$, nối với các đỉnh $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$. Theo giả thiết, số đỉnh thuộc lớp C có chung mỗi thù địch với a không nhỏ hơn một nửa bậc lớn nhất của các đỉnh b_i , từ đó nó không nhỏ hơn một nửa trung bình cộng các bậc này. Giá trị này lại không nhỏ hơn tổng các trọng số trên các cung xuất phát từ a đi sang lớp B .

Kết hợp với bất đẳng thức tương tự từ a đi sang lớp C , ta kết luận: tổng số đỉnh thuộc hai lớp B, C có chung một đỉnh kề với a không nhỏ hơn tổng các trọng số trên toàn bộ cung xuất phát từ a .

Lấy tổng trên mọi đỉnh của đồ thị, mỗi cặp đỉnh có chung đỉnh kề sẽ được đếm hai lần. Suy ra tổng số cặp đỉnh này lớn hơn hoặc bằng một nửa tổng trọng số của tất cả các cung.

Nhận thấy rằng, trên mỗi cặp cung ngược chiều, trọng số của chúng là nghịch đảo của nhau, do đó tổng của chúng theo bất đẳng thức AM-GM luôn không nhỏ hơn 2. Vì vậy, một nửa tổng trọng số của toàn bộ cung không nhỏ hơn một nửa tổng số cung, tương đương với số lượng cạnh trong đồ thị vô hướng ban đầu. Điều phải chứng minh.

78. Đặt α và γ lần lượt là phân nửa số đo của các góc A và C .

Từ điều kiện vuông góc:

$$AI \perp BI_2$$

ta suy ra:

$$\angle I_2BC = \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\gamma.$$

Tương tự, từ:

$$CI \perp BI_1$$

ta thu được:

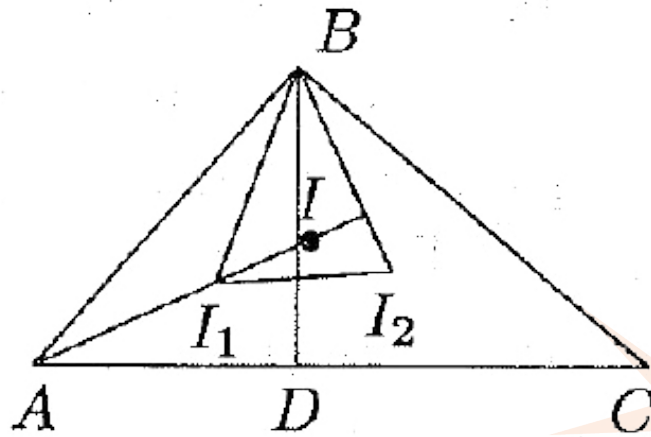
$$\angle I_1BA = \frac{\pi}{2} - \gamma - 2\alpha.$$

Tổng hợp hai phương trình này lại, ta tính được:

$$\frac{1}{2}\angle B,$$

từ đó kết luận:

$$\angle B = \frac{\pi}{2}.$$



Từ các bước biến đổi góc:

$$\angle DBC + \angle BCD = (\pi - 2\alpha - 4\gamma) + 2\gamma = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \frac{\pi}{2}.$$

Điều này dẫn đến $\angle BDC = \frac{\pi}{2}$, tức là $BD \perp AC$, khẳng định BD là đường cao của tam giác ABC .

79. Bài 79 trùng với bài 72, tham khảo lời giải bài 72.

80. **Đáp án:**

$$f(x) = 0 \quad \text{hoặc} \quad f(x) = x.$$

Bằng cách thay $y = 0$ vào phương trình, ta có:

$$f(0) = 0.$$

Nếu tồn tại một giá trị $t \neq 0$ sao cho $f(t) = 0$, thay $x = t$ và một $y \neq 0$ tùy ý vào phương trình gốc, ta thu được:

$$f(t(y+1)) = 0 \quad \text{với mọi } y \neq 0.$$

Điều này dẫn đến $f \equiv 0$, là một hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử điều ngược lại:

$$f(x) \neq 0 \quad \text{với mọi } x \neq 0.$$

Nếu $y \notin \{0, -1\}$, ta không thể có trường hợp:

$$yf(x) = x(y+1)$$

đối với một $x \neq 0$ nào đó. Vì nếu có, khi thay vào phương trình gốc, nó sẽ dẫn đến mâu thuẫn hiển nhiên $y+1 = y$.

Do đó, đối với $x \neq 0$, tỉ số:

$$\frac{f(x)}{x}$$

không thể bằng:

$$\frac{y+1}{y}$$

cho mọi giá trị $y \notin \{0, -1\}$. Tuy nhiên, biểu thức $\frac{y+1}{y}$ có thể nhận bất kỳ giá trị nào khác 0, ngoại trừ số 1. Vì vậy:

$$\frac{f(x)}{x} \equiv 1,$$

đồng nghĩa với:

$$f(x) = x.$$

Hàm số này cũng là một nghiệm của bài toán.

81. Giả sử phản chứng:

$$d(a, k) = b < \frac{k}{3}.$$

Thiết lập chuỗi giá trị:

$$a_0 = a, \quad a_1 = f(a), \quad a_2 = f(f(a)), \quad a_3 = f(f(f(a))), \dots$$

Nhận xét rằng các phân tử trong chuỗi này phải đôi một phân biệt. Nếu $a_m = a_{m+n}$, ta sẽ có:

$$d(a_m, n) = 0,$$

trái với giả thiết của bài toán.

Khảo sát số dư của phép chia a_i cho b , ta nhận thấy $a_k \equiv a \pmod{b}$. Phần dư của a xuất hiện tại bước 0 và lặp lại ở bước k . Gọi s là khoảng cách tối thiểu để phần dư này lặp lại. Khi đó $s \leq b$ và k là bội số của s :

$$k = s\ell, \quad \ell \geq 4.$$

Đại lượng $d(a, s)$ là bội số của b , giả sử $d(a, s) = mb$. Nếu $m \geq 2$, thì $d(a, s\ell)$ cũng phải là bội số của mb , không thể có giá trị bằng b . Do đó:

$$d(a, s) = b.$$

Từ đó:

$$|a_s - a| = b \Rightarrow a_s = a \pm b.$$

Đồng thời:

$$b = d(a, k) = |a_{\ell s} - a|,$$

và vì $a_s \neq a_{\ell s}$, ta có:

$$a_{\ell s} = a \mp b.$$

Xét trường hợp:

$$a_s = a + b, \quad a_{\ell s} = a - b$$

(trường hợp còn lại được giải quyết tương tự).

Dựa vào tính chất chia hết của các đa thức:

$$a_{\ell s} - a_s \quad \text{chia hết cho} \quad a_{(\ell-1)s} - a,$$

suy ra tồn tại số nguyên:

$$t \in \{1, -1, 2, -2\}$$

sao cho:

$$a_{(\ell-1)s} - a = tb.$$

Nếu $t = \pm 1$, $a_{(\ell-1)s}$ sẽ trùng với a_s hoặc $a_{\ell s}$, mâu thuẫn.

Nếu $t = -2$, ta có:

$$\Delta_\ell := |a_{\ell s} - a_{(\ell-1)s}| = b,$$

và giá trị này chia hết cho $\Delta_m := |a_{ms} - a_{(m-1)s}|$ với $m < s$. Từ đó suy ra mọi $\Delta_m = b$, dẫn đến chuỗi a_{ms} sẽ tuần hoàn, mâu thuẫn.

Nếu $t = 2$, các giá trị Δ_m bị giới hạn trong tập $\{b, 3b\}$, cấu trúc của dãy phải có dạng:

$$b, b, \dots, b, 3b, 3b, \dots$$

Khảo sát hệ thức:

$$a_s = a + b, \quad a_{2s} = a_s \pm \Delta_2, \quad a_{3s} = a_{2s} \pm \Delta_3, \dots$$

không có trường hợp nào đáp ứng $a_{\ell s} = a - b$ với $\ell \geq 4$ mà không tạo ra vòng lặp. Mâu thuẫn.

Vậy giả sử phản chứng là sai, ta có kết luận:

$$d(a, k) \geq \frac{k}{3}.$$

Giới hạn này là chặt. Ví dụ, với đa thức:

$$f(x) = 1 + 3x - 2x^2,$$

ta có $d(a, k) \neq 0$ và $f(f(f(0))) = f(f(1)) = f(2) = -1$, dẫn đến $d(0, 3) = 1$.

82. Bài 82 trùng với bài 77, tham khảo lời giải bài 77.

83. Chọn hai điểm $K \in BC$ và $L \in CD$ thỏa mãn:

$$BK = BA, \quad DL = DA.$$

Theo giả thiết, ta có:

$$CX \cdot CA = CK^2 = CL^2.$$

Do đó, các đường tròn ngoại tiếp ω_b, ω_d của hai tam giác AKX, ALX lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CD . Do tính đối xứng $BA = BK$, đường thẳng BA cũng tiếp xúc với đường tròn ω_b .

Gọi T là trung điểm của AK . Từ các tính chất trên, T phải nằm trên đường phân giác BI , với I là tâm đường tròn nội tiếp của tứ giác ngoại tiếp $ABCD$.

Trong tam giác AKX , hai đường thẳng XT và XB lần lượt đóng vai trò là trung tuyến và đường đối trung. Tính chất đường đối trung cung cấp các góc bằng nhau:

$$\angle AXB = \angle TXK = \angle XKC = \angle KAX,$$

sự bằng nhau cuối cùng dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác AKC .

Tương tự, ta có:

$$\angle AXD = \angle LAX.$$

Kết hợp lại:

$$\angle BXD = \angle BXA + \angle AXD = \angle KAX + \angle XAL = \angle KAL = \angle YID.$$

Ngoài ra, giả thiết đã cho:

$$\angle YXD = \angle DXB,$$

chứng tỏ bốn điểm X, Y, D, I cùng nằm trên một đường tròn Γ .

Theo *Định lý Newton*, tâm nội tiếp I nằm trên đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo XX' , với X' là trung điểm của BD . Gọi I' là điểm đối xứng của I qua X' . Qua phép đối xứng trung tâm:

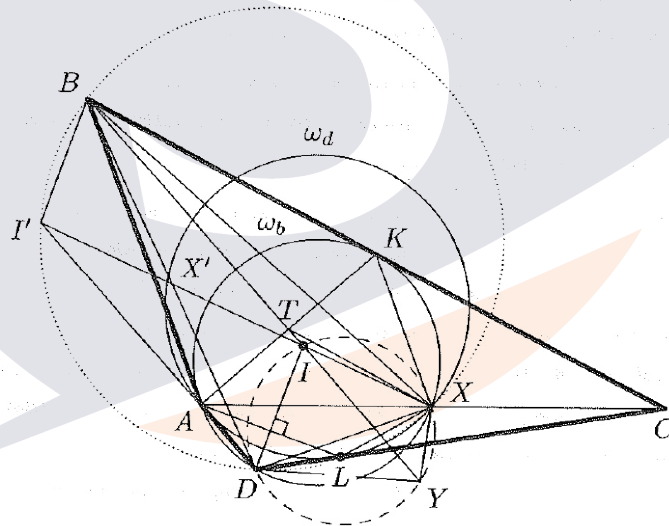
$$\angle BI'D = \angle BID = \pi - \angle BXD,$$

nên tứ giác $BXDI'$ cũng là tứ giác nội tiếp.

Cuối cùng:

$$\angle IDB = \angle DBI' = \angle DXI' = \angle DXI,$$

chứng tỏ đường thẳng BD tiếp xúc với đường tròn Γ .



Định lý Newton. Trong một tứ giác ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp luôn thẳng hàng với trung điểm của hai đường chéo.

84. **Đáp án:**

$$k = 51.$$

Ví dụ về chiến lược bắn hạ xe tăng khi $k \geq 51$ đã được trình bày ở lời giải bài 73.

Đánh giá dưới. Ta sẽ chứng minh khi $k \leq 50$, pháo binh không thể đảm bảo bắn hạ xe tăng trong mọi trường hợp. Chứng minh dựa trên hai bổ đề.

Bổ đề 1. Trong một lưới ô vuông, nếu có a ô được đánh dấu và các ô ở hàng trên cùng cũng như cột phải cùng đều không được đánh dấu, thì số lượng ô kề cạnh với các ô được đánh dấu không nhỏ hơn:

$$a + \sqrt{a}.$$

Bổ đề này đã được chứng minh trong lời giải của bài 55.

Bổ đề 2. Khảo sát bàn cờ $2n \times 2n$ tô theo cấu trúc đen-trắng đan xen, tập hợp bất kỳ gồm n^2 ô màu đen được đánh dấu luôn kề cạnh với ít nhất:

$$n^2 + n$$

ô màu trắng.

Chứng minh bổ đề 2. Phân hoạch bàn cờ thành n dải dọc kích thước $2n \times 2$. Chia tiếp mỗi dải thành các khối domino 1×2 .

Trong mỗi khối domino, số lượng ô màu trắng kề cạnh luôn lớn hơn hoặc bằng số ô màu đen được đánh dấu. Nếu trong dải dọc tồn tại ít nhất một khối domino hoàn toàn không có ô đánh dấu và một khối có chứa ô đánh dấu, thì ở biên giới giữa hai khối, khối rỗng sẽ cung cấp thêm một ô trắng kề cạnh. Điều này khiến tổng số ô trắng kề cạnh trong dải lớn hơn số ô đánh dấu ít nhất 1 đơn vị.

Nếu tính chất này đúng với mọi dải dọc, thì trên toàn bàn cờ ta thu được số ô trắng kề cạnh vượt số ô đánh dấu ít nhất là n . Lập luận tương tự khi phân hoạch bàn cờ thành các dải ngang $2 \times 2n$.

Xét trường hợp tồn tại một dải dọc hoàn toàn rỗng hoặc hoàn toàn chứa ô đánh dấu, đồng thời tồn tại một dải ngang có cùng tính chất. Giao của chúng sẽ tạo thành một vùng hoặc rỗng hoàn toàn, hoặc chứa đầy ô đánh dấu.

Nếu giao của chúng là vùng rỗng, cắt bàn cờ tại tâm của giao điểm 2×2 , ta được 4 hình chữ nhật. Gọi số lượng ô đen đánh dấu trong 4 hình chữ nhật này là a_1, a_2, a_3, a_4 , tổng của chúng bằng n^2 . Áp dụng Bổ đề 1 cho từng phần, tổng số lượng ô kề ít nhất là:

$$\begin{aligned} & a_1 + \sqrt{a_1} + a_2 + \sqrt{a_2} + a_3 + \sqrt{a_3} + a_4 + \sqrt{a_4} \\ & \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \sqrt{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} = n^2 + n. \end{aligned}$$

Nếu giao của chúng là vùng chứa đầy ô đánh dấu, ta khảo sát các ô trắng không kề cạnh với bất kỳ ô đen đánh dấu nào. Nếu số lượng các ô này không vượt quá $n^2 - n$, thì phần còn lại đảm bảo số lượng ô kề ít nhất là $n^2 + n$. Nếu số lượng này vượt quá $n^2 - n + 1$, áp dụng quy trình tương tự, số lượng ô đen bao quanh chúng phải ít nhất là $n^2 - n + 1 + \sqrt{n^2 - n + 1}$. Tuy nhiên, tổng số ô đen không được đánh dấu chỉ là n^2 , dẫn đến bất đẳng thức:

$$n^2 \geq n^2 - n + 1 + \sqrt{n^2 - n + 1},$$

điều này vô lý. Bổ đề 2 được chứng minh hoàn tất.

Trở lại bài toán chính. Giả sử ban đầu xe tăng nằm ở ô màu trắng; ta sẽ cho thấy pháo binh với $k = 50$ không thể đảm bảo bắn trúng xe tăng. Quản lý tập hợp các ô xe tăng có thể đứng sau mỗi lượt bắn. Ở lượt đầu tiên, số lượng vị trí khả dĩ là:

$$5000 - 50 = 4950.$$

Giả sử sau một lượt bắn, số vị trí khả dĩ luôn không nhỏ hơn 2500 và có cùng màu sắc (ví dụ màu đen). Áp dụng Bổ đề 2 với $n = 50$, tập hợp 2500 vị trí này có ít nhất 2550 ô kề khác màu (màu trắng). Xe tăng sẽ di chuyển sang một trong 2550 vị trí này, trong khi pháo binh chỉ có thể loại trừ tối đa 50 ô ở lượt bắn tiếp theo. Do đó, ở lượt tiếp theo, số vị trí khả dĩ vẫn đảm bảo không nhỏ hơn 2500.

Pháo binh không thể giới hạn số lượng vị trí khả dĩ xuống 0, đồng nghĩa với việc không tồn tại chiến lược chắc chắn bắn hạ xe tăng khi $k \leq 50$.

85. Với hai véc-tơ khác không \vec{x}, \vec{y} , gọi x_y là độ dài hình chiếu vuông góc của \vec{x} lên \vec{y} . Định nghĩa hàm số:

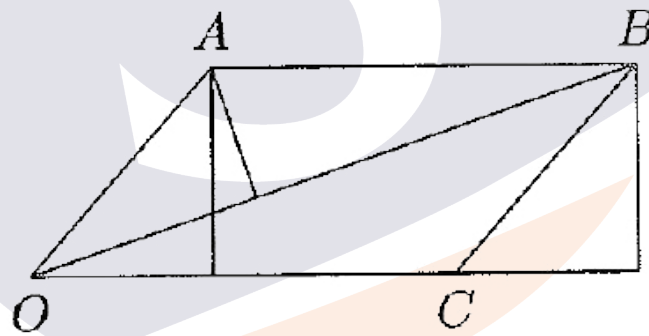
$$\Phi(x, y) = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| - x_y - y_x.$$

Với mọi hình bình hành $OABC$, ta luôn có các hệ thức hình chiếu:

$$OB_{OC} - OA_{OC} = OC,$$

$$OA_{OB} + OC_{OB} = OB,$$

$$OA_{OB} + AB_{OB} = OB.$$



Từ các hệ thức trên, ta biểu diễn tổng cần tính:

$$OA + OC - OB = \Phi(\vec{OA}, \vec{OC}) - \Phi(\vec{OC}, \vec{OB}) - \Phi(\vec{OA}, \vec{OB}).$$

Xét hằng số giới hạn $R > 10$, và tập hợp $\mathcal{P}(R)$ bao gồm tất cả các hình bình hành thỏa mãn các điều kiện của đề bài cùng với ràng buộc $OB \leq R$. Do $\mathcal{P}(R)$ là một tập hợp hữu hạn, ta có thể tính tổng trực tiếp trên tập hợp này.

Cộng biểu thức trên qua toàn bộ các hình bình hành trong $\mathcal{P}(R)$. Dễ nhận thấy, các biểu thức mang dấu "+" phần lớn sẽ bị triệt tiêu với các biểu thức mang dấu "-" tương ứng (chẳng hạn $\Phi(\vec{OA}, \vec{AC})$ sẽ triệt tiêu với $\Phi(\vec{OC}, \vec{CA})$). Đại lượng mang dấu "+" duy nhất không bị triệt tiêu là:

$$\Phi((1, 0), (0, 1)) = 2.$$

Vì hàm số $\Phi \geq 0$, sự tồn tại của các đại lượng mang dấu "-" còn sót lại chứng tỏ tổng quát của biểu thức không thể vượt quá 2.

Bổ sung ngoài lề, nếu ta thay đổi biểu thức cần tính tổng thành bình phương:

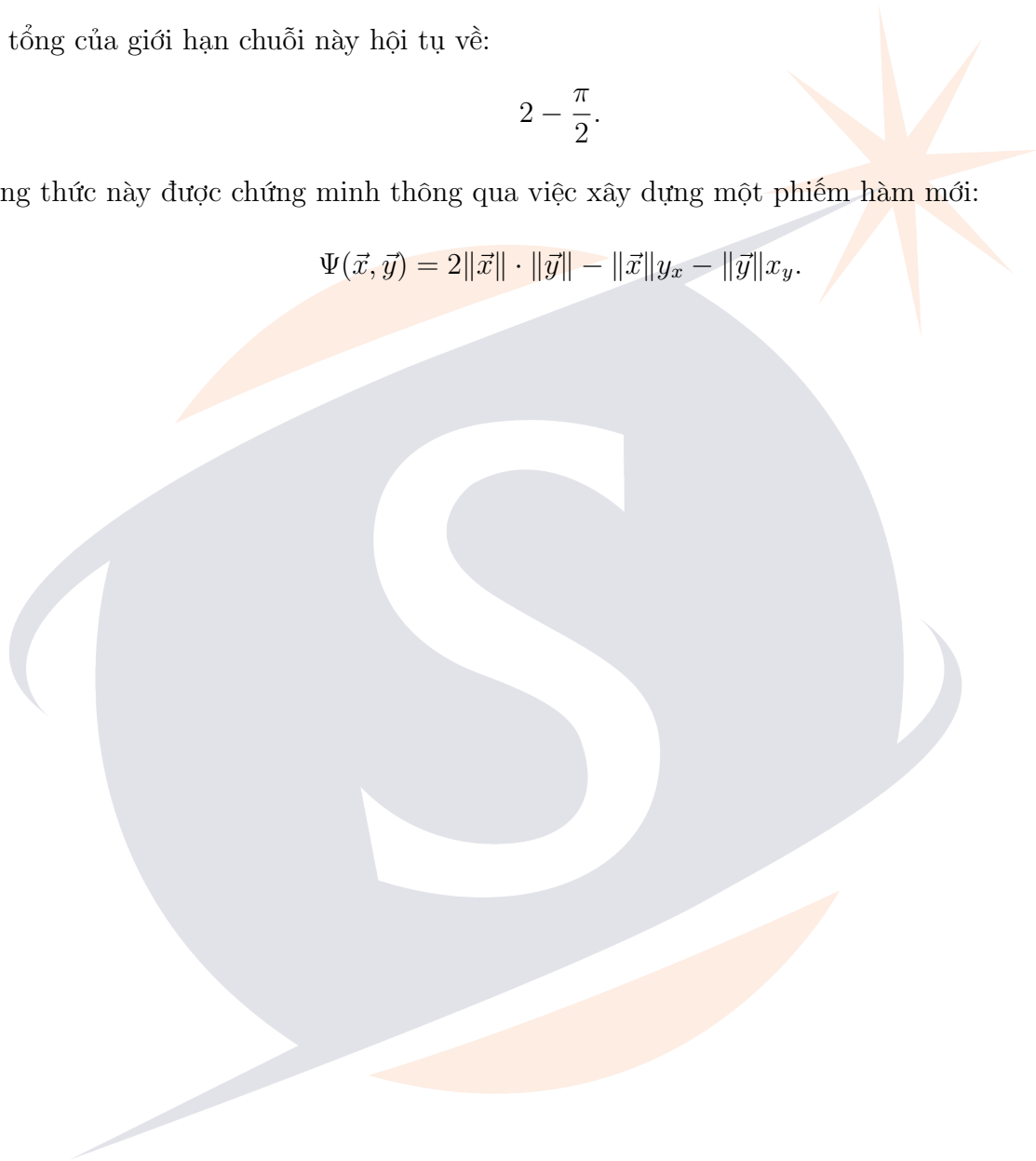
$$(OA + OC - OB)^2,$$

thì tổng của giới hạn chuỗi này hội tụ về:

$$2 - \frac{\pi}{2}.$$

Đẳng thức này được chứng minh thông qua việc xây dựng một phiếm hàm mới:

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}) = 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\|y_x - \|\vec{y}\|x_y.$$



§6. GÓC OLYMPIADOPHILE



LAN TRUYỀN THÔNG TIN

1 BÀI TOÁN TRUYỀN TIN (GOSSIP PROBLEM)

Xét n người đưa tin ($n > 3$). Ban đầu, mỗi người nắm giữ một tin tức riêng biệt mà những người khác chưa biết. Mỗi khi hai người gọi điện thoại cho nhau, họ sẽ trao đổi toàn bộ các tin tức mà mình đang có. Mục tiêu của bài toán là sau một số cuộc gọi, tất cả mọi người đều nắm được toàn bộ n tin tức. Một chuỗi các cuộc gọi đạt được mục tiêu này được gọi là một *phương án truyền tin*.

Trong các bài toán dưới đây, ta cần tìm số lượng cuộc gọi tối thiểu cho một phương án truyền tin ứng với mỗi n . Phương án sử dụng số cuộc gọi ít nhất được gọi là phương án *tối ưu* (hay phương án nhanh nhất). Lưu ý rằng có thể tồn tại nhiều phương án tối ưu khác nhau cho cùng một cấu hình.

1.1. Cần ít nhất bao nhiêu cuộc gọi để 4 người đưa tin có thể trao đổi toàn bộ thông tin cho nhau?

1.2. Chứng minh rằng nếu đảo ngược thứ tự thời gian của mọi cuộc gọi trong một phương án truyền tin, ta vẫn thu được một phương án truyền tin hợp lệ.

1.3. Chứng minh luôn tồn tại một phương án truyền tin gồm đúng $2n - 4$ cuộc gọi.

Giả sử n người đưa tin đã thiết lập được một phương án truyền tin sử dụng không quá $2n - 5$ cuộc gọi. Hãy chọn giá trị n nhỏ nhất sao cho tồn tại một phương án như vậy. Gọi giá trị n này là một *số thú vị*, và gọi phương án tối ưu tương ứng với n đó là phương án *siêu tốc*. Các bài toán tiếp theo sẽ nghiên cứu tính chất của phương án siêu tốc này.

1.4. Cho n là một số thú vị. Chứng minh rằng trong một phương án siêu tốc, không có bất kỳ cặp người đưa tin A, B nào gọi điện cho nhau từ hai lần trở lên.

1.5. Cho n là một số thú vị. Giả sử trong một phương án siêu tốc, tại một thời điểm A gọi cho B , sau đó B gọi cho C , rồi cuối cùng C lại gọi cho A . Chứng minh rằng một phương án chứa chu trình như vậy không thể là phương án siêu tốc.

1.6. Cấu hình các cuộc gọi đang tuân theo một phương án siêu tốc. Tại một thời điểm, A gọi cho B và đó là cuộc gọi cuối cùng của A . Chứng minh rằng cuộc gọi này đồng thời cũng là cuộc gọi cuối cùng của B .

1.7. Chứng minh rằng nếu trong phương án siêu tốc có cuộc gọi giữa A và B , thì ngay trước thời điểm diễn ra cuộc gọi đó, hai người này không có chung bất kỳ tin tức nào.

1.8. Chứng minh rằng một phương án siêu tốc phải chứa ít nhất $2n - 5$ cuộc gọi.

1.9. Chứng minh rằng trong một phương án siêu tốc, mỗi người đưa tin phải thực hiện ít nhất 3 cuộc gọi.

1.10. Chứng minh rằng với mọi n , một phương án truyền tin tối ưu luôn chứa đúng $2n - 4$ cuộc gọi. Bây giờ, xét n nhà hóa học ($n > 3$). Mỗi người sở hữu 1 kg một chất thử riêng biệt. Một phòng thí nghiệm cá nhân được coi là *đạt chuẩn* nếu nó thu thập đủ mọi loại chất thử. Khi hai nhà hóa học gặp nhau, họ sẽ trộn và chia đều mọi lượng chất thử mà họ đang có. Sau $2n - 4$ lần gặp, tất cả các phòng thí nghiệm đều có thể trở thành đạt chuẩn. Tuy nhiên, để được coi là *hiệu quả*, khối lượng của mỗi chất thử trong phòng thí nghiệm không được nhỏ hơn α gam.

1.11. Tìm giá trị lớn nhất của α để tồn tại một chuỗi $2n - 4$ lần gặp sao cho phòng thí nghiệm của mọi nhà hóa học đều trở nên hiệu quả.

2 MẠNG LƯỚI GIAO TIẾP HẠN CHẾ

Giả sử n người đưa tin không quen biết tất cả mọi người, và họ chỉ có thể gọi điện cho những người quen của mình. Mạng lưới quen biết này được biểu diễn bởi một đồ thị liên thông F . Mục tiêu không thay đổi: tất cả mọi người đều nắm được toàn bộ tin tức với số cuộc gọi ít nhất.

Với một chuỗi cuộc gọi, ta xây dựng một đa đồ thị cuộc gọi G : các đỉnh là các người đưa tin, còn các cạnh tương ứng với các cuộc gọi (có thể có cạnh bội). Thông tin về thứ tự thời gian của các cuộc gọi bị "ẩn" trong đồ thị G . Để khôi phục thứ tự đó, ta có thể gắn thêm trọng số thời gian cho các cạnh.

2.1. Chứng minh rằng với mọi đồ thị liên thông F , phương án truyền tin tối ưu chứa $2n - 3$ hoặc $2n - 4$ cuộc gọi.

2.2. Chứng minh rằng nếu F chứa một chu trình C_4 , thì phương án tối ưu chứa đúng $2n - 4$ cuộc gọi.

2.3. Chứng minh rằng nếu F chỉ chứa duy nhất một chu trình C_k ($k \neq 4$), thì phương án tối ưu chứa $2n - 3$ cuộc gọi.

2.4. Chứng minh rằng nếu F hoàn toàn không chứa chu trình C_4 , thì phương án tối ưu chứa $2n - 3$ cuộc gọi.

Bây giờ, thay vì gọi điện thoại, họ sử dụng điện báo: thỉnh thoảng các người đưa tin gửi cho nhau các bức điện tín, mỗi bức điện tín chứa toàn bộ tin tức mà người gửi đang nắm giữ.

2.5. Cần ít nhất bao nhiêu bức điện tín để hoàn thành mục tiêu lan truyền?

2.6. Xét một phương án truyền tin "tiết kiệm" (tránh lặp thông tin): mỗi người đưa tin nhận mỗi tin tức qua điện tín không quá một lần. Trong quá trình đó, có thể xảy ra hiện tượng một người nhận được bức điện có chứa chính tin tức khởi thủy của bản thân. Chứng minh rằng trong mọi phương án tiết kiệm, số lượng người gặp phải hiện tượng này không nhỏ hơn $n - 1$.

3 BIẾN THỂ NOHO (NO ONE HEARS OWN)

Giả sử đồ thị quen biết của n người đưa tin là một đồ thị đầy đủ. Xét một ràng buộc bổ sung: các cuộc gọi phải được sắp xếp sao cho không có ai phải nghe lại chính tin tức ban đầu của mình từ một người khác (NOHO: No One Hears Own). Hiển nhiên, dưới ràng buộc này, đồ thị cuộc gọi G không thể có cạnh bội (thậm chí không tồn tại chu trình tam giác), và mọi đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 2.

3.1. Một cấu hình phi tiêu chuẩn: có 3 người biết tin A , 3 người biết tin B , 2 người biết tin C và 2 người biết tin D (tổng cộng 10 người). Liệu có tồn tại một phương án truyền tin thỏa mãn ràng buộc NOHO cho cấu hình này không?

3.2. Với những giá trị nào của n thì quá trình truyền tin theo mô hình NOHO là khả thi?

3.3. Chứng minh rằng trong mô hình NOHO, ta cần ít nhất $2n - 4$ cuộc gọi.

4 BIẾN THỂ NODUP (NO DUPLICATION)

Xét tình huống n người đưa tin tổ chức trao đổi sao cho trong bất kỳ cuộc gọi nào, hai người tham gia đều không có chung bất kỳ tin tức nào tính đến thời điểm đó (NODUP: No Duplication). Thuộc tính này từng được nhắc đến ở bài 1.7 nhưng trong ngữ cảnh một đối tượng không tồn tại. Ở đây, đồ thị quen biết vẫn là đồ thị đầy đủ.

4.1. Mô hình NODUP có khả thi với $n = 12$ hay không?

4.2. Giả sử có các nhóm gồm 13, 8, 6, 5, 4, 4 người đưa tin. Mỗi nhóm nắm giữ một tập tin tức chung

của riêng nhóm đó. Có tồn tại phương án truyền tin thỏa mãn ràng buộc NODUP không?

4.3. Mô hình NODUP có khả thi với $n = 20$ hay không?

4.3 $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng quá trình truyền tin theo mô hình NODUP là bất khả thi trong các trường hợp: a) $n = 14$; b) $n = 18$.

4.4. Với những giá trị nào của n thì mô hình truyền tin NODUP là khả thi?

4.4 $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng với $n > 4$, trong quá trình truyền tin theo mô hình NODUP, mỗi người đưa tin phải gọi điện ít nhất 3 lần.

4.5. Hãy thiết lập một ví dụ trao đổi tin tức theo mô hình NODUP với số lượng cuộc gọi bằng $\frac{9}{4}n + c$ áp dụng cho một tập vô hạn các giá trị n .

4.6. Chứng minh rằng số lượng cuộc gọi tối thiểu trong mô hình NODUP luôn bị chặn dưới bởi $\frac{9}{4}n + c$.

5 MẠNG LƯỚI LIÊN LẠC GIÁN ĐOẠN

Cho n người đưa tin và một số tự nhiên k . Xét tình huống lịch trình các cuộc gọi đã được thiết lập từ trước và mọi người phải tuân thủ nghiêm ngặt. Tuy nhiên, do "liên lạc gián đoạn", có thể có tối đa k cuộc gọi bị hỏng (hai người tham gia không thể trao đổi thông tin trong cuộc gọi đó). Bài toán tương tự cũng được đặt ra đối với mạng lưới điện báo.

5.1. Giải quyết bài toán trong trường hợp "bưu điện thiếu tin cậy" - khi những người đưa tin gửi điện tín và có tối đa k bức điện có thể bị thất lạc dọc đường.

a) Giả sử trong số đó có một vị tổng tư lệnh. Cần thiết lập lịch gửi điện tín như thế nào để bất chấp liên lạc gián đoạn, mọi người vẫn báo cáo được thông tin của mình cho tổng tư lệnh? Cần tối thiểu bao nhiêu bức điện tín?

b) Cần tối thiểu bao nhiêu bức điện tín để tất cả mọi người đều nắm được toàn bộ thông tin?

5.2. Trở lại với mạng lưới điện thoại. Giả sử có một vị tổng tư lệnh. Cần lập lịch cuộc gọi sao cho bất chấp liên lạc gián đoạn, mọi người vẫn truyền đạt được tin tức cho tổng tư lệnh. Ký hiệu $\mu(n, k)$ là số lượng cuộc gọi tối thiểu cần thiết cho tình huống này. Chứng minh rằng:

a) $\mu(n, k) = \left\lceil \frac{k+1}{2} \cdot n \right\rceil$ khi $k \geq n - 2$;

b) $\mu(n, k) = \left\lceil \frac{k+2}{2} \cdot (n-1) \right\rceil$ khi $k \leq n - 2$.

5.3. a) Chứng minh rằng số lượng cuộc gọi tối thiểu $\tau(n, k)$ đối với bài toán liên lạc gián đoạn thỏa mãn:

$$\tau(n, k) \leq \left\lceil \left(k + \frac{3}{2} \right) (n-1) \right\rceil.$$

b) Hãy tìm một đánh giá chặn dưới cho $\tau(n, k)$ sao cho càng sát với đánh giá ở câu a) càng tốt.

(Chú thích: Giá trị chính xác của $\tau(n, k)$ hiện vẫn là một bài toán mở. Với câu hỏi ở bài trước, người ta đã thiết lập được đánh giá chặn dưới:

$$\tau(n, k) \geq \mu(n, k) + n - 2\sqrt{n}.$$

Việc khảo sát xem với k cố định, dãy số

$$\left(\tau(n, k) - \left(k + \frac{3}{2} \right) n \right)$$

có bị chặn hay không vẫn đang là một ẩn số.)

5.4. Bây giờ giả sử không có cuộc gọi nào bị hỏng, nhưng những người đưa tin yêu cầu mọi tin tức họ nhận được phải "đáng tin cậy". Một tin tức từ người khác được coi là đáng tin cậy nếu người nghe nhận được tin đó thông qua ít nhất $k + 1$ đường truyền độc lập. Chứng minh rằng số cuộc gọi tối thiểu $\gamma(n, k)$ thỏa mãn:

$$\text{a) } \gamma(n, k) \leq \left\lceil \frac{(k+4)n}{2} \right\rceil - 4; \quad \text{b) } \left\lceil \frac{(k+4)(n-1)}{2} \right\rceil - \lfloor \log_2 n \rfloor \leq \gamma(n, k).$$

6 NHỮNG NGƯỜI ĐƯA TIN LƯỜI BIẾNG

6.1. Giả sử n người đưa tin đã thực hiện một số cuộc gọi. Đồ thị cuộc gọi tạo thành một cây, và sau các cuộc gọi đó mỗi người biết ít nhất k tin tức. Chứng minh rằng:

$$n \geq 2^{k-1}.$$

Cố định các số tự nhiên n, k với $k \leq n$. Xét tình huống đồ thị quen biết là đồ thị đầy đủ, nhưng mức độ tò mò của họ bị giới hạn: mục tiêu của họ chỉ là sau quá trình trao đổi, mỗi người nắm được ít nhất k tin tức. Yêu cầu đặt ra vẫn là đạt được mục tiêu này với số cuộc gọi tối thiểu. Ký hiệu số cuộc gọi tối thiểu đó là $P(n, k)$.

Giả thiết $k \geq 4$. Ta thiết lập một dãy số hữu hạn phụ trợ: với k cố định, xét dãy

$$t_i = i + 2^{k-i-2}, \quad 0 \leq i \leq k-4.$$

Dễ thấy đây là một dãy giảm.

6.2. Khi k tương đối "nhỏ" so với n , cụ thể:

$$n \geq 2^{k-1},$$

chứng minh rằng số lượng cuộc gọi cần thiết "gần bằng n ":

$$P(n, k) = \left\lceil \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} \cdot n \right\rceil.$$

6.3. Với k lớn hơn, chọn chỉ số i ($0 \leq i \leq k-4$) sao cho:

$$t_i \leq n < t_{i-1}.$$

Chứng minh rằng:

$$P(n, k) \leq n + i.$$

6.4. Chứng minh rằng với điều kiện của bài toán trước, thực chất ta có đẳng thức:

$$P(n, k) = n + i.$$



LỜI GIẢI

1.1. Đáp án: 4 cuộc gọi. **1.2.** Nếu tin tức của người A truyền qua một chuỗi cuộc gọi để đến được với người B , thì theo chuỗi cuộc gọi đảo ngược thời gian, tin tức của B cũng sẽ truyền ngược lại để

đến được với A .

1.3. Chứng minh bằng quy nạp. Bước cơ sở: xét $n = 4$ người. Bước quy nạp: khi bổ sung thêm người thứ $n + 1$, ta chỉ cần thêm hai cuộc gọi; cụ thể, người mới sẽ gọi cho một người bất kỳ trước khi tất cả mọi người bắt đầu trao đổi, và sau khi quá trình của n người hoàn tất, người mới lại gọi cho một người bất kỳ một lần nữa.

1.4. [11, Bổ đề 2]. Ta đồng nhất A và B thành một đỉnh duy nhất; tại mỗi thời điểm, đỉnh này sẽ lưu trữ hợp của các tập thông tin mà A và B đang nắm giữ. Loại bỏ các cuộc gọi nội bộ giữa A và B . Khi đó ta thu được một phương án truyền tin cho $(n - 1)$ người với số lượng cuộc gọi là $2(n - 1) - 5$, điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của n .

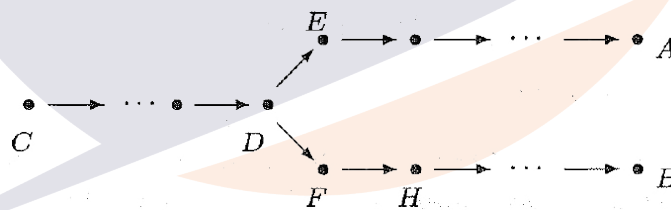
1.5. Mệnh đề này đã được sử dụng trong [1]. Ta tiến hành "loại bỏ" đỉnh A : trước khi cuộc gọi BC diễn ra, mọi vai trò kết nối của A được chuyển giao cho B , còn sau cuộc gọi BC , mọi vai trò của A được chuyển giao cho C . Qua phép biến đổi này, số lượng người giảm đi 1 và số cuộc gọi giảm đi 2, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của n .

Bằng lập luận tương tự, ta cũng có thể chứng minh được rằng không tồn tại các chuỗi truyền tin dài hơn mà bắt đầu và kết thúc tại cùng một người (không tồn tại chu trình).

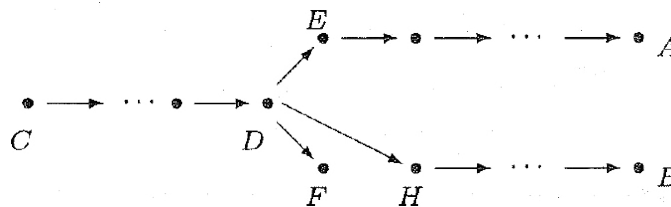
1.6. Sau khi trao đổi với A , người đưa tin B đã nắm được toàn bộ thông tin. Giả sử phản chứng rằng sau cuộc gọi với A , B vẫn tiếp tục gọi cho một người C nào đó. Khi đó trong cuộc gọi này, C sẽ nhận lại được chính tin tức khởi thủy của mình (thông qua B). Điều này dẫn đến sự hình thành chu trình, vi phạm tính chất đã chứng minh ở bài 1.5. Mâu thuẫn.

1.7. Mệnh đề này đã được đề cập trong [11, Bổ đề 4] và hoàn toàn tương đương với "bổ đề giao nhau" trong [1]. Ý tưởng cốt lõi là: nếu tại một thời điểm nào đó, hai người có tập thông tin giống hệt nhau (ví dụ, ngay sau khi họ vừa gọi điện cho nhau), ta có thể hoán đổi vai trò của hai người này trong mọi cuộc gọi về sau mà vẫn bảo toàn tính hợp lệ của phương án truyền tin.

Giả sử phản chứng: trước khi A và B gọi điện cho nhau, họ đã có chung tin tức của C . Xét một chuỗi cuộc gọi bất kỳ chuyển tải tin tức từ C đến A và đến B .



Giả sử trên chuỗi truyền tin này, cuộc gọi DE diễn ra trước cuộc gọi DF . Khi đó, nếu ta hoán đổi vị trí của hai đỉnh D và F , ngay sau khi diễn ra cuộc gọi DF , ta có thể xem như cuộc gọi FH được thay thế bằng cuộc gọi DH . Thông qua thao tác này, ta thu được một chuỗi cuộc gọi mới, trong đó nhánh $DFH \dots B$ (nằm sau điểm " rẽ nhánh ") bị rút ngắn thành $DH \dots B$.



Tính chất DH diễn ra sau DE vẫn được bảo toàn. Bằng cách lặp lại thuật toán cắt tỉa này, ta loại bỏ hoàn toàn chuỗi $H \dots B$ phía sau điểm rẽ nhánh. Tại bước cuối cùng, ta hoán đổi vai trò của B và D (ngay sau cuộc gọi BD), kéo theo cuộc gọi AB ở phần đầu lập luận bị thay thế bằng cuộc gọi AD . Hệ quả là ta thu được chuỗi $DE \dots A$ nối tiếp bởi cuộc gọi AD . Điều này mâu thuẫn trực tiếp với kết quả của bài 1.4.

1.8. Mệnh đề này đã được sử dụng trong [1]. Giả sử mỗi người đưa tin đều gọi ít nhất 4 lần, thì tổng số cuộc gọi ít nhất sẽ là $\frac{4n}{2} = 2n$. Giả sử có một người A chỉ gọi đúng 3 lần. Để thông tin từ A lan truyền đến tất cả những người còn lại, cần tối thiểu $n - 1$ cuộc gọi; ngược lại, để thông tin từ phần còn lại hội tụ về A cũng cần tối thiểu $n - 1$ cuộc gọi. Dựa vào bài toán trước, hai tập hợp cuộc gọi này chỉ có thể giao nhau tại các cuộc gọi do chính A trực tiếp thực hiện. Thật vậy, nếu cuộc gọi CD làm nhiệm vụ truyền tin từ A , thì cả C và D đều đã biết thông tin của A ; nếu một trong hai người này lại tham gia vào nhánh truyền tin ngược về A , họ sẽ trả lại cho A chính thông tin khởi thủy của A , vi phạm tính phi chu trình (bài 1.5). Do đó, tổng số cuộc gọi ít nhất là:

$$(n - 1) + (n - 1) - 3 = 2n - 5.$$

1.9. Nếu một người đưa tin bất kỳ gọi k lần, áp dụng logic của bài trước, ta có bất đẳng thức:

$$2n - 5 \geq (n - 1) + (n - 1) - k.$$

Từ đó suy ra $k \geq 3$.

1.10. Ta cần chứng minh không tồn tại phương án siêu tốc nào chỉ sử dụng đúng $2n - 5$ cuộc gọi. Dựa theo bài 1.6, tập hợp cuộc gọi được chia thành ba nhóm: mở đầu (gồm $n/2$ cuộc, đóng vai trò là cuộc gọi đầu tiên của cả hai phía), kết thúc (gồm $n/2$ cuộc, đóng vai trò là cuộc gọi cuối cùng của cả hai phía), và nhóm trung gian (còn lại $n - 5$ cuộc). Dựa theo bài 1.9, mỗi đỉnh phải tham gia ít nhất một cuộc gọi trung gian. Xây dựng đồ thị con chỉ gồm các cuộc gọi trung gian: đồ thị có n đỉnh và $n - 5$ cạnh, do đó nó phân rã thành ít nhất 5 thành phần liên thông, và mỗi thành phần chứa ít nhất một cạnh.

Nếu AB và AC lần lượt là cuộc gọi đầu tiên và cuộc gọi cuối cùng của đỉnh A , thì thông tin xuất phát từ A chỉ có thể lan truyền qua các thành phần liên thông chứa A hoặc B , trong khi thông tin hội tụ về A chỉ có thể đi qua các thành phần chứa A hoặc C . Suy ra có ít nhất hai thành phần liên thông hoàn toàn đứng ngoài quá trình truyền và nhận thông tin của A . Ký hiệu số lượng cạnh của hai thành phần "ngoại lai" này là d ($d \geq 2$). Bằng cách điều chỉnh lại bất đẳng thức của bài 1.9, ta có:

$$2n - 5 \geq (n - 1) + (n - 1) - k + d.$$

Bất đẳng thức này ép k (số bậc của đỉnh A bất kỳ) phải lớn hơn hoặc bằng 5. Tuy nhiên, điều kiện này áp dụng cho mọi đỉnh, dẫn đến tổng số cuộc gọi lớn hơn $2n - 5$, gây mâu thuẫn trực tiếp (tham khảo lại giới hạn ở lời giải 1.8).

2.1. Mệnh đề này đã được chứng minh trong [6]. Kết hợp với kết quả bài 1.10, ta thu được hệ quả: mọi cấu trúc dạng cây đều cần chính xác $2n - 3$ cuộc gọi. Thật vậy, $2n - 3$ cuộc gọi là đủ nếu quá trình truyền tin tuân theo quy tắc đi từ các nút lá dồn về nút gốc (quét từ các cạnh xa gốc nhất vào

dẫn đến gốc). Tại thời điểm kết thúc quy trình quét này, sẽ có hai đỉnh nắm giữ toàn bộ thông tin: nút gốc và một đỉnh kề với nút gốc. Sau đó, ta chỉ việc đảo ngược thứ tự các cuộc gọi để lan truyền thông tin từ gốc trả về các lá.

Không thể tối ưu hóa số lượng cuộc gọi xuống mức thấp hơn, bởi nếu ít hơn $2n - 3$, đồ thị cấu trúc cây sẽ xuất hiện ít nhất hai "cạnh đơn" (cạnh chỉ được sử dụng duy nhất một lần trong toàn bộ quá trình). Sự tồn tại của hai cạnh đơn này sẽ cắt đồ thị thành ba thành phần liên thông riêng biệt, làm tê liệt khả năng trao đổi thông tin toàn cục.

2.2. Thuật toán xây dựng cấu hình được trình bày trong [6]. Thực hiện thao tác co (contract) chu trình C_4 thành một siêu đỉnh duy nhất và đặt siêu đỉnh đó làm gốc của đồ thị. Truyền thông tin từ các nút lá về gốc theo cơ chế tương tự mục trước, sau đó áp dụng phương án tối ưu của mục 1.1 cho đồ thị con nội bộ C_4 , rồi lặp lại quá trình quét trên cây theo chiều ngược lại. Phương án này tiêu tốn:

$$(n - 4) + 4 + (n - 4) = 2n - 4$$

cuộc gọi.

2.3. Phép chứng minh được trình bày chi tiết trong [6]. Giả sử phản chứng tồn tại một phương án truyền tin chỉ sử dụng $2n - 4$ cuộc gọi. Dưới ràng buộc này, mỗi cạnh trong mạng lưới phải được sử dụng ít nhất một lần. Nếu một cạnh đóng vai trò là "cầu" (bridge) mà bị bỏ qua, mạng lưới sẽ bị đứt gãy và không thể truyền thông tin giữa hai nửa đồ thị. Nếu một cạnh nằm trên chu trình mà bị bỏ qua, phần còn lại của mạng lưới sẽ suy biến thành một cây, và theo định lý ở mục 2.1, một cây không thể hoàn thành quá trình truyền tin với số cuộc gọi ít hơn $2n - 3$. Do đó, đối với phương án $2n - 4$ cuộc gọi, đồ thị bắt buộc phải chứa ít nhất 4 cạnh đơn (nhắc lại: cạnh đơn là cạnh chỉ được kích hoạt duy nhất một lần).

Giả sử trong số các cạnh đơn đó có chứa ít nhất một cầu. Việc loại bỏ cầu này sẽ xé đồ thị thành hai thành phần liên thông độc lập. Điều này bắt buộc trước khoảng khắc cuộc gọi qua cầu được thực hiện, mỗi đầu cầu phải tích lũy trọn vẹn toàn bộ thông tin nội bộ của thành phần tương ứng. Giả sử một thành phần có kích thước là a đỉnh, quá trình tích lũy này sẽ tiêu tốn:

$$(a - 1) + (n - a - 1) = n - 2$$

cuộc gọi. Sau đó, cuộc gọi duy nhất qua cầu được kích hoạt, nối tiếp bằng một chuỗi số lượng cuộc gọi tương đương để phân phối thông tin ngược trở lại. Tính tổng lại, phương án sẽ tiêu tốn $2n - 3$ cuộc gọi, mâu thuẫn với giả thiết. Từ đó suy ra không có bất kỳ cạnh đơn nào được phép là cầu, đồng nghĩa với việc tất cả các cạnh đơn phải tọa lạc trên một chu trình.

Hệ quả là, khi ta tạm thời xóa bỏ các cạnh đơn ra khỏi đồ thị, chu trình sẽ bị cắt thành 4 thành phần liên thông, mỗi thành phần là một cây. Đánh số các cây này theo chiều dọc chu trình, giả sử số lượng đỉnh của chúng lần lượt là n_1, n_2, n_3, n_4 , với:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n.$$

Khảo sát thứ tự thời gian kích hoạt các cạnh đơn. Nếu hai cạnh đơn đầu tiên được kích hoạt cùng gán với một thành phần i , thành phần này sẽ vĩnh viễn bị cô lập khỏi luồng thông tin từ thành phần $(i + 2) \bmod 4$. Vì vậy, thứ tự kích hoạt các cạnh đơn phải tuân thủ nghiêm ngặt mô hình đã phân tích ở lời giải mục 1.1: cụ thể, phải kích hoạt cặp cạnh 1-2 và 3-4 trước, sau đó mới đến cặp cạnh 2-3 và 1-4.

Ngay trước thời điểm kích hoạt cuộc gọi 1-2, cả hai đầu mỗi giao tiếp phải sở hữu đầy đủ bộ thông tin nội bộ của thành phần mình, yêu cầu này đòi hỏi phải có ít nhất:

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$$

cuộc gọi nội bộ diễn ra trước đó. Bằng logic tương tự, trước khi kích hoạt cuộc gọi 3-4, hệ thống phải tiêu tốn tối thiểu:

$$(n_3 - 1) + (n_4 - 1)$$

cuộc gọi nội bộ trong thành phần 3 và 4. Đến giai đoạn này, ta đã đếm được $n - 4$ cuộc gọi.

Chuyển sang giai đoạn hai, sau khi cuộc gọi 2-3 được thực hiện, mỗi phía sẽ tiếp nhận thêm một luồng thông tin đặc trưng từ phía đối diện. Để phân tán luồng thông tin mới này đi khắp thành phần, hệ thống phải phát sinh thêm ít nhất:

$$(n_2 - 1) + (n_3 - 1)$$

cuộc gọi. Tương tự, hệ quả của cuộc gọi 1-4 sẽ kéo theo tối thiểu:

$$(n_1 - 1) + (n_4 - 1)$$

cuộc gọi bổ sung trong các thành phần 1 và 4. Tổng cộng giai đoạn hai tiêu thụ thêm $n - 4$ cuộc gọi nữa.

Điểm mấu chốt: do chu trình ban đầu có độ dài lớn hơn 4, chắc chắn phải tồn tại ít nhất một thành phần (giả sử là thành phần 1) mà tại đó hai cạnh đơn bám vào nó không hội tụ tại một đỉnh chung. Cấu trúc rời rạc này ép buộc phải có ít nhất một cuộc gọi nội bộ bổ sung diễn ra bên trong thành phần 1 (chèn vào giữa hai cuộc gọi 1-2 và 1-4) để làm cầu nối trung chuyển dữ liệu từ điểm nhận (của cuộc gọi 1-2) sang điểm phát (của cuộc gọi 1-4). Cuộc gọi cầu nối này hoàn toàn nằm ngoài sự tính toán của hai giai đoạn trước.

Cộng dồn tất cả các chi phí, tổng số lượng cuộc gọi tối thiểu phải là:

$$(n - 4) + (n - 4) + 4 + 1 = 2n - 3.$$

Mâu thuẫn với giả thiết $2n - 4$.

2.4. Lịch sử bài toán ghi nhận F. Harary và A. Schwenk [6] đã từng treo giải 10 USD vào năm 1974 cho ai đưa ra được lời chứng minh hoàn chỉnh cho mệnh đề này. Năm 1980, R. Bumby [4] đã chinh phục được bài toán. Ngay sau đó, D. Kleitman và J. Shearer [7] đã đề xuất một phương pháp tiếp cận đột phá khác, thậm chí lược bỏ hoàn toàn giới hạn "cuộc gọi hai chiều". Dưới đây là phần phác thảo ý tưởng cốt lõi của họ, tạm gác lại các cấu trúc xử lý tình huống cuộc gọi một chiều.

Giả sử tồn tại một sơ đồ truyền tin chỉ tiêu tốn $2n - 4$ cuộc gọi. Ta sẽ chứng minh bằng cấu trúc logic rằng sơ đồ này bắt buộc phải dung chứa một chu trình C_4 .

Cần nhấn mạnh rằng trình tự thời gian của các cuộc gọi trong một sơ đồ không bị đóng băng tuyệt đối. Tập hợp các hoán vị hợp lệ của chuỗi cuộc gọi mà vẫn bảo toàn mục tiêu truyền tin toàn cục được gọi chung là các *phép gán thứ tự* (orderings) của sơ đồ.

Khảo sát đồ thị con được tạo thành từ $n - 1$ cuộc gọi xuất hiện đầu tiên, và trích xuất ra thành phần liên thông dạng cây có kích thước nhỏ nhất. Theo lý thuyết đồ thị, thành phần dạng cây này

luôn tồn tại, bởi nếu vắng bóng nó, tổng số cạnh của đồ thị con sẽ không nhỏ hơn tổng số đỉnh. Ký hiệu S là thành phần dạng cây thỏa mãn tiêu chí cực tiểu hóa trên toàn bộ không gian các phép gán thứ tự.

Giả định S có cấu trúc gồm m đỉnh. Ta dễ dàng nhận định $m \geq 2$. Thật vậy, nếu $m = 1$ (nghĩa là S suy biến thành một đỉnh cô lập), thì để phát tán thông tin từ đỉnh cô lập này ra phần còn lại của mạng lưới, đồ thị cần huy động thêm ít nhất $n - 1$ cuộc gọi. Cộng dồn vào quỹ cuộc gọi đã tiêu tốn, tổng chi phí sẽ vượt trần $2n - 4$.

Tập trung phân tích cuộc gọi thứ $(m - 1)$ (được tính trên mốc thời gian nội bộ của S). Nếu triệt tiêu cuộc gọi này, cấu trúc S lập tức phân rã thành hai mảng S_1 và S_2 . Mở rộng không gian khảo sát lên các phép gán thứ tự có chức năng hoán đổi vị trí các cuộc gọi bên trong nội bộ S , ta có quyền thắt chặt thêm giả định: S_1 đạt ngưỡng cực tiểu theo nghĩa không tồn tại bất kỳ phép gán thứ tự nào khác có khả năng cắt gọt ra một thành phần liên thông nằm lọt thỏm (chứa thực sự) bên trong S_1 . Ký hiệu cuộc gọi thứ $(m - 1)$ mang tính quyết định này là cầu nối giữa $x_1 \in S_1$ và $y_1 \in S_2$.

Khung chứng minh được xây dựng trên 5 mệnh đề liên hoàn sau đây. Mệnh đề thứ 5 sẽ tung đòn quyết định, phơi bày sự tồn tại của chu trình C_4 ẩn bên trong sơ đồ truyền tin.

Hệ thống mệnh đề.

1. Kích thước của mảng S_1 không nhỏ hơn 2 đỉnh.
2. Giả định S_1 có quy mô j đỉnh. Khi đó, quần thể $j - 1$ cuộc gọi nội bộ trong S_1 (chắt lọc từ $m - 2$ cuộc gọi đầu của S) sẽ tạo thành một cấu trúc cây, ký hiệu là T (lưu ý: ký hiệu S_1 đại diện cho tập hợp đỉnh). Đối với một chuỗi cuộc gọi bất kỳ, ta định nghĩa một cuộc gọi giữa a và b là *cuộc gọi đặc biệt* nếu nó xuất hiện trên trục thời gian muộn hơn tất cả các cuộc gọi khác có sự góp mặt của a hoặc b . Cây T dung chứa duy nhất một cuộc gọi đặc biệt, và cuộc gọi này bắt buộc phải gắn liền với đỉnh x_1 . Ký hiệu x_2 là đối tác của x_1 trong cuộc gọi này.
3. Để khởi tạo các cấu trúc S, S_1 và cây T , hệ thống đã đốt đi $n - 1$ cuộc gọi đầu tiên. Ngân sách sơ đồ truyền tin còn lại $n - 3$ cuộc gọi, ta gom chúng vào tập hợp \mathcal{L} . Thao tác loại bỏ cạnh x_1x_2 ra khỏi T sẽ chẻ cây thành hai phần T_1, T_2 với điều kiện biên $x_1 \in T_1$ và $x_2 \in T_2$ (tham khảo Hình 1). Đối với mọi đỉnh $z \notin T_1$ (bao trùm cả các đỉnh nằm ngoài ranh giới S), luôn tồn tại một chuỗi cuộc gọi được lắp ghép hoàn toàn từ tập

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$$

đảm nhận sứ mệnh trung chuyển tin tức từ x_1 đến z . Logic này được phản chiếu tương đương cho hành trình truyền tin từ x_2 hướng ra các đỉnh ngoài T_2 . Hơn thế nữa, tập hợp cuộc gọi

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$$

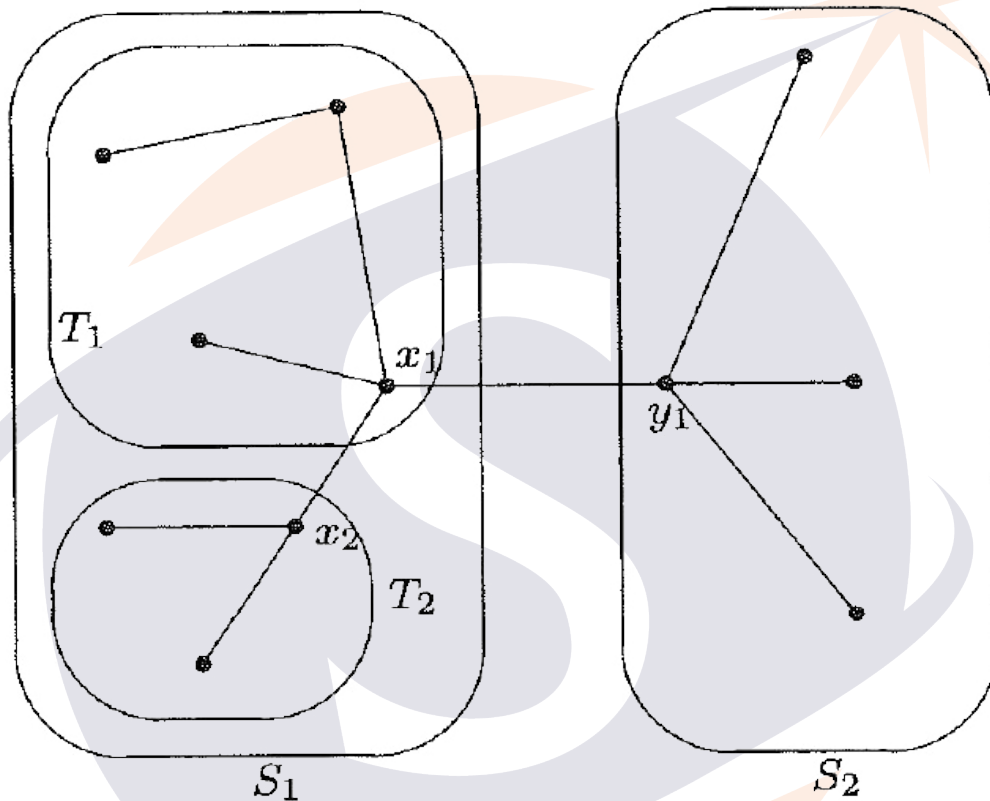
sẽ tự kết tinh thành một cấu trúc cây.

4. Một chuỗi cuộc gọi làm nhiệm vụ bơm tin tức từ các đỉnh ngoại vi đổ về x_1 (hoặc x_2) chỉ được phép sử dụng tối đa một cuộc gọi thuộc tập

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\},$$

và nếu có khai thác đặc quyền này, nó bắt buộc phải nằm ở vị trí chốt sổ của chuỗi.

5. Khảo sát một lộ trình chuyển phát tin tức từ y_1 đến x_2 ; gán nhãn y_2x_2 cho chốt chặn cuối cùng của lộ trình đó. Tiếp nối luồng dữ liệu, khảo sát lộ trình đẩy tin tức từ y_2 về x_1 ; gán nhãn y_3x_1 cho chốt chặn cuối cùng. Vận hành vòng lặp này: y_{i+1} đóng vai trò là nhân tố (khác x_1, x_2) góp mặt trong cuộc gọi chốt sổ của lộ trình dẫn tin từ y_i về x_1 (với i chẵn) hoặc về x_2 (với i lẻ). Theo nguyên lý này, toàn bộ các đỉnh y_i đều bị khóa chặt trong không gian S_2 . Khẳng định sự tồn tại của cặp chỉ số lẻ i_1 và chẵn i_2 sao cho $y_{i_1}y_{i_2}$ tạo thành một liên kết hợp lệ trong S_2 . Điểm điểm của vấn đề: các liên kết $y_{i_1}x_1$ và $y_{i_2}x_2$ là những mắt xích có thực trong sơ đồ truyền tin, và cả hai đều trễ nhịp thời gian hơn so với các cuộc gọi x_1x_2 và $y_{i_1}y_{i_2}$.



Hình 1. Phân rã cấu trúc thành phần liên thông S

Chứng minh hệ thống mệnh đề.

1. Không mất tính tổng quát, ta có thể đẩy cuộc gọi x_1y_1 xuống vị trí thứ $(n-1)$. Giả sử S_1 suy biến thành một đỉnh cô lập, điều đó đồng nghĩa với việc sau $n-2$ cuộc gọi đầu tiên, thông tin từ đỉnh này vẫn bị kẹt lại tại chỗ. Để giải phóng luồng thông tin này đi khắp mạng lưới, đồ thị cần bơm thêm ít nhất $n-1$ cuộc gọi bổ sung, đẩy tổng chi phí chạm đáy $2n-3$, mâu thuẫn.
2. Mệnh đề này là di sản trực tiếp từ điều kiện cực tiểu hóa áp đặt lên S_1 . Tính chất "cuộc gọi chốt sổ luôn mang danh hiệu đặc biệt" bảo chứng cho sự hiện diện của ít nhất một cuộc gọi đặc biệt. Giả sử nảy sinh một cuộc gọi đặc biệt ab trong S_1 hoàn toàn miễn nhiệm với x_1 , ta có thể can thiệp vào trực thời gian của S để ép ab tụt xuống vị trí $(m-1)$. Lập tức, $m-2$ cuộc gọi đầu tiên sẽ đúc ra một thành phần liên thông nằm lọt thỏm trong S_1 , giáng một đòn chí mạng vào tính cực tiểu của S_1 .

3. Trên bức tranh toàn cảnh, dòng thông tin từ x_1 chảy theo một huyết mạch nào đó để vươn tới z . Gọi ab là mắt xích đầu tiên trên huyết mạch đó bứt ra khỏi biên giới T_1 . Logic dẫn đường chỉ ra ab và toàn bộ các mắt xích kế tiếp trên huyết mạch đó đều thuộc quyền kiểm soát của tập

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}.$$

Nếu hệ thống dung chứa một huyết mạch phụ nằm trong

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$$

kích hoạt trước thời điểm ab và đảm nhận việc dẫn tin từ x_1 đến một đầu của ab , ta chỉ việc hàn nối hai huyết mạch này lại để tạo ra đường dẫn hoàn chỉnh từ x_1 đến z .

Trong kịch bản huyết mạch phụ bị bế tắc, ta tiến hành thao tác gán lại thứ tự: neo x_1y_1 ở tọa độ n , chốt x_1x_2 ở tọa độ $(n-1)$, và kéo ab (hoặc một phần tử của \mathcal{L} xuất hiện sớm hơn ab) lên tọa độ $(n-2)$ (giữ nguyên trật tự thời gian của các phần tử còn lại).

Nếu cuộc gọi thứ $(n-2)$ không bắc cầu vào S_1 (hoặc né tránh S_2), thì ngay từ điểm khởi đầu ta đã có thể chọn S_1 (hoặc S_2) làm S , tức đoạt danh hiệu cực tiểu của S . Nếu cuộc gọi thứ $(n-2)$ vắt ngang S_1 và S_2 , nó sẽ đập đổ tính cực tiểu của S_1 , bởi vì khi nhỏ bỏ chốt chặn $(n-1)$ (tức x_1x_2), hệ thống sẽ để ra một thành phần con nằm trọn trong S_1 .

Kết luận: đường truyền dẫn tin từ x_1 đến z trong ranh giới tập hợp trên luôn được đảm bảo. Quy trình đối xứng xác thực luôn đường truyền từ x_2 bao phủ mọi $z \notin T_2$. Do đó, tập hợp

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}$$

với dung lượng $n-1$ cạnh đủ sức gánh vác việc truyền tải thông tin từ nhóm trung tâm x_1, x_2 đến $n-2$ vệ tinh xung quanh, nghiêm nhiên định hình thành một cấu trúc cây khung.

4. Cây khung vừa được định hình bao trọn các cạnh của

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\},$$

đây là tập hợp các cuộc gọi xếp chốt trên trục thời gian. Cấu trúc này ép buộc: nếu một luồng thông tin dội ngược từ z về x_1 (kịch bản x_2 tương đương) có vay mượn một cuộc gọi thuộc tập này, thì mọi bước đệm phía sau cũng bị cuốn vào tập này. Khắc nghiệt thay, luồng giao thông trên cây khung chỉ được thiết kế một chiều: đẩy thông tin từ "lõi" $x_1 \cup x_2$ bắn ra ngoại vi; do đó, khe cửa hẹp duy nhất để bơm thông tin ngược vào x_1 là nhận trực tiếp từ láng giềng kề sát, ép đường truyền đó chỉ được phép dung nạp duy nhất một cuộc gọi có chứa x_1 .

5. Phân tích gốc gác, $y_1 \in S_2$. Áp dụng mệnh đề 4), trên đường truyền từ y_1 thâm nhập vào x_2 , mọi bước đệm (ngoại trừ chốt chặn cuối y_2x_2) đều phải trích xuất từ kho $n-1$ cuộc gọi đầu tiên, nghiêm cấm sử dụng x_1y_1 hay x_1x_2 . Đối chiếu với bản chất hình thành S_2 , điều này kéo theo $y_2 \in S_2$. Vòng lặp đệ quy xác nhận toàn bộ tập thể $y_i \in S_2$.

Hệ quả kéo theo: các nhịp cầu dạng y_ix_1 hoặc y_ix_2 (sinh ra trong quá trình truy vết y_i) đều trực thuộc cây khung

$$\mathcal{L} \cup \{x_1y_1, x_1x_2\}.$$

Không gian S_2 là hữu hạn, bất Dirichlet sập xuống tạo ra giao điểm $y_i = y_{i+k}$. Tham số k bị khóa ở trạng thái chẵn, vì nếu k lẻ, cặp cạnh $y_i x_1$ và $y_i x_2$ sẽ đồng thời hiện diện trên cây khung, bóp nát cấu trúc phi chu trình.

Dựng vòng lặp khép kín:

$$y_i \rightarrow y_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow y_{i+k} = y_i$$

(lưu ý: luồng chảy nội bộ trên từng phân đoạn tuân thủ trực thời gian, nhưng tính liên tục tổng thể thì không). Vòng lặp này bị nhốt trên cây, ép buộc mỗi cạnh của nó phải bị cày xới theo cả hai chiều.

Sàng lọc kỹ lưỡng, mọi đỉnh bám trên vòng lặp này đều phải điểm danh trong tập hợp:

$$\{y_j \mid i \leq j \leq i+k\}.$$

Giả sử phản chứng vòng lặp vắt qua một kẻ lạc loài a . Lôi cổ cuộc gọi mượn màng nhất có dính líu đến a trên vòng lặp, gán nhãn ab . Tại một phân đoạn di chuyển từ y_j sang y_{j+1} , dòng chảy đi theo hướng $b \rightarrow a$; kết nối ab đã là chốt chặn cuối, luồng thông tin không thể thoát ra khỏi a . Buộc $a = y_{j+1}$, phản chứng bị đập tan.

Từ đó, ta tự tin khoan vùng được cặp đôi $y_{i_1} y_{i_2}$ với thông số i_1 lẻ, i_2 chẵn (chắc chắn cấm rẽ trong S_2). Các mạch nối $y_{i_1} x_1$ và $y_{i_2} x_2$ đã có mặt sẵn trong hồ sơ của sơ đồ, vì theo sứ mệnh được giao, chúng là những người vận chuyển thông tin cuối cùng dội về x_1, x_2 .

2.5. Đáp án: Cần ít nhất

$$2n - 2$$

bức điện tín.

Bài toán này được trích dẫn từ công trình [6]. Quá trình phân tích rất đơn giản: trước khoảnh khắc người đầu tiên thu thập đủ trọn bộ tin tức, mạng lưới phải tiêu thụ tối thiểu $n - 1$ bức điện tín (để gom thông tin về một mối). Ngay sau thời khắc lịch sử đó, $(n - 1)$ thành viên còn lại mỗi người buộc phải nhận thêm ít nhất một bức điện chứa dữ liệu tổng hợp để hoàn tất nhiệm vụ. Chi phí cho khâu này là $n - 1$ bức điện. Vậy tổng chi phí không thể thấp hơn $2n - 2$.

Cấu hình minh họa: chọn một đồ thị cây bất kỳ, điều phối luồng điện tín từ các nút lá dồn về gốc, sau đó đảo chiều luồng thông tin từ gốc bung tỏa về lại các nút lá.

2.6. Đây chính là nội dung của Định lý 3 trong tài liệu [9]. Việc xây dựng ví dụ trong đó có đúng $n - 1$ người nhận lại tin tức của chính mình rất trực quan: mọi người đồng loạt gửi điện tín báo cáo cho trung tâm (Vasya), sau đó Vasya đóng gói toàn bộ dữ liệu và gửi lại một bản sao cho từng người. *Đánh giá chặn dưới.* Khởi động cơ chế phản chứng: giả sử tồn tại một sơ đồ truyền tin mà số nạn nhân nhận lại tin tức của mình ít hơn $n - 1$. Lọc ra một mạng lưới phản ví dụ có quy mô nhỏ nhất. Xác định bức điện tín khép lại toàn bộ quá trình, giả sử nó được chuyển phát từ A tới B . Rõ ràng tại thời điểm này A đã nắm giữ bức tranh toàn cảnh, nên bức điện này chứa toàn bộ thông tin. Suy ra B bị ép trở thành nạn nhân nhận lại tin tức của chính mình. Mặt khác, nếu trước đó B đã được tiếp cận một tin tức ngoại lai nào đó, thì bức điện cuối cùng này sẽ nhồi nhét tin tức đó vào đầu B lần thứ hai (vi phạm tính "tiết kiệm"). Kết luận: trước khoảnh khắc chốt sổ này, B hoàn toàn bị cách ly khỏi luồng thông tin đến, chỉ đóng vai trò người gửi. Bằng cách gạch tên B và mọi bức

diện liên quan, ta thu được một mạng lưới phản ví dụ nhỏ hơn mạng lưới cực tiểu ban đầu, mâu thuẫn.

3.1. Đáp án: Có thể, và thậm chí còn vượt qua được bài kiểm tra của mô hình NODUP khắc nghiệt hơn. Tham khảo chi tiết tại phần mở đầu lời giải bài 4.3.

3.2. Đáp án: Mạng lưới vận hành khả thi đối với các giá trị n chẵn, tham khảo [12].

Lấy mỗi người đưa tin làm trung tâm, truy xuất cuộc gọi cuối cùng mà cá nhân đó tham gia. Dưới sự kiểm soát của điều luật NOHO, các cuộc gọi chốt sổ này sẽ chẻ mạng lưới thành các cặp đôi biệt lập (vận dụng logic ở lời giải bài 1.6, bỏ qua câu chốt). Quy luật bắt cặp hoàn hảo này ép buộc tham số n phải là một số chẵn.

Tương tự, các cuộc gọi khai màn cũng chia mạng lưới thành các cặp đôi hoàn hảo.

Với mỗi n chẵn, ta dựng được một sơ đồ truyền tin tuân thủ NOHO với quỹ $2n - 4$ cuộc gọi [12, bổ đề 2.4]. Đặt tham số:

$$m = \frac{n}{2} - 1.$$

Mã hóa mạng lưới nhân sự thành hai nhóm a_i, b_i với biến chạy $i = 0, 1, \dots, m + 1$; danh sách này dường như đôi dư ra thành $n + 2$ người, nên ta thiết lập vòng lặp tuần hoàn:

$$a_0 = b_{m+1}, \quad a_{m+1} = b_0.$$

Kích hoạt chuỗi cuộc gọi khai màn (quét theo i tăng dần, tham khảo Hình 2):

$$a_i b_{m+2-i}, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1.$$

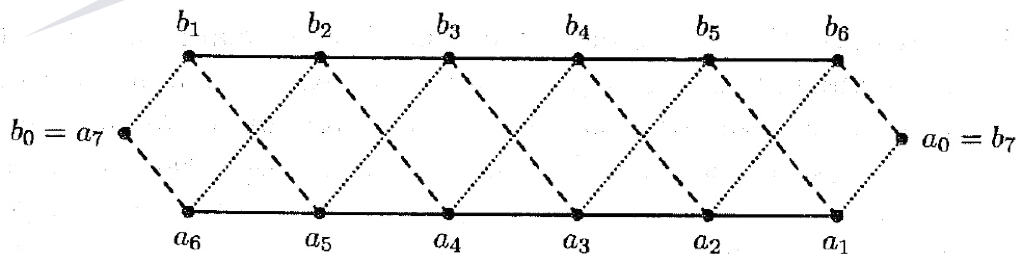
Chuyển tiếp sang chuỗi giao dịch trung gian:

$$a_i a_{i+1}, \quad b_i b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Hạ màn bằng chuỗi cuộc gọi chốt sổ:

$$b_i a_{m-i}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Kiểm tra chéo cấu trúc này xác nhận nó là một sơ đồ truyền tin hoàn toàn hợp lệ và không vi phạm điều luật NOHO.



Hình 2. Sơ đồ chuỗi gọi tối ưu dưới ràng buộc NOHO

3.3. Mọi sơ đồ truyền tin đều đòi hỏi mức cước phí tối thiểu là $2n - 4$ cuộc gọi. Bằng chứng sinh động về một cấu hình vừa thỏa mãn NOHO vừa chạm đúng vạch đích $2n - 4$ đã được trình diễn

trộn vụn ở ngay lời giải phía trên.

4.1. Đáp án: Có, tham khảo [8]. Trước khi đi sâu vào phân tích, ta cần thống nhất một số thuật ngữ học thuật.

Mảnh tin tức mà mỗi cá nhân độc quyền nắm giữ từ vạch xuất phát được gọi là *tin tức ban đầu*. Khi guồng quay truyền tin khởi động, giả định xuất hiện một tổ hợp các tin tức ban đầu sao cho: mỗi cá nhân hoặc sở hữu trọn bộ tổ hợp đó, hoặc hoàn toàn mù tịt về toàn bộ tổ hợp đó. Trong giai đoạn sau của mạng lưới, tổ hợp này được nâng cấp thành một "siêu tin tức". Cấu trúc này được giới chuyên môn định danh là *tin tức gộp* (theo [8]).

Ví dụ minh họa, xét phổ thông tin của các cá nhân dưới đây:

Người đưa tin	1	2	3	4
Tin đang nắm giữ	$\alpha\gamma$	β	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$

Trong phân bố này, khối α và γ hợp thể thành một tin tức gộp, bởi vì bất kỳ ai cũng đều có đủ cả hai mảnh ghép, hoặc không có mảnh nào. Trái lại, khối β và δ bị phá vỡ cấu trúc tin tức gộp, lý do là cá nhân số 2 chỉ nắm giữ được phân nửa thông tin của khối.

Nâng tầm bài toán lên bình diện tổng quát. Tưởng tượng một hệ sinh thái gồm các phe phái với quân số a_1, a_2, \dots, a_k , mà nội bộ mỗi phe phái đều đồng bộ hóa chung một phổ thông tin. Mạng lưới này được gán nhãn là một *tập hợp*. Các cá thể vẫn tương tác và hướng tới mục tiêu tối thượng: phổ cập toàn bộ thông tin cho toàn mạng lưới. Nếu mạng lưới này kiến tạo được một sơ đồ truyền tin không vi phạm điều luật NODUP, ta vinh danh tập hợp đó là *hệ liên kết*. Tập hợp chỉ có một phe phái duy nhất nghiêm nhiên được phong tước hệ liên kết.

Quay lại bảng phân bố trên, tập hợp gồm 3 phe phái $\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}$ bị tước đi danh hiệu hệ liên kết, vì cá nhân số 2 vĩnh viễn bị chặn cửa tiếp cận mảnh tin δ do vướng phải vòng kim cô NODUP. Đồng bộ hóa với ngôn ngữ này, bài toán gốc với n cá nhân giữ n bí mật riêng tư tương đương với một tập hợp gồm n phe phái, mỗi phe phái chỉ có một thành viên.

Trong cấu trúc của một tập hợp, nếu phổ thông tin của mỗi phe phái chỉ chứa đựng chính xác một mảnh tin (có thể là tin ban đầu hoặc tin gộp), cấu trúc đó được phân loại là *hệ đơn*. Lấy ví dụ trước làm phép đối chiếu, cấu trúc $\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}$ bị loại khỏi phân hạng hệ đơn, vì cá nhân số 4 ôm đồm hai mảnh tin không cấu thành một khối tin gộp.

Tính chất cộng gộp: nếu ta hợp nhất hai hệ liên kết có quy mô dân số cân bằng, và kho chứa tin tức ban đầu của chúng hoàn toàn phân tách (rời nhau), thì tập hợp lai tạo này vẫn bảo toàn được tính liên kết. Cơ chế vận hành: hoàn thành phổ cập thông tin nội bộ trong từng hệ, sau đó thiết lập đường dây nóng 1-1 giữa các thành viên của hai hệ. Áp dụng công thức lai tạo này, từ các viên gạch nền tảng (phe phái 1 người), ta đúc ra được các chuỗi phân bố quy mô lớn, ví dụ:

$$\begin{aligned}
 &(a, a), \quad (a, a, 2a, 4a, 8a, 16a), \\
 &\underbrace{a, a, a, \dots, a}_{2^k \text{ nhóm}}, \quad (a, a, a, a, 4a, 4a, 4a, 16a).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Khảo sát phép cộng giữa hai tập hợp

$$(a_1, a_2, \dots, a_k), \quad (b_1, b_2, \dots, b_k),$$

với điều kiện hai bên phải chia sẻ chung kho dữ liệu tin tức ban đầu. Điểm mấu chốt là với mỗi tọa độ i , nhóm a_i người ở tập hợp này và nhóm b_i người ở tập hợp kia phải sở hữu phổ thông tin trùng khớp. Quy tắc cho phép a_i hoặc b_i nhận giá trị 0; trong trường hợp lệch pha (ví dụ $a_i = 0, b_i \neq 0$), ta mặc định rằng mọi mảnh tin khởi thủy mà nhóm b_i đang nắm giữ đã hiện diện rải rác trong các nhóm khác của tập hợp thứ nhất.

Phép lai tạo:

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k)$$

chính thức được công nhận là *tổng* của hai tập hợp cấu thành.

Đưa vào thực tiễn, một tập hợp phi đơn chứa 10 người với vốn từ vựng α, β, γ :

Phổ thông tin	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
Quân số	3	3	2	2

hoàn toàn có thể được giải phẫu thành tổng của hai tập hợp con:

Tập hợp	α	β	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$
1	3	0	0	2
2	0	3	2	0

Chân lý: nếu các mảnh ghép đều có tính liên kết, thì khối tổng thể cũng mang tính liên kết. Trọng tâm bài toán giờ đây quy về việc chứng minh: một tập hợp có khả năng phân rã thành tổng của các hệ liên kết (dựa trên chung nền tảng tin ban đầu) thì bản thân nó cũng là một hệ liên kết.

Xử lý ca lâm sàng $n = 12$: ép khuôn tập hợp đơn gồm 12 nhân sự lẻ loi thành một hệ đơn đồng nhất (4, 4, 4) (công thức tóm lược: khối 2^d nhân sự có thể nén lại theo mô hình (1)). Khai triển đại số:

$$(4, 4, 4) = (1, 1, 2) + (1, 2, 1) + (2, 1, 1),$$

trong đó, mỗi số hạng phân rã đều đã được chứng minh là một hệ đơn liên kết.

4.2. Đáp án: Có.

Ta tiến hành thao tác nén các phe phái ban đầu:

$$(13, 8, 6, 5, 4, 4)$$

(ứng với phổ thông tin $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$), và ép khuôn về một hệ đơn tinh gọn hơn bao gồm 4 nhóm:

$$(13, 6, 5, 16)$$

(nhóm 16 người này chịu trách nhiệm cho khối tin gộp $\beta\epsilon\zeta$).

Hệ đơn này ngoan ngoãn phân rã thành tổng của 5 hệ liên kết:

$$(2, 1, 1, 4) \text{ (2 lần)}, \quad (4, 1, 1, 2) \text{ (2 lần)}, \quad (1, 2, 1, 4) \text{ (1 lần)}.$$

Một thủ thuật phân rã phá cách khác: khởi động bằng một cuộc gọi giao lưu giữa một đại diện phái γ và một đại diện phái ζ , bắt cặp song song với cuộc gọi giữa đại diện phái δ và phái ϵ . Giao diện mạng lưới lúc này trải ra như sau:

Tập hợp	α	β	γ	δ	ε	ζ	$\delta\varepsilon$	$\gamma\zeta$
1	2	2	1	0	0	2	1	0
2	8	4	0	2	1	0	0	1
3	1	1	4	0	0	1	1	0
4	2	1	0	2	2	0	0	1

4.3. Đáp án: Có, tham khảo [8].

Phân tích nguyên mẫu hệ đơn (3, 3, 2, 2), nơi các nhóm sở hữu phổ thông tin lần lượt là $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Kích hoạt hai cuộc gọi chéo: một người nhóm I với một người nhóm III, và một người nhóm II với một người nhóm IV. Mạng lưới lúc này nở phình ra thành một tập hợp (không còn đơn nữa) gồm 6 nhóm, và cấu trúc này dễ dàng bị bẻ gãy thành tổng của 3 hệ liên kết:

$$(3, 3, 2, 2) \rightarrow (2, 2, 1, 1, 2, 2)$$

ứng với phân bố cột $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\gamma, \beta\delta$.

Đời trọng tâm sang mô hình 20 người, ép khuôn thành hệ đơn (4, 4, 4, 4, 4). Hệ này chính là tổng của hai hệ đơn cơ sở:

$$(3, 3, 2, 1, 1), \quad (1, 1, 2, 3, 3),$$

mỗi hệ cơ sở chỉ cần tiêu tốn đúng một cuộc gọi để chuyển hóa về phom dáng (3, 3, 2, 2) đã được giải mã phía trên.

4.3 $\frac{1}{2}$. Tiến trình chứng minh tính bất khả thi của mạng lưới NODUP đối với các thông số $n = 6, 10, 14, 18$ được trích xuất từ [8, mệnh đề 4].

Mệnh đề 1 ([8], Bổ đề 1). Dưới bộ luật NODUP, loạt cuộc gọi khai màn sẽ ép toàn bộ nhân sự vào các cặp đôi hoàn hảo; định lý này cũng ứng nghiệm lên loạt cuộc gọi chốt sổ.

Chứng minh. Nửa sau của mệnh đề (về cuộc gọi chốt sổ) là hiển nhiên (khi một người đã thu thập đủ thông tin, đối tác cuối cùng của họ cũng phải đạt đến trạng thái đó; mạng lưới không dung nạp thêm bất kỳ tương tác nào của hai người này). Nửa đầu (cuộc gọi khai màn) chứng minh bằng phản chứng. Nếu B ưu tiên A làm đối tác đầu tiên, nhưng A lại chọn C cho cuộc gọi mở màn của mình. Ngay sau giao dịch đó, C đã bỏ túi tin tức của A nhưng lại trắng tay về tin của B . Chờ đến khi B kết nối với A , kể từ đó trở đi tin tức của B vĩnh viễn bám đuôi tin tức của A . Rào cản NODUP sẽ chặn đứng mọi nỗ lực của C trong việc tiếp cận tin tức của B . Phản chứng thành công. \square

Quy ước $n = 2k$. Bố trí lại trục thời gian để k cuộc gọi đầu trùng khớp với loạt khai màn của toàn mạng lưới, và k cuộc gọi sau cùng là loạt chốt sổ. Lộ trình khai màn tạo ra k khối tin gộp (đóng gói theo cặp). Dọc theo trục thời gian, đối với một cá nhân X , ta vinh danh đối tác vừa giao dịch với X là "bạn cặp" Y ; ở trạng thái này, X và Y đồng nhất về phổ thông tin.

Mệnh đề 2. Với $n > 4$, rào cản NODUP cấm bất kỳ ai ôm đồm được $k - 1$ khối tin gộp ngay trước ngưỡng cửa của cuộc gọi chốt sổ.

Chứng minh. Nếu A tích lũy được $k - 1$ khối tin gộp trước thềm chốt sổ, đối tác cuối cùng của A là B lúc đó chỉ mang trên mình hành trang gồm đúng 1 khối tin gộp. Truy vết lại, gọi B_1 là người có giao dịch đầu tiên với B , và A_1 là người giao dịch với A ở thời điểm áp chốt. Hệ lụy từ việc này là: hành trình của 2 mảnh tin thuộc nhóm B và B_1 vĩnh viễn bị chôn vùi trong số ít ỏi những nhân vật này, đánh sập mục tiêu phổ cập thông tin toàn cầu. \square

Chập hai mệnh đề lại, hồ sơ $n = 6$ bị kết án tử: hậu khai màn sinh ra các khối tin gộp theo cặp; bước vào vòng chốt sổ, hai đối tác chỉ có thể rơi vào hai cực 2 và 4 tin, vi phạm trực tiếp lệnh cấm của Mệnh đề 2.

Đào sâu hồ sơ $n = 10$. Mệnh đề 2 bóp nghẹt cuộc gọi chốt sổ vào khuôn mẫu: một phe cầm 2 khối tin gộp, phe kia ôm 3 khối tin gộp. Hệ quả là ngay trước 5 cuộc gọi chốt sổ, trên bản đồ có đúng 5 cá nhân đang thủ sẵn 3 khối tin gộp. Tìm kiếm "bạn cặp" cho mỗi người trong nhóm 5 người này, ta thấy họ chỉ có thể bắt cặp luẩn quẩn bên trong nội bộ nhóm 5 người (bởi người đã vươn tới mốc 3 khối tin thì chỉ còn cửa đợi tham gia vòng chốt sổ). Nhiệm vụ chia 5 người thành các cặp đôi hoàn hảo vấp phải bức tường chắn lẻ. Vô lý.

Hồ sơ $n = 14$ (gánh 7 khối tin gộp). Mệnh đề 2 tước quyền bất kỳ cá nhân nào bước vào vòng chốt sổ với đúng 6 tin. Dập khuôn logic chắn lẻ phía trên, kịch bản hai phe cùng thủ 3 hoặc 4 tin cũng bị phá sản (vì không thể có phép ghép cặp hoàn hảo trên tập hợp 7 người mang 4 tin). Số lượng cặp (2,5) phải duy trì tính chẵn, nên số lượng cặp (3,4) bị đẩy vào thế lẻ; để gỡ nút thắt chắn lẻ này, phải xuất hiện một nhân tố cầm 4 tin mà "bạn cặp" của họ tranh thủ nhặt thêm được mảnh tin thứ 5 ngay sát giờ G.

Ký hiệu hóa: A mang các mảnh 1,2,3,4 vào vòng chốt sổ; bạn cặp B sau khi chia tay A đã kịp vớt thêm mảnh số 5 (từ C , kẻ chỉ có đúng 1 mảnh tin này). Điểm danh đối tác chốt sổ của B và C là D và E , hai kẻ này đều chỉ mang trên mình mảnh 6 và 7; ta ngầm hiểu họ đã trao đổi chúng cho nhau. Nhóm F, G, H là những kẻ hấp thụ các mảnh 5,6,7 ở giai đoạn đầu (nằm ngoài danh sách vừa kể). Lần mò đường đi, đối tác chốt sổ của A bị ép phải nạp đủ combo 5,6,7. Khai thác tính đối xứng của nhóm F, G, H , ta cố định lộ trình: F gọi G , tiếp đến F gọi H , và F là người đối mặt A trong vòng chốt sổ. Trớ trêu thay, để G tiếp thu được khối tin gộp do H tạo ra ban đầu, G phải nối máy trực tiếp với H ; hậu quả là G sẽ bị dội lại toàn bộ lượng thông tin mà F đã bơm vào trước đó, phá vỡ tan tành rào cản NODUP.

Trường hợp $n = 18$ còn phát sinh thêm nhiều ung nhọt hệ thống, chi tiết tham khảo [8].

4.4. Đáp án: Mô hình khả thi với các mốc

$$n = 1, 2, 4, 8, 12, 16$$

và rộng cửa cho mọi n chẵn ≥ 20 .

Mốc cơ sở $n = 1, 2$ vượt ải dễ dàng. Khảo sát vùng $n \geq 3$. Trích xuất kết quả từ bài 4.3 $\frac{1}{2}$: NODUP đóng sầm cửa với n lẻ, cũng như các hố đen $n = 6, 10, 14, 18$.

Mệnh đề ([8], Bổ đề 5, 6 và Mệnh đề 2). Rào cản NODUP bị chọc thủng khi n chia hết cho 4.

Chứng minh. Bơm nhiên liệu bằng phương pháp quy nạp.

Tập hợp n là lũy thừa của 2 được bảo kê bởi cấu hình (1). Hồ sơ $n = 12, 20$ đã được thanh lý ở các bài trước. Dàn móng quy nạp được đổ tông bởi các mốc $n = 4, 8, 12, 16, 20$.

Bước nhảy quy nạp: Phóng tầm nhìn $n \geq 24$. Nếu n chia hết cho 12, chẻ nhỏ thành 3 tập hợp đồng dạng; quy mô mỗi nhóm đều là bội của 4 và bị thu hẹp lại, nên lực lượng quy nạp đã sẵn sàng chống lưng cho sơ đồ NODUP nội bộ. Cấu trúc kết tinh thành hệ đơn $(4a, 4a, 4a)$ với $a = n/12$, sau đó làm vỡ vụn thành a hệ con $(4, 4, 4)$.

Nếu n từ chối chia hết cho 12, phân tách phần dư $n = 12a + r$ với $r = 4$ hoặc 8.

Với $r = 4$, nhóm quân thành 3 cánh:

$$(4(a-1) + 4, 4(a-1) + 4, 4(a-1) + 8).$$

Luật quy nạp bảo vệ sơ đồ NODUP trong từng cánh quân, và toàn bộ hệ thống hóa thân thành $a-1$ hệ con $(4, 4, 4)$ đi kèm một hệ $(4, 4, 8)$.

Với $r = 8$, định dạng lại $n = 12(a-2) + 28$ và triển khai đội hình:

$$(4(a-2) + 8, 4(a-2) + 8, 4(a-2) + 12).$$

Mệnh đề ([8], Bổ đề 7, 8, 9 và Mệnh đề 3). Dấu ấn:

$$n \equiv 2 \pmod{4}, \quad n \geq 22,$$

chính thức mở cửa cho NODUP.

Chứng minh (Khung sườn). Phân tích tầng sâu có tại [8].

Vấn mượn lực từ cỗ máy quy nạp. Khâu dọn nền tốn khá nhiều sức lực: rà soát thủ công sự hiện diện của sơ đồ NODUP trên dải chẵn hẹp:

$$20 \leq n \leq 62.$$

Ý tưởng đột phá: nếu n chia hết cho 16, chỉ đều thành 4 cánh quân để dựng lên hệ đơn liên kết $(4a, 4a, 4a, 4a)$ với $a = n/16$ (vì khu vực chia hết cho 4 đã được bình định xong).

Ở đây, khi n ngoan cố không chịu chia hết cho 4, thủ thuật tách phần dư lại được trưng dụng. Viết lại:

$$n = 16a + r, \quad r \in \{2, 6, 10, 14\}.$$

Nếu ta giải phẫu thành công:

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

để từng khối $4a + r_i$ đều được cấp chứng chỉ NODUP và tập thể (r_1, r_2, r_3, r_4) tự gắn kết, thì bài toán khép lại: chia quân thành các mảng

$$(4a + r_1, 4a + r_2, 4a + r_3, 4a + r_4)$$

và mô phỏng nó dưới dạng tổng của hai khối $(4a, 4a, 4a, 4a)$ và (r_1, r_2, r_3, r_4) .

Khó khăn nằm ở chỗ các mảnh vỡ 2, 6, 10, 14 quá nhỏ bé. Cứu vãn bằng cách mượn thêm vài khối 16:

$$n = 16(a-k) + (r + 16k).$$

Neo tham số $k = 3$, phần dư được thổi phồng lên mức an toàn:

$$50, 54, 58, 62.$$

Lấy mẫu số 50, hệ gắn kết tương ứng là $(8, 8, 12, 22)$; tiến hành bung biểu thức:

$$(4(a-k) + 8, 4(a-k) + 8, 4(a-k) + 12, 4(a-k) + 22).$$

Các cánh quân chủ lực được quy nạp chống lưng, phần còn lại gánh vác bởi tổng của $(4, 4, 4, 4)$ và $(8, 8, 12, 22)$. Quy trình được copy-paste cho 3 phần dư còn lại 54, 58, 62.

4.4 $\frac{1}{2}$. (Trích dẫn [10], Bổ đề 2.5). Một định lý cốt lõi của NODUP khẳng định loạt cuộc gọi khai màn sẽ cưỡng ép mạng lưới vào các cặp đôi hoàn hảo (xem chi tiết ở phần dạo đầu của bài 4.3 $\frac{1}{2}$). Đẩy mạng lưới vào bẫy phản chứng: giả định tồn tại cá nhân A chây lười chỉ nhắc máy đúng 2 lần. Lần đầu A gọi B , tạo ra khối hợp thể tin tức không thể tách rời giữa A và B . Lần thứ hai A gọi C , lúc này dung lượng thông tin của C đã đạt ngưỡng gần MAX (chỉ thiếu vắng đúng hai mảnh ghép của A và B). Truy ngược lại, nếu D là đối tác gọi cho C ở nhịp trước, thì D cũng đang kẹt ở trạng thái tương tự. Con đường duy nhất để D chạm tay tới hai mảnh ghép còn thiếu là kết nối trực tiếp với B ở thời điểm B chỉ có trong tay hai mảnh ghép A, B (chưa bị tạp nhiễm thông tin khác). Nhưng nếu kịch bản này xảy ra, hệ thống sẽ rơi vào trạng thái nghẽn mạch: hai mảnh ghép A, B vĩnh viễn không thể phát tán ra cho $n - 4$ cá nhân còn lại. Chuông báo mâu thuẫn reo lên.

4.5. Lời sấm truyền này đã được kiểm chứng trong sổ tay của D. West [13] và báo cáo của A. Seress [10, §3].

Mệnh đề. Với định dạng $n = 4k$, mức sàn chi phí được thiết lập ở:

$$9k - 6$$

cuộc gọi.

Chứng minh. Băm mạng lưới thành k ô, mỗi ô giam giữ 4 người. Tại các ô nội bộ này, triển khai một loạt cuộc gọi để phổ cập thông tin cho các thành viên; hóa đơn thanh toán cho mảng này là $4k$ cuộc gọi.

Phân rã tiếp toàn bộ mạng lưới thành 2 bán cầu, mỗi bán cầu dung nạp $2k$ người, và mỗi bán cầu đều phải nắm giữ một cặp "trùm thông tin" (nắm trọn bộ tin tức của ô thứ $i, i = 1, \dots, k$). Tổ chức giao dịch tại bán cầu thứ nhất nhằm đúc ra các cặp bài trùng, mỗi cặp cách vạch đích hoàn hảo đúng 1 mảnh tin (thiếu một mảnh). Tương tự cho bán cầu thứ hai. Bước cuối cùng, tổ chức cuộc gặp lịch sử giữa hai bán cầu để chắp vá mảnh ghép còn khuyết; khâu này đội giá thêm $2k$ cuộc gọi. Thách thức còn lại là dựng lên cấu hình kiến trúc ở bán cầu thứ nhất với hầu bao $3k - 6$ cuộc gọi. Bản vẽ kỹ thuật được trình chiếu ở Hình 3-4. Dàn xếp quân số ở bán cầu thứ nhất thành một vòng tròn.

Phát pháo lệnh: người số 2 gánh vác $k - 2$ cuộc gọi: rải thăm gọi cho các cá nhân mang số thứ tự lẻ (miễn trừ người thứ $2k - 1$), theo lộ trình:

$$3, 5, 7, \dots$$

(Tham chiếu Hình 3 bên trái).

Tiếp quản: người số $2k - 1$ thâu nốt $k - 2$ cuộc gọi: rải thăm gọi cho các cá nhân mang số thứ tự chẵn (miễn trừ người số 2), theo lộ trình lùi:

$$2(k - 1), 2(k - 2), \dots$$

(Tham chiếu Hình 3 bên phải).

Hệ quả là đúc ra được 4 cá nhân chỉ cách vạch đích hoàn hảo 1 mảnh tin: người số 2 và $2k - 3$ (thiếu mảnh thứ k); người số 4 và $2k - 1$ (thiếu mảnh thứ 1) (Tham chiếu Hình 4).

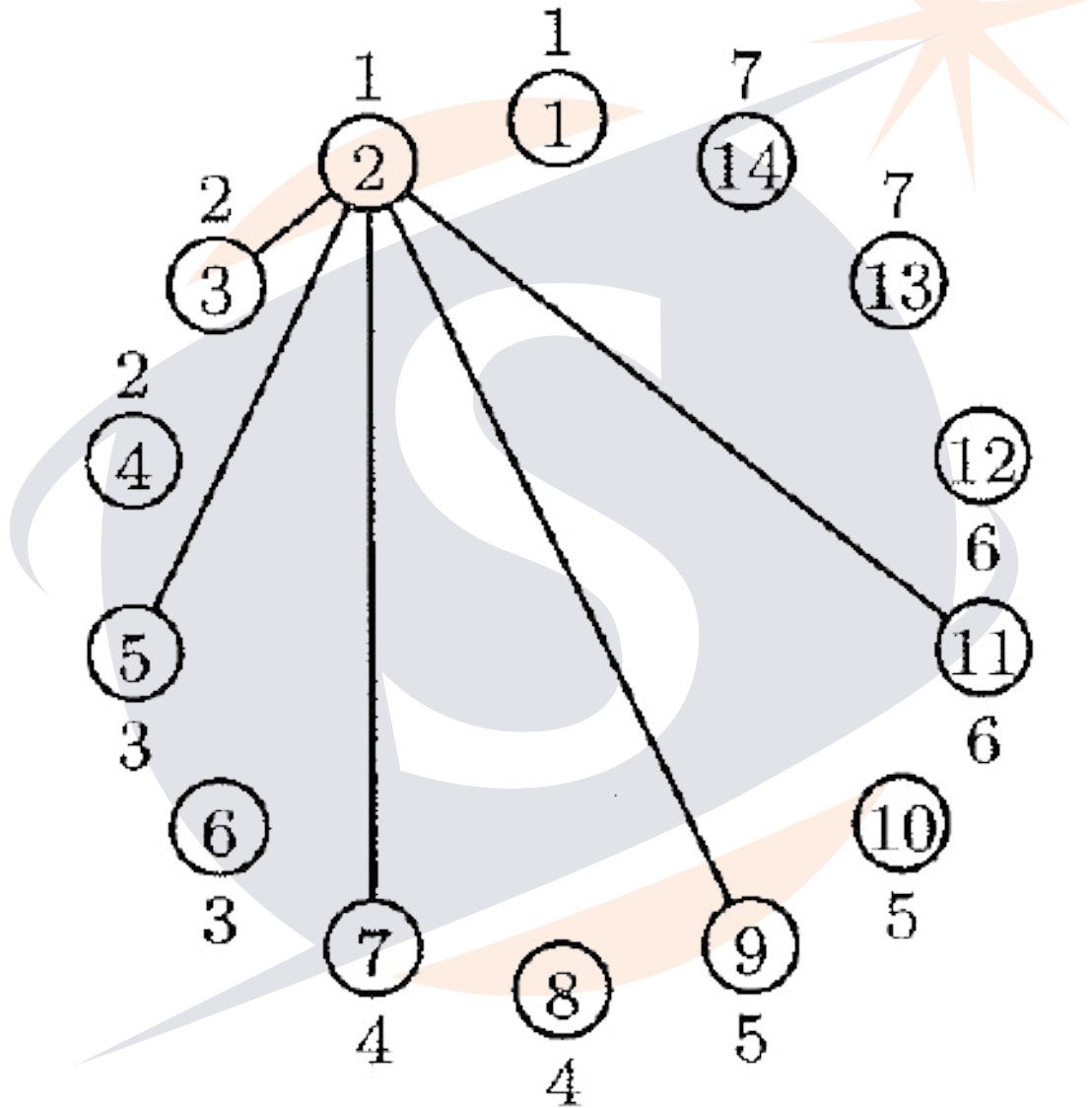
Xử lý nốt đám tàn dư: với $i = 2, \dots, k - 1$, thiết lập đường truyền nối người sở hữu khối tin:

$$1, 2, \dots, i - 1$$

sang người nắm giữ khối tin:

$$i + 1, i + 2, \dots, n.$$

Sản phẩm đầu ra là các cặp đôi cách vạch đích đúng mảnh tin thứ i . Chi phí cho mảng này là $k - 2$ cuộc gọi.



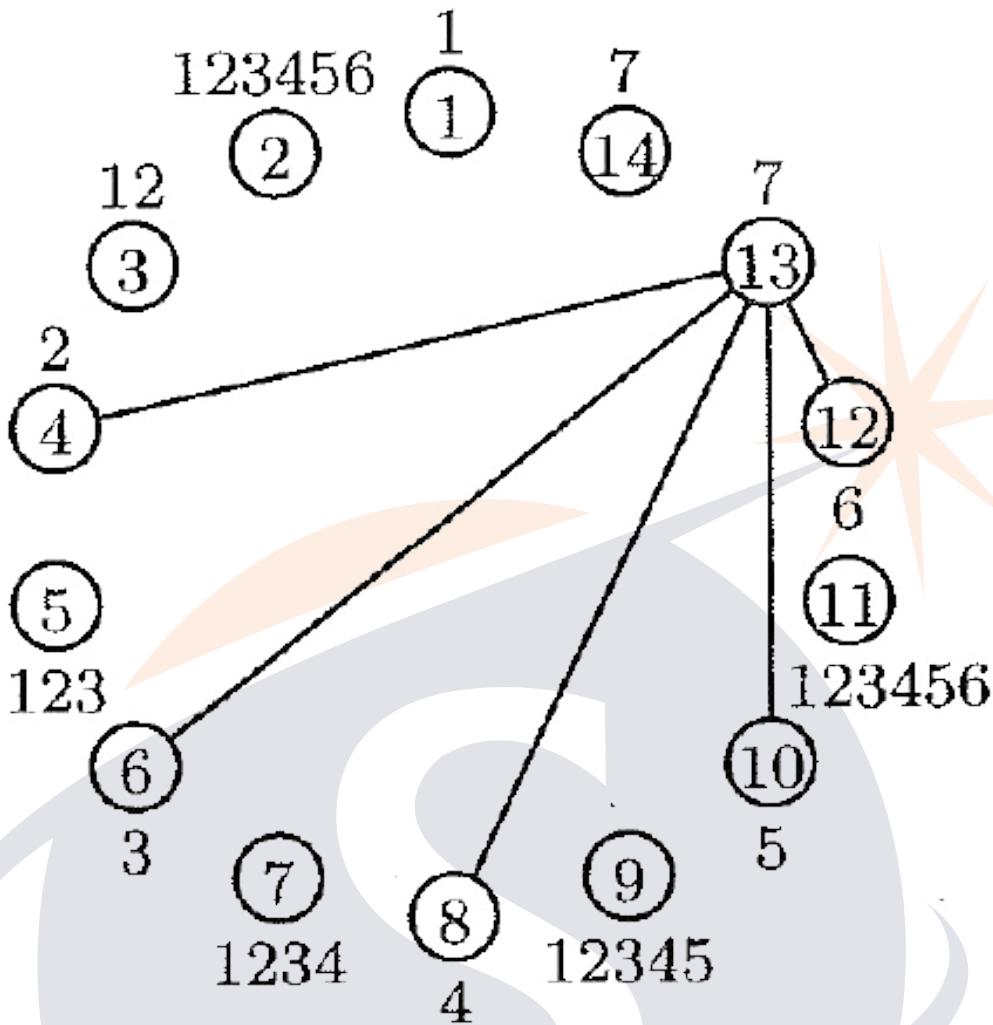
Hình 3. Lịch trình cuộc gọi của người số 2 (trái) và người số $(2k - 1)$ (phải). Bên cạnh mỗi nút là các khối tin gộp mà họ nắm giữ trước các cuộc gọi thể hiện trong hình.

4.6. Chân lý này đã được đóng dấu trong [10, Định lý 4.1].

5.1. a) **Đáp án:**

$$(n - 1)(k + 1)$$

bước điện tín.



Hình 3 (tiếp).

Đúc kết từ [2, Định lý 4.1].

Cấu hình khả thi. Mỗi quân nhân đệ trình $k + 1$ bức điện tín lên tổng tư lệnh.

Đánh giá chặn dưới. Để chọc thủng hàng rào phòng ngự (cắt k đường truyền), mỗi quân nhân buộc phải huy động ít nhất $k + 1$ đường dây liên lạc.

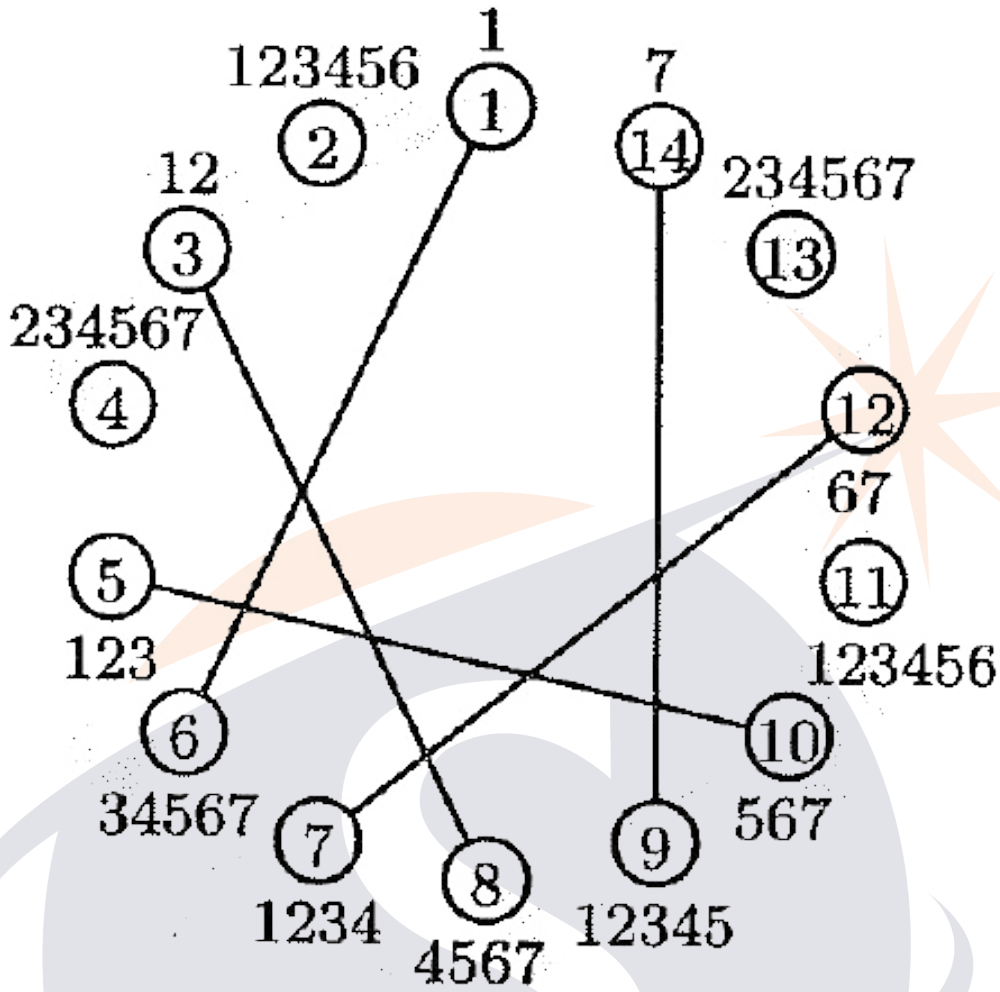
b) **Đáp án:**

$$(k + 2)n - 2$$

bức điện tín.

Đúc kết từ [2, Định lý 4.2]. Đồ thị truyền tin vứt bỏ giới hạn cấm cạnh bội. Khắc dấu mốc thời gian lên từng cạnh thông qua hệ thống trọng số (thực): thời gian diễn ra càng muộn, trọng số gánh vác càng cao. Sự xuất hiện của các trọng số bằng nhau là điều hiển nhiên đối với các cuộc gọi có thể hoán đổi vị trí trong lịch trình. Một tuyến đường truyền tải được vinh danh là *đường đi tăng* nếu dọc theo tuyến đó, trọng số các cạnh không ngừng leo thang.

Cấu hình khả thi. Phác thảo một đồ thị có hướng sao cho ma trận đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có ít nhất $k + 1$ *đường đi tăng* hoàn toàn độc lập (không xài chung cạnh). Từ đỉnh i mốc nổi



Hình 4. Lịch trình các cuộc gọi còn lại ở bán cầu thứ nhất

sang đỉnh $i + 1$ bằng $k + 2$ cạnh gánh vác trọng số:

$$i, n + i, 2n + i, \dots, (k + 1)n + i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2),$$

từ đỉnh $n - 1$ lao thẳng vào đỉnh n bằng $k + 1$ cạnh trọng số:

$$n - 1, 2n - 1, \dots, (k + 1)n - 1,$$

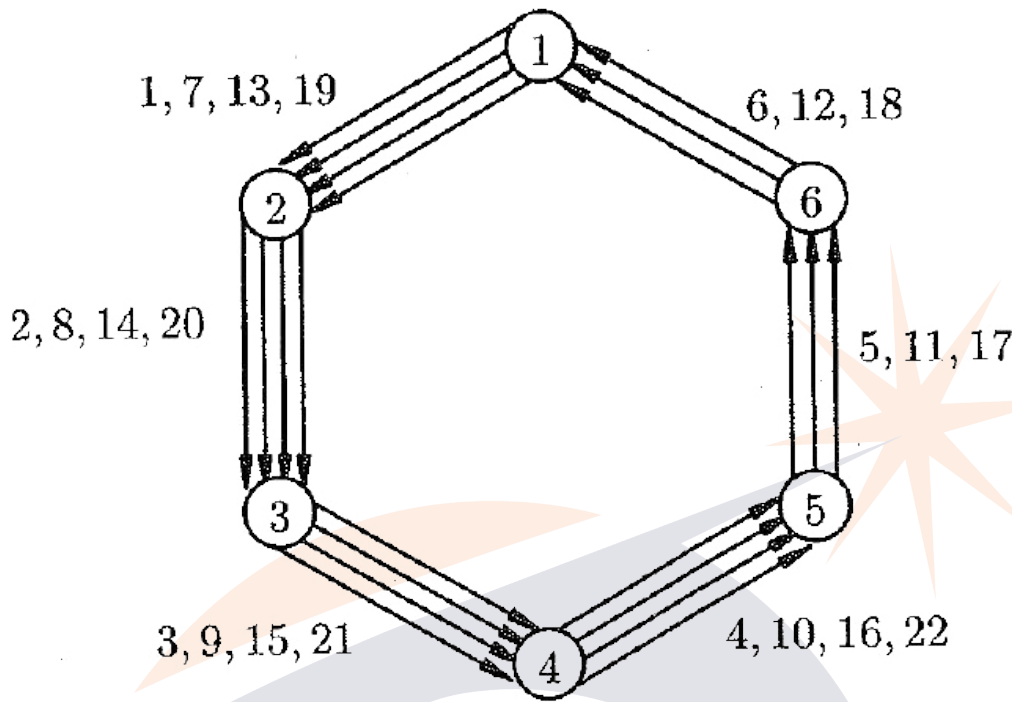
và nhịp cầu hồi quy từ đỉnh n đổ về đỉnh 1 được lát bằng $k + 1$ cạnh trọng số:

$$n, 2n, \dots, (k + 1)n.$$

Bản thiết kế Hình 5 chiếu xạ cấu hình khi $n = 6, k = 2$.

Đánh giá chặn dưới. Khảo sát một đồ thị truyền tin sở hữu siêu năng lực miễn nhiệm với k vết chém (xóa k cạnh). Phân lập H là đồ thị con sinh ra từ $n - 2$ cạnh đầu tiên; hiển nhiên H không thể là khối liên thông. Nghịch lý này ép buộc mỗi đỉnh phải trang bị cho mình tối thiểu $k + 1$ vũ khí (cạnh) nằm ngoài ranh giới H . Bồi đắp lại, kho vũ khí của đồ thị không thể thủng ngưỡng:

$$(n - 2) + (k + 1)n.$$



Hình 5. Mô hình bưu điện gián đoạn

5.2. Kết quả được cấp bằng sáng chế tại [2, Định lý 2.1].

Đầu vào cho cấu hình khả thi là một đồ thị T_n gồm n đỉnh, quy hoạch đỉnh tổng tư lệnh ở bậc 0 hoặc 1, ép các đỉnh còn lại vào khuôn bậc k với rào cản $k \leq n - 2$. Kết cấu của T_n bám theo nhịp chẵn lẻ của n, k . Đánh mã số các đỉnh, đưa tổng tư lệnh lên ngôi vương ở đỉnh n .

Nếu tham số k chẵn, kéo dây giữa i, j ($1 \leq i < j \leq n - 1$) khi thỏa mãn:

$$((i - j) \bmod (n - 1)) \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k}{2} \right\}.$$

Trường hợp k lẻ, n chẵn, dây kéo khi:

$$((i - j) \bmod (n - 1)) \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k - 1}{2} \right\},$$

và dán thêm một lớp ghép cặp hoàn hảo bao trùm lên n đỉnh.

Hệ sinh thái n, k cùng lẻ kích hoạt dây khi:

$$((i - j) \bmod (n - 1)) \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k - 1}{2}, \frac{n - 1}{2} \right\}.$$

Xoay lăng kính về lại bài toán gốc.

a) Đồ thị phải gồng gánh sức chịu đựng trước k vết chém mà vẫn phải giữ được trạng thái liên thông, nên bức tường bậc ở mỗi đỉnh không thể tụt dưới $k + 1$. Khối lượng tổng bậc tỷ lệ thuận gấp đôi số lượng cạnh, ép mức sàn cuộc gọi lên:

$$\left\lceil \frac{k + 1}{2} n \right\rceil.$$

Nhiệm vụ là phải nặn ra một đồ thị thực thể đảm đương được vai trò truyền tin về đích và thỏa mãn chuẩn bậc $k + 1$ (những ca khó đỡ chẵn lẻ có thể được chằm chước đẩy 1 đỉnh lên bậc $k + 2$). Vùng $k \geq n - 1$ đã được mở khóa; vùng nhỏ hơn đòi hỏi xiết chặt bộ luật gán trọng số.

Thực hiện phép chia:

$$k + 1 = a(n - 1) + b, \quad a > 0, \quad 0 \leq b < n - 1.$$

Nhào nặn đồ thị thành khối tổng hợp của a mạng đồ thị đầy đủ K_n và một mạng R neo ở bậc b cho mọi đỉnh, nối lỏng độc quyền cho đỉnh tổng tư lệnh ở bậc b hoặc $b + 1$. Nguồn nguyên liệu cho R có thể bòn rút từ bản thiết kế T_{n+1} và hợp thể đỉnh tổng tư lệnh với một lính lác.

Phân phối trọng số: hạng lông cho mảng R (né tổng tư lệnh); hạng trung cho mảng K_n (né tổng tư lệnh); hạng nặng dành riêng cho các tuyến đường hướng về tổng tư lệnh. Thứ tự nội bộ trong từng hạng là tự do. Cấu hình này bảo lãnh cho mỗi đỉnh có $k + 1$ đường thoát thân về trung tâm không đụng chạm nhau. Hệ quả: k vết chém vô dụng. Các đỉnh quy chuẩn ở bậc $k + 1$; tổng tư lệnh đóng đô ở bậc $k + 1$ hoặc $k + 2$.

b) Tại vùng $k = 0$, duy trì mạch liên thông đòi hỏi lượng máu tối thiểu là $n - 1$ cạnh; một đồ trúc cây có gốc cắm tại trung tâm với nhịp trọng số tăng dần là một bằng chứng sống.

Rẽ nhánh sang $1 \leq k < n - 1$. Quét từ một lính lác v , chốt lại cạnh chứa trọng số cực đại là ℓ . Nếu lộ trình tăng tiến có đi ngang qua cạnh này, nó buộc phải thâm nhập vào v bằng một trọng số thấp bé hơn rồi mới phóng ra bằng ℓ . Bẻ lái cạnh ℓ hướng thẳng vào đại bản doanh. Số lượng vũ khí bảo toàn, và hệ thống phòng ngự trước k vết chém vẫn hoạt động trơn tru.

Phủ sóng chiến thuật này lên toàn mạng lưới, mọi lính lác đều có một đường dây nóng với đại bản doanh. Lực lượng tổng tư lệnh phình to lên mức $n - 1$. Cộng dồn tổng bậc:

$$\# \text{cuộc gọi} \geq \left\lceil \frac{(k + 1)(n - 1) + (n - 1)}{2} \right\rceil.$$

Bản thiết kế cấu hình khả thi: lính lác neo bậc $k + 1$, tổng tư lệnh vươn lên $n - 1$ hoặc n (đắp thêm cạnh bội để bù hao chẵn lẻ). Lấy khuôn mẫu T_n , gán cho nó hạng lông trọng số, rồi đắp lên bằng những tuyến đường nóng nối vào đại bản doanh ở hạng nặng trọng số.

5.3. Trích xuất từ [2, Định lý 3.1]

a) Trưng bày đồ án kiến trúc đồ thị phù hợp. Xét vùng n lẻ. Tại các đỉnh lẻ (miễn trừ 1), phóng k mũi tên về đỉnh 1 với trọng số:

$$3, 5, \dots, 2k + 1,$$

và tại các đỉnh chẵn, phóng $k + 1$ mũi tên về đỉnh 1 với trọng số:

$$2, 4, \dots, 2k + 2.$$

Kế tiếp, giữa hai đỉnh kè i và $i + 1$, giăng hai nhịp cầu mang trọng số 1 và $2k + 3$.

Sự va chạm trọng số là có chủ đích. Trọng số đại diện cho một khối thời gian: bên trong khối, không gian hoán vị là tự do, nhưng trật tự giữa các khối được bảo vệ nghiêm ngặt: $i < j$. Bản vẽ Hình 6 chiếu xạ cấu hình $n = 7, k = 3$. Bộ máy kiểm duyệt xác nhận: từ mỗi đỉnh phóng ra, luôn có $k + 1$ tuyến đường xuyên phá không dẫm chân lên nhau.

Tràn sang vùng n chẵn, đính kèm thêm một vệ tinh mới vào mạng lưới bằng $k + 1$ nhịp cầu hướng về đỉnh 1, với hệ trọng số:

$$2, 5, 3, 5, 5, 5, 7, 5, \dots, 2k + 1, 5.$$

b) Đặt lên bàn cân $\tau(n, k)$ và $\mu(n, k)$. Gắn máy G cho một hệ thống truyền tin bất khuất trước k vết chém. Chẻ đôi lịch trình tại nhất cắt r cuộc gọi đầu; phần dư thừa tạo thành bộ khung H phủ trên cùng mạng lưới.

Quét một đỉnh ngẫu nhiên v trong H . Để húp trọn thông tin (bất chấp k vết chém), v chỉ việc hấp thụ r cuộc gọi đầu và tận dụng các mạch máu trong thành phần liên thông của nó ở H . Khối lượng tài sản "hữu ích" này bị chặn dưới bởi $\mu(n, k)$. Đặt tham số tối ưu:

$$r = \mu(n, k) - \xi.$$

Công thức cốt lõi:

$$|E(G)| = r + |E(H)|.$$

Để thiết lập sàn cho $|E(H)|$, nén v vào thành phần liên thông bản cùng nhất với ℓ đỉnh. Khối lượng phân mảnh sẽ nảy nở lên không dưới n/ℓ , kéo theo:

$$|E(H)| \geq n - \frac{n}{\ell}$$

(vế phải biểu trưng cho số cạnh tối thiểu khi mọi phân mảnh đều hóa thành dạng cây cở ℓ). Song hành với đó, $\ell \geq \xi$, bởi nếu không, dạ dày thông tin của v sẽ không được lấp đầy. Suy ra:

$$|E(H)| \geq n - \frac{n}{\xi}.$$

Hội tụ lại:

$$|E(G)| \geq (\mu(n, k) - \xi) + \left(n - \frac{n}{\xi}\right).$$

Đáy của vế phải được chạm tại $\xi = \sqrt{n}$, đúc kết thành:

$$|E(G)| \geq \mu(n, k) + n - 2\lceil\sqrt{n}\rceil.$$

5.4. Trích xuất từ [3, Định lý 3.2].

a) Đánh giá chặn trên được bảo kê bởi một ví dụ kinh điển. Khởi tạo mạng R (đồ thị hoặc đa đồ thị) chính quy, hoặc tiệm cận chính quy trên n đỉnh, ôm trọn bậc k (dung túng cho 1 đỉnh xé rào lên $k+1$). Vận hành hệ thống: đốt $2n-4$ cuộc gọi đầu để kiến tạo phương án truyền tin siêu tốc; phần hậu kỳ được nhường chỗ cho các cuộc gọi nương theo cấu trúc của R (thứ tự tự do). Sản phẩm đầu ra đạt chứng nhận "đáng tin cậy" theo tiêu chuẩn đề bài. Cước phí tổng cộng:

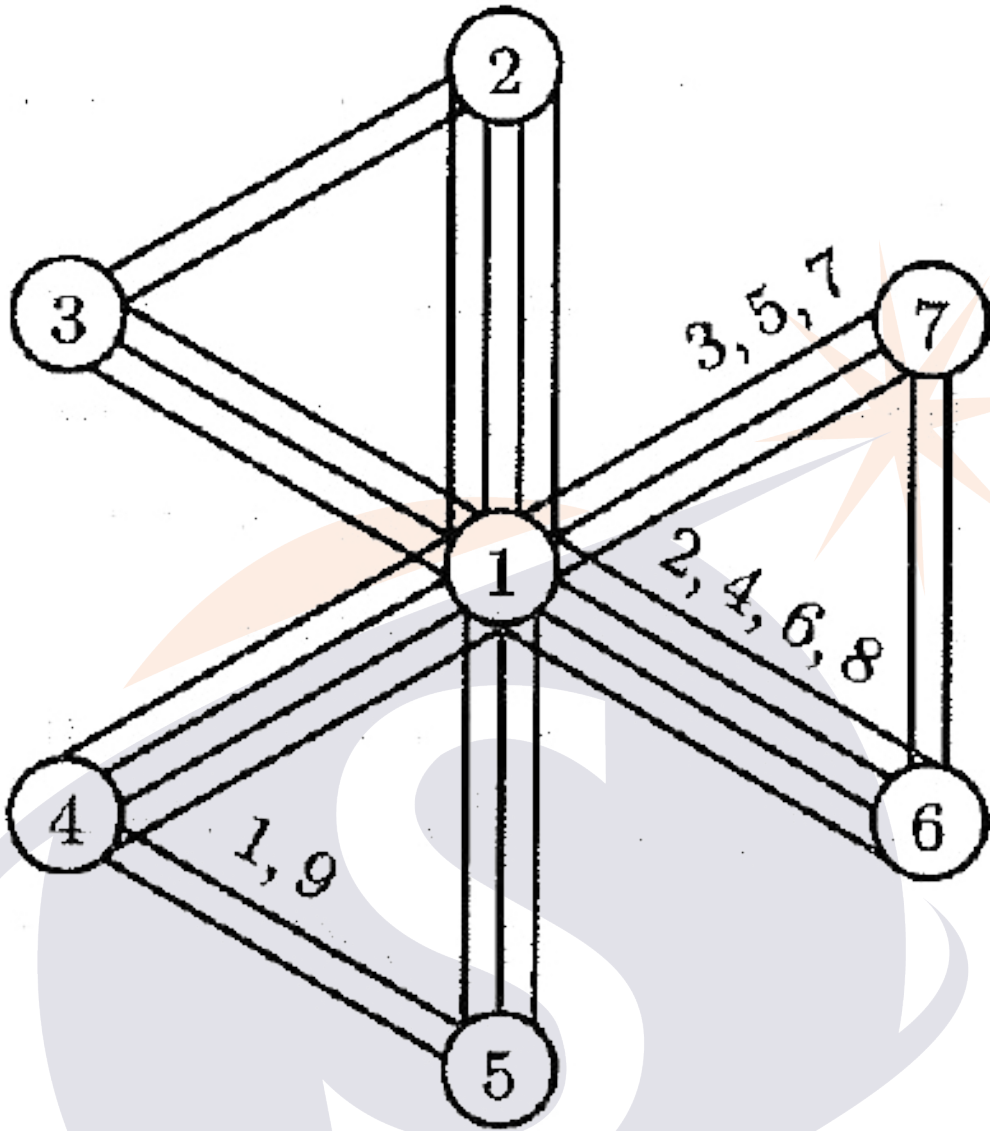
$$\left\lceil \frac{(k+4)n}{2} \right\rceil - 4.$$

b) *Bổ đề 1* ([3], Bổ đề 3.1). Phủ một hệ trọng số lên đồ thị cây T cở n đỉnh. Với lăng kính tại u , mã hóa r_u là số lượng đỉnh bành trướng tối đa có thể vươn tới bằng *đường đi tăng*. Gán:

$$R(T) = \min_u r_u.$$

Và đẩy $r(n)$ lên đỉnh vinh quang của $R(T)$ trên toàn cõi các cây có hướng n đỉnh. Tuyên án:

$$r(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor.$$



Hình 6. Minh họa một cấu hình đồ thị truyền tin

Chứng minh Bổ đề 1. Ép cây T vào khuôn cực trị $R(T) = r(n)$. Rút thanh gươm xy (mang trọng số khùng nhất) chém đôi T thành hai nửa T_x, T_y ($x \in T_x, y \in T_y$). Giả sử T_x lép vế trước T_y về quân số, suy ra:

$$R(T_x) \leq r\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right).$$

Nhắm mục tiêu $u \in T_x$ chạm đỉnh $R(T_x)$. Chạy trong mê cung T , luồng sóng từ u bị bức tường xy dội ngược, không thể lún sâu vào T_y xa hơn đỉnh y . Suy ra:

$$r(n) = R(T) \leq r_u + 1 = R(T_x) + 1 \leq r\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1.$$

Khóa chốt tại mốc $r(1) = 0$, kéo theo:

$$r(n) \leq \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Bản vẽ cấu hình cực trị đạt đẳng thức được nhân bản bằng quy nạp: copy hai mô hình đỉnh cao của thế hệ $n - 1$, dán chúng lại với nhau bằng một đường nối siêu trọng số ở rễ. \square

Bổ đề 2 ([3], Hệ quả 2.1). Phủ hệ trọng số lên (đa) đồ thị G trên n đỉnh. Ghim tại u . Yêu cầu: mọi ngã đường nhắm tới $v \neq u$ đều phải chấp vậ từ ít nhất k đường đi tăng phân kỳ ở bước chân cuối. Lọc ra cấu trúc G gầy gò nhất (ít cạnh nhất) thỏa mãn yêu cầu. Phán quyết G sở hữu:

$$\left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil$$

cạnh.

Chứng minh Bổ đề 2. Khung xương của G là sự hợp thể giữa một cây khung và một đồ thị k -chính quy (hoặc tiệm cận k -chính quy) lợp trên không gian các đỉnh ngoại trừ u . Công thức là hệ quả tất yếu.

Nặn cây khung: ánh xạ vào mỗi đỉnh $v \neq u$, ghim cạnh e_v (mang trọng số bèo nhất) bám trên mọi đường đi tăng từ u đến v . Gom nhặt $n-1$ cạnh được ghim; chúng tỏa nhánh ôm trọn không gian (cạnh bèo nhất tại u cũng bị bắt cóc), tạo hình cây khung hoàn chỉnh.

Thêm vào đó, e_v là sợi dây duy nhất neo vào v đủ tư cách hiện diện trên đường đi tăng từ u . Thật vậy, nếu có sợi e_w lân la vào v và đòi ké trên đường truyền, nó buộc phải quá cảnh tại w với một trọng số thấp bé hơn e_w , một điều không tưởng. Hậu quả là, ngoại trừ e_v , đỉnh v phải đi ăn xin thêm ít nhất k cạnh khác. Số cạnh tối thiểu chạm đáy ở cấu hình k -chính quy. \square

Đồng bộ hóa hai bổ đề vào bài toán chính. Khảo sát một sơ đồ truyền tin đạt chuẩn "đáng tin cậy". Chắt lọc $n-1$ giao dịch đầu tiên thành đồ thị H . Nhờ tính gầy gò của nó, ít nhất một phần tử của H là cấu trúc cây T . Kích hoạt Bổ đề 1, trong T có chứa một hạt giống u mà từ đó đường đi tăng chỉ vượt vôi tới tối đa:

$$\lfloor \log_2 n \rfloor$$

đỉnh.

Cạo sạch các cạnh thuộc đường đi tăng này khỏi H , phần xác còn lại là H' . Nhận được:

$$|E(H')| \geq n-1 - \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Chiếu Bổ đề 2 lên hệ $G-H'$ và hạt giống u (các cạnh bị cạo đã thuộc về quá khứ, bị cấm cửa trên đường đi tăng từ u), áp đặt ranh giới tối thiểu cho số cạnh của $G-H'$:

$$\left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil.$$

Tổng hợp lại, G bảo kê không dưới:

$$n-1 - \lfloor \log_2 n \rfloor + \left\lceil \frac{(k+2)(n-1)}{2} \right\rceil$$

cạnh.

6.1. [5, Bổ đề 3] Khai thác phương pháp quy nạp theo biến k . Bước cơ sở không có gì bàn cãi. Bước nhảy: Xóa sổ giao dịch khởi nguồn. Đồ thị cây vỡ đôi thành hai nửa, mỗi nửa hứng chịu sự thiếu hụt đúng 1 mảnh thông tin bị chặn lại từ bờ kia. Hút năng lượng từ giả thiết quy nạp, mỗi nửa hiện tại nắm giữ ít nhất 2^{k-1} đỉnh.

6.2. Xây dựng cấu hình ([5], Bổ đề 1). Phân rã n cho 2^{k-1} :

$$n = 2^{k-1}n_1 + n_2.$$

Xếp quân thành n_1 trung đội, mỗi đội chứa 2^{k-1} nhân sự, tàn dư dồn vào đội cuối gồm n_2 người. Tại mỗi trung đội 2^{k-1} người, chạy quy trình $2^{k-1} - 1$ giao dịch để lấp đầy k mảnh tin cho mỗi thành viên (thuật toán phân bào: 2 người giao dịch \rightarrow 4 người \rightarrow 8 người...).

Về phần tàn dư, cài cắm mỗi người kết nối với một cá nhân ở các trung đội trước (sau khi các đội đó đã hoàn tất chu trình) để hút trọn bộ k mảnh tin. Kế toán tổng kết:

$$P(n, k) \leq (2^{k-1} - 1)n_1 + n_2 = \left\lceil \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} \cdot n \right\rceil.$$

Đánh giá chặn dưới ([5], Bổ đề 4). Ta nhắm thẳng vào chân lý:

$$P(n, k) \geq \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}}n$$

bất chấp mọi ràng buộc gò bó lên k .

Mở xẻ đồ thị truyền tin tối ưu sở hữu $P(n, k)$ cạnh. Bóc tách n_i làm số lượng các thành phần liên thông cỡ i đỉnh. Ta có:

$$\sum_i in_i = n.$$

Một thành phần cỡ i ngón ít nhất $i - 1$ cạnh. Hơn thế nữa, các phân mảnh cỡ nhỏ ($i < 2^{k-1}$) bị chặn cửa tiến hóa thành cấu trúc cây (bài 6.1), nên chúng gánh trên lưng ít nhất i cạnh. Lấp vào phương trình:

$$P(n, k) \geq \sum_{i < 2^{k-1}} in_i + \sum_{i \geq 2^{k-1}} (i - 1)n_i.$$

Khảo sát phân khu $i \geq 2^{k-1}$, toán học cơ bản chỉ ra:

$$i - 1 \geq \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}}i,$$

chốt sổ:

$$P(n, k) \geq \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} \sum_i in_i = \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}}n.$$

6.3. [5, Bổ đề 2] Xẻ lực lượng thành hai mảng không giao nhau: nhánh X chứa i thành viên, và nhánh:

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{2^{k-i-2}}\}$$

quy tụ 2^{k-i-2} thành viên. Lên kịch bản giao dịch như sau.

Chương 1: Toàn thể nhánh X chia hỏa lực về y_1 để dồn thông tin. Tiêu tốn i giao dịch, y_1 no bụng với $i + 1$ mảnh tin.

Chương 2: Khởi động cỗ máy nhân bản số người "cập nhật" trong không gian Y .

Mồi lửa:

$$y_1y_2, y_3y_4, y_1y_3, y_2y_4.$$

4 giao dịch được thiết lập, bộ tứ Y đều nâng cấp lên mức $i + 4$ mảnh tin.

Vòng lặp nhân bản: nếu ở chặng trước, nhóm 2^r người dẫn đầu của Y đã vượt tới mốc $i + r + 2$ mảnh tin, thì bung lụa 2^r giao dịch:

$$y_1 y_{1+2^r}, y_2 y_{2+2^r}, \dots, y_{2^r} y_{2^r+1},$$

sóng lan tỏa giúp 2^{r+1} người dẫn đầu thăng cấp lên $i + r + 3$ mảnh tin.

Quá trình phan lại khi cần quét hết không gian Y . Tới điểm dừng, tổng chi phí gốc:

$$i + 2^{k-i-2},$$

và mọi cá thể trong Y đều đã hấp thụ đủ k mảnh tin. Màn hạ màn: y_1 nã đại bác giao dịch vào toàn bộ các thành viên ngoài Y để phân phối đủ định mức k mảnh tin. Đúc kết:

$$P(n, k) \leq i + 2^{k-i-2} + (n - 2^{k-i-2}) = n + i.$$

Chiêu thức này chỉ vay mượn điều kiện $t_i \leq n$.

6.4. Mệnh đề này được vinh danh trong [5]. Tuy nhiên, các phân tích chỉ ra rằng nền tảng chứng minh của mệnh đề thứ hai trong Bổ đề 3 của công trình đó chứa một lỗ hổng kỹ thuật cần được vá lại.



TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Shapovalov A. V. Bài toán người đưa tin // Matematicheskoe Prosveshchenie. Ser. 3. 2015. Tập 19. Tr. 249-253.
- [2] Berman K., Hawrylycz M. Telephone problems with failures // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1986. Vol. 7. P. 13-17.
- [3] Berman K., Paul J. Verifiable broadcasting and gossiping in communication networks // Discr. Appl. Math. 2002. Vol. 118. P. 293-298.
- [4] Bumby R. A problem with telephones // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1981. Vol. 2. P. 13-18.
- [5] Chang G., Tsay Y.-J. The partial gossiping problem // Discr. Math. 1996. Vol. 148. P. 9-14.
- [6] Harary F., Schwenk A. J. The communication problem of graphs and digraphs // J. Franklin Inst. 1974. Vol. 297. P. 491-495.
- [7] Kleitman D. J., Shearer J. B. Further gossip problems // Discr. Math. 1980. Vol. 30. P. 151-156.
- [8] Seress A. Gossiping old ladies // Discrete Math. 1983. Vol. 46. P. 75-81.
- [9] Seress A. Gossips by conference calls // Studia Sci. Math. Hungar. 1987. Vol. 22. P. 229-238.
- [10] Seress A. Quick gossiping without duplicate transmissions // Graphs Combin. 1986. Vol. 2. P. 363-381.
- [11] Tijdeman R. On a telephone problem // Nieuw Arch. Wisk. 1971. Vol. 19. P. 188-192.
- [12] West D. A class of solutions to the gossip problem, I // Discrete Math. 1982. Vol. 39. P. 307-326.
- [13] West D. Gossiping without duplicate transmissions // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1982. Vol. 3. P. 418-419.

§7. OLYMPIC QUỐC TẾ TUYMAADA 2016

Kỳ thi Olympic học sinh quốc tế Tuymaada được tổ chức tại Yakutia hằng năm từ năm 1994. Ngay từ đầu, đây được thiết kế không chỉ là một kỳ thi quốc tế (ngoài học sinh từ nhiều vùng của Nga, các năm khác nhau còn có học sinh Romania, Bulgaria, Mông Cổ và nhiều nước khác), mà còn là một kỳ thi đa môn: gồm Toán, Vật lý, Hóa học và Tin học. Trong khoảng 18 năm gần đây, đề Toán của kỳ thi phần lớn do các thành viên ban giám khảo Olympic Toán học sinh Saint Petersburg biên soạn; độc giả quen thuộc có thể dễ dàng nhận ra, một mặt là sự gần gũi về phong cách giữa hai kỳ thi, mặt khác là khuynh hướng kỹ thuật thường thấy ở các cuộc thi Toán quốc tế.



A BẢNG TRỀ

1 NGÀY THỨ NHẤT

M1. Trước mặt Tanya và Seryozha là một đồng 2016 viên kẹo. Hai bạn lần lượt đi, Tanya đi trước. Ở mỗi lượt, một bạn có thể ăn 1 viên kẹo; hoặc nếu số kẹo hiện thời là chẵn thì có thể ăn đúng một nửa đồng kẹo. Người không đi được thì thua. Hỏi nếu chơi tối ưu thì ai thắng?

(A. Golovanov)

M2. Trên đường cao AA_1 của tam giác nhọn ABC lấy điểm D sao cho

$$\angle BDC = 90^\circ,$$

và H là trực tâm tam giác ABC . Dựng đường tròn có đường kính AH . Chứng minh độ dài tiếp tuyến kẻ từ B đến đường tròn này bằng độ dài đoạn BD .

(L. Emelyanov)

M3. Một con xúc xắc đặt trên một ô của lưới vuông vô hạn. Trên mỗi mặt có một mũi tên chỉ một trong bốn hướng song song cạnh mặt đó. Anton nhìn từ trên xuống và lăn xúc xắc qua một cạnh theo đúng hướng mũi tên trên mặt trên cùng. Chứng minh rằng xúc xắc không bao giờ quét kín được một hình vuông 5×5 nào cả.

(A. Chukhnov)

M4. Các số không âm a, b, c thỏa

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3.$$

Chứng minh rằng

$$(a + b + c)^3 \geq 9(ab + bc + ca).$$

(A. Khrabrov)

2 NGÀY THỨ HAI

M5. Trong mọi ô của bảng 10×10 ghi các số dương. Có 5 con ếch đứng trên 5 ô nào đó, che mất các số ở những ô này. Kostya tính tổng các số nhìn thấy được và được 10. Sau đó mỗi con ếch nhảy sang một ô kề cạnh, Kostya lại tính được tổng 10^2 . Rồi các con ếch lại nhảy, Kostya được 10^3 , v.v. - mỗi lần tổng đều gấp 10 lần lần trước. Hỏi tổng lớn nhất mà Kostya có thể nhận được là bao nhiêu?

(K. Kokhas)

M6. Có tồn tại số tự nhiên $N > 10^{20}$ chỉ gồm các chữ số lẻ, trong đó các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 xuất hiện với số lần bằng nhau, và N chia hết cho mọi số 20 chữ số nhận được từ N bằng cách xóa bớt chữ số

(các chữ số bị xóa hay còn lại không cần đứng liền nhau) hay không?

(S. Berlov)

M7. Các số a, b, c, d thỏa

$$0 < a \leq b \leq d \leq c, \quad a + c = b + d.$$

Chứng minh rằng với mọi điểm trong P của đoạn thẳng độ dài a , đoạn này là một cạnh của một tứ giác ngoại tiếp có các cạnh liên tiếp a, b, c, d , sao cho đường tròn nội tiếp đi qua điểm P .

(L. Emelyanov)

M8. Trên bản đồ đường bay của hãng hàng không $K_{r,r}$ có một số thành phố; một số cặp thành phố được nối bởi đường bay thẳng hai chiều, tổng cộng có m đường bay. Cần chọn hai nhóm rời nhau, mỗi nhóm gồm r thành phố, sao cho mọi thành phố của nhóm này đều có đường bay trực tiếp tới mọi thành phố của nhóm kia. Chứng minh rằng số cách chọn như vậy không vượt quá

$$2m^r.$$

(D. Conlon)



BẢNG LỚN

1 NGÀY THỨ NHẤT

C1. Dãy (a_n) được xác định bởi

$$a_1 = 0, \\ a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + 1.$$

Chứng minh rằng

$$a_{2016} > \frac{1}{2} + a_{1000}.$$

(A. Golovanov)

C2. Xem bài M3.

C3. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác nhọn ABC cắt nhau tại H . Các điểm A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trên các đoạn AH, BH, HC_1 lần lượt lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho

$$\angle A_0B_2A_2 = \angle B_0C_2B_2 = \angle C_0A_2C_2 = 90^\circ.$$

Chứng minh rằng các đường thẳng AC_2, BA_2, CB_2 đồng quy.

(L. Emelyanov)

C4. Với mỗi số tự nhiên k , hãy tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$8^k = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

thỏa

$$0 \leq x \leq y \leq z.$$

(V. Shevelev)

2 NGÀY THỨ HAI

C5. Hai số nguyên tố p, q khác nhau và chênh lệch không quá hai lần (tức là số lớn không quá gấp đôi số nhỏ). Chứng minh rằng tồn tại hai số tự nhiên liên tiếp sao cho một số có ước nguyên tố lớn nhất bằng p , còn số kia có ước nguyên tố lớn nhất bằng q .

(A. Golovanov)

C6. Xem bài M7.

C7. Chứng minh rằng với mọi

$$x, y, z > \frac{3}{2}$$

ta có bất đẳng thức

$$x^{24} + \sqrt[5]{y^{60} + z^{40}} \geq \left(x^4 y^3 + \frac{1}{3} y^2 z^2 + \frac{1}{9} x^3 z^3 \right)^2.$$

(K. Kokhas)

C8. Cho một đồ thị liên thông. Chứng minh có thể tô mọi đỉnh của nó bằng hai màu xanh lam và xanh lục, đồng thời chọn ra một số cạnh sao cho:

- mọi cặp đỉnh đều nối với nhau bởi một đường đi chỉ qua các cạnh đã chọn;
- mỗi cạnh đã chọn nối hai đỉnh khác màu;
- không có hai đỉnh xanh lục nào nối với nhau bằng một cạnh của đồ thị gốc.

(V. Dolnikov)



LỜI GIẢI CÁC BÀI

M1. Đáp án: Tanya thắng.

Tanya có chiến lược cưỡng bức, tức là chiến lược không cho đối phương cơ hội chủ động. Gần như suốt ván, Tanya chỉ ăn 1 viên. Khi đó sau lượt của Tanya, số kẹo luôn lẻ và lượt của Seryozha bị xác định duy nhất: cũng phải ăn 1 viên. Theo cách này, Tanya giảm đồng kẹo đi 2 viên mỗi vòng. Khi còn 4 viên, Tanya đi khác đi: lấy một nửa, để lại 2 viên cho Seryozha. Đây là thế thua cho Seryozha.

M2. Gọi ω là đường tròn trong đề, BL là tiếp tuyến từ B đến ω , và CC_1 là đường cao của tam giác ABC . Vì

$$\angle HC_1A = 90^\circ,$$

nên $C_1 \in \omega$. Theo định lý cát tuyến:

$$BL^2 = BC_1 \cdot BA.$$

Hai tam giác vuông BAA_1 và BCC_1 đồng dạng (cùng góc nhọn tại B), do đó

$$\frac{BC_1}{BC} = \frac{BA_1}{BA},$$

suy ra

$$BC_1 \cdot BA = BA_1 \cdot BC.$$

Tương tự, các tam giác vuông BA_1D và BDC đồng dạng, nên

$$\frac{BA_1}{BD} = \frac{BD}{BC},$$

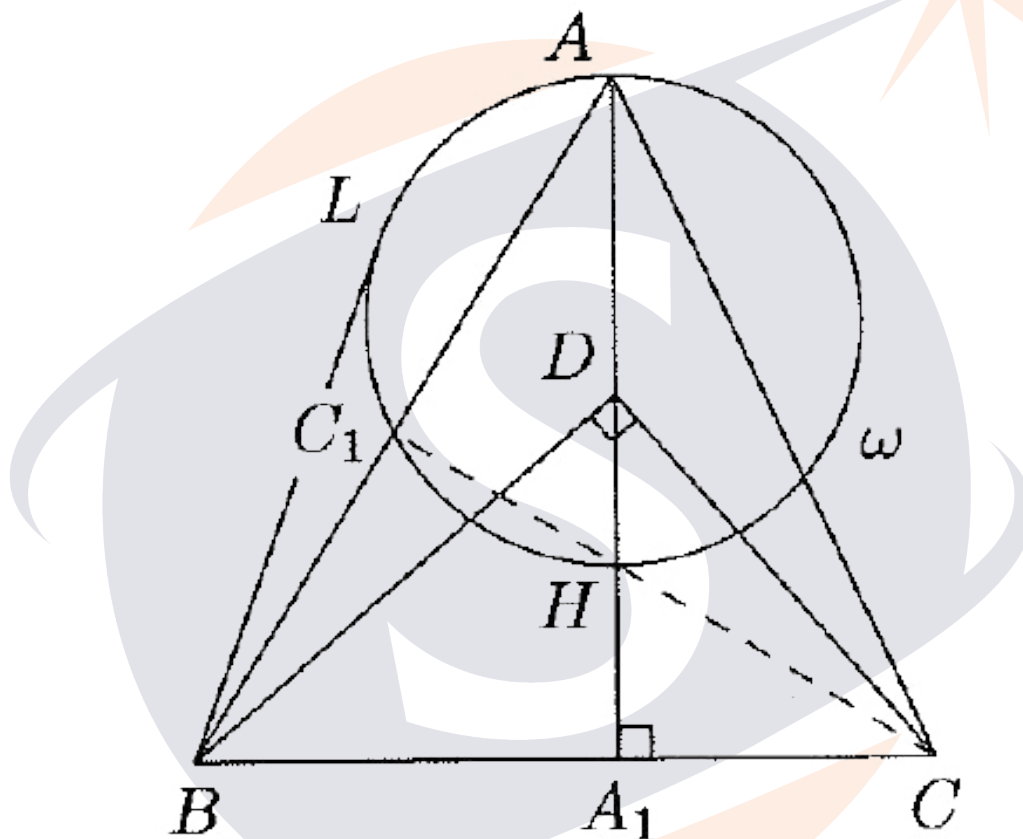
tức là

$$BA_1 \cdot BC = BD^2.$$

Gộp các đẳng thức:

$$BL^2 = BC_1 \cdot BA = BA_1 \cdot BC = BD^2,$$

hay $BL = BD$.



M3. Vì xúc xắc chỉ có 6 mặt, sẽ có lúc một mặt đã từng ở trên lại quay trở lại phía trên. Xét lần đầu tiên điều đó xảy ra. Nếu mặt F quay lại sau k lần lăn thì từ thời điểm F ở trên lần đầu, dãy các mặt trên cùng trở thành tuần hoàn chu kỳ k (hiển nhiên $k \leq 6$). Trước thời điểm đó, một số mặt (không quá $6 - k$) có thể chỉ lên trên đúng một lần, và về sau không lặp lại.

Giả sử trong một chu kỳ, tâm mặt F dịch từ A đến B . Mũi tên trên mặt này có thể:

1. quay 180° ;
2. quay 90° ;
3. không quay.

Ta chứng minh trong cả ba trường hợp, xúc xắc không thể đi qua toàn bộ ô của một hình vuông 5×5 .

Trường hợp 1: ở chu kỳ kế tiếp, tâm F dịch theo vectơ \overrightarrow{BA} , mũi tên trở lại hướng ban đầu, sau đó quỹ đạo chỉ lặp trên các ô cũ. Vậy số ô khác nhau nhiều nhất là

$$(6 - k) + 2k = 6 + k \leq 12 < 25.$$

Trường hợp 2: sau bốn chu kỳ, tâm F quay về A , lần lượt dịch theo các ảnh của \overrightarrow{AB} qua các phép quay $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$; mũi tên cũng trở về trạng thái đầu, nên quỹ đạo lặp theo vòng. Số ô khác nhau nhiều nhất:

$$(6 - k) + 4k = 6 + 3k \leq 24 < 25.$$

Trường hợp 3: sau k bước, không chỉ mặt trên lặp lại mà hướng mũi tên trên mặt đó cũng giữ nguyên, nên trong phần tuần hoàn, hai trạng thái cách nhau k lần lẫn lệch nhau vectơ \overrightarrow{AB} . Chia các trạng thái thành nhóm: mỗi trạng thái ở phần không tuần hoàn là một nhóm riêng (không quá $6 - k$ nhóm), còn trong phần tuần hoàn thì gom các trạng thái cách nhau số nguyên chu kỳ (có k nhóm). Mọi trạng thái cùng nhóm nằm trên một đường thẳng song song \overrightarrow{AB} . Vậy toàn bộ quỹ đạo nằm trên không quá 6 đường thẳng cùng phương.

Nếu các đường này không song song cạnh ô (giả sử \overrightarrow{AB} hướng lên phải), thì tâm 9 ô nằm ở cạnh trái và cạnh dưới của hình vuông 5×5 phải thuộc 9 đường khác nhau, nên không thể đều nằm trên quỹ đạo.

Nếu các đường song song cạnh ô (ví dụ nằm ngang), thì trong một chu kỳ xác xác chỉ có thể đi trong nhiều nhất 3 hàng theo phương đó. Vậy phần không tuần hoàn phải phủ ít nhất 10 ô, điều không thể.

M4. Lời giải 1. Khi nhân đồng thời các biến với $t > 1$, vế trái nhân t^3 , vế phải nhân t^2 , nên chỉ cần chứng minh khi

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Đặt $S = a + b + c$. Ta có

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}(S^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = \frac{1}{2}(S^2 - 3).$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$S^3 \geq \frac{9}{2}(S^2 - 3),$$

hay

$$(S - 3)^2(2S + 3) \geq 0.$$

Điều này hiển nhiên với $S > 0$.

Lời giải 2 (M. Andreev). Áp dụng AM-GM

$$(x + y + z)^3 \geq 27xyz$$

cho các số

$$x = a^2 + b^2 + c^2, \quad y = z = ab + bc + ca,$$

ta được

$$\begin{aligned} (a + b + c)^6 &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)^3 \\ &\geq 27(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2 \\ &\geq 81(ab + bc + ca)^2. \end{aligned}$$

Lấy căn hai về suy ra điều phải chứng minh.

M5. Đáp án: tổng lớn nhất là

$$10^6.$$

Cần trên. Mọi ô nhìn thấy ở lần đầu có số không vượt quá 10. Vì sau lần nhảy thứ nhất tổng tăng rất mạnh, tất phải xuất hiện những ô trước đó bị che; các ô mới lộ này có số không vượt quá 100. Sau lần nhảy thứ hai tổng lại tăng mạnh, nên lại phải có các ô chưa từng lộ ở hai lần trước; các ô này có số không vượt quá 1000.

Lập luận tương tự cho thấy sau mỗi lần nhảy phải có các ô mới chưa từng nhìn thấy. Mà ban đầu ếch chỉ che 5 ô, nên số lần nhảy có thể làm tổng tăng theo cách trên không vượt quá 5.

Ví dụ đạt được. Cho 5 con ếch đứng trên 5 ô trái nhất của hàng dưới cùng, và mỗi lần đều nhảy sang ô kề bên phải. Gọi các số ở 5 ô có ếch lần lượt là a, b, c, d, f , và mọi ô còn lại đều ghi g . Chọn

$$g = \frac{10}{95},$$

rồi đặt

$$a = 100 - g,$$

$$b = 10^3 - a - 2g,$$

$$c = 10^4 - b - a - 3g,$$

$$d = 10^5 - a - b - c - 4g,$$

$$f = 10^6 - a - b - c - d - 5g.$$

Khi đó đạt yêu cầu.

M6. Đáp án: có, tồn tại số như vậy.

Bổ đề. Cho $Q, M \in \mathbb{N}$ với $(M, 10) = 1$. Khi đó tồn tại một số chia hết cho M mà biểu diễn thập phân là lặp lại nhiều lần biểu diễn của Q .

Chứng minh. Trong các số

$$Q, QQ, QQQ, \dots$$

có hai số đồng dư modulo M . Lấy hiệu của chúng rồi bỏ các số 0 tận cùng, ta được số cần tìm.

Để giải bài toán, đủ chỉ ra một số N chỉ gồm chữ số lẻ, trong đó các chữ số 1,3,5,7,9 xuất hiện đều nhau, và N chia hết cho mọi số 20 chữ số chỉ gồm chữ số lẻ.

Trong tất cả các số 20 chữ số chỉ gồm chữ số lẻ, lấy một số q chia hết cho lũy thừa lớn nhất của 5, giả sử là 5^ℓ . Viết lặp q nhiều lần để được số có hơn ℓ chữ số, rồi thêm một số chữ số lẻ ở đầu sao cho kết quả có số lần xuất hiện của 1,3,5,7,9 bằng nhau; gọi số thu được là Q . Theo cách dựng, Q chia hết cho 5^ℓ .

Tiếp theo liệt kê tất cả các số 20 chữ số chỉ gồm chữ số lẻ, chia mỗi số cho lũy thừa 5 lớn nhất của nó, rồi nhân tất cả các thương lại; gọi tích là M .

Theo bổ đề, bằng cách lặp biểu diễn thập phân của Q , ta nhận được một số chia hết cho M . Lấy số đó làm N .

M7. Xét một tứ giác ngoại tiếp bất kỳ có cạnh a, b, c, d .

Trong tứ giác ngoại tiếp, mỗi tiếp điểm chia cạnh chứa nó thành hai đoạn; hai đoạn kề cùng một đỉnh có độ dài bằng nhau. Vì thế, khi xác định vị trí tiếp điểm P trên cạnh nhỏ nhất, ta tự động suy

ra các độ dài dương của mọi đoạn bị chia trên các cạnh còn lại. Gọi các độ dài đó là x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$a = x_1 + x_2, \quad b = x_2 + x_3, \quad c = x_3 + x_4, \quad d = x_4 + x_1.$$

Gọi R là bán kính đường tròn nội tiếp. Khi đó các góc của tứ giác bằng

$$2 \arctan \frac{R}{x_1}, \quad 2 \arctan \frac{R}{x_2}, \quad 2 \arctan \frac{R}{x_3}, \quad 2 \arctan \frac{R}{x_4}.$$

Với mỗi x_i , hàm

$$R \mapsto 2 \arctan \frac{R}{x_i}$$

là liên tục, đơn điệu tăng, và chạy từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ khi R từ 0 đến $+\infty$. Vì vậy với mọi x_1, x_2, x_3, x_4 cho trước, tồn tại R thỏa

$$2 \arctan \frac{R}{x_1} + 2 \arctan \frac{R}{x_2} + 2 \arctan \frac{R}{x_3} + 2 \arctan \frac{R}{x_4} = 2\pi.$$

Có được bán kính này, ta dựng được tứ giác cần trong đề.

M8. Nếu đã chọn được hai nhóm cần tìm, ta chỉ ra được r đường bay nối giữa hai nhóm và phủ đúng $2r$ thành phố. Do đó mỗi cách chọn có thể mô tả bằng: chọn r đường bay không chung đầu mút, rồi với mỗi đường bay quyết định thành phố nào vào nhóm thứ nhất. Cách thứ nhất có không quá

$$C_m^r$$

cách, cách thứ hai có 2^r cách. Vậy tổng số cách không vượt quá

$$\begin{aligned} C_m^r \cdot 2^r &= \frac{m(m-1) \cdots (m-r+1)}{r!} \cdot 2^r \\ &\leq m^r \cdot \frac{2^r}{r!} = m^r \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdots \frac{2}{r} \leq 2m^r. \end{aligned}$$

C1. Viết hệ thức truy hồi của đề dưới dạng

$$na_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + n.$$

Viết tương tự cho a_n :

$$(n-1)a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + n-1.$$

Lấy phương trình đầu trừ phương trình sau, thu được

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}.$$

Suy ra

$$a_{2016} = a_{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{2015}.$$

Chỉ cần kiểm tra

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{2015} > \frac{1}{2}.$$

Đây là ước lượng chuẩn: tổng có 1016 hạng, mỗi hạng không nhỏ hơn $\frac{1}{2015}$, nên

$$\frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{2015} > 1016 \cdot \frac{1}{2015} > \frac{1}{2}.$$

C2. Xem bài M3.

C3. Vì

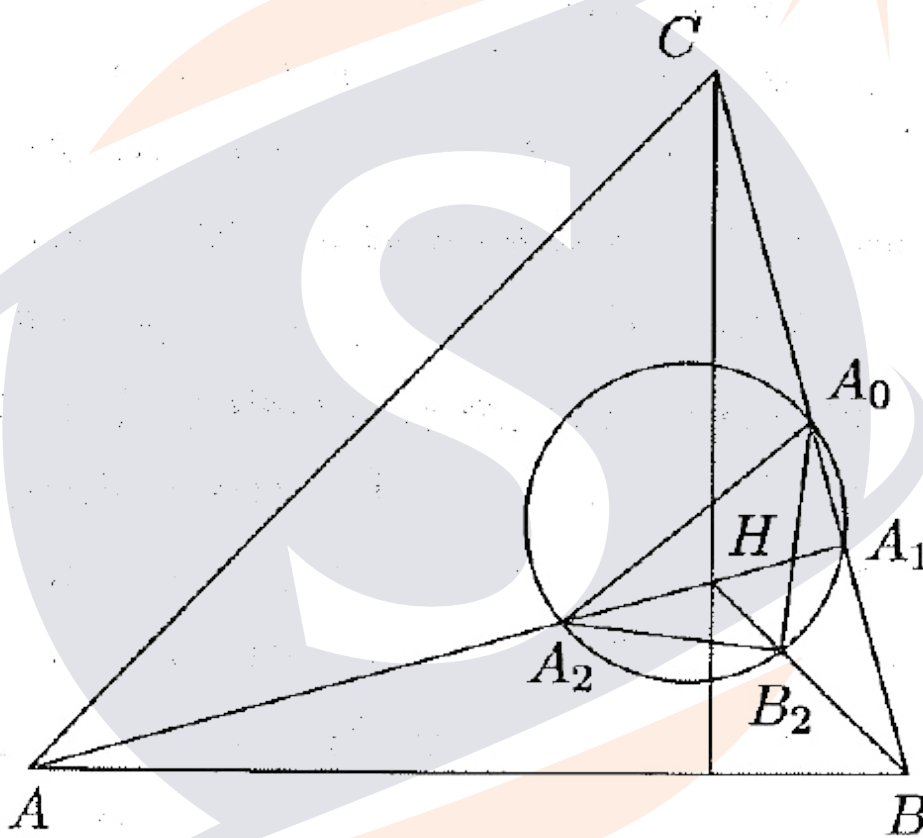
$$\angle A_0B_2A_2 = \angle A_2A_1A_0 = 90^\circ,$$

nên B_2 và A_1 cùng nằm trên đường tròn đường kính A_0A_2 . Công suất của điểm C đối với đường tròn này là

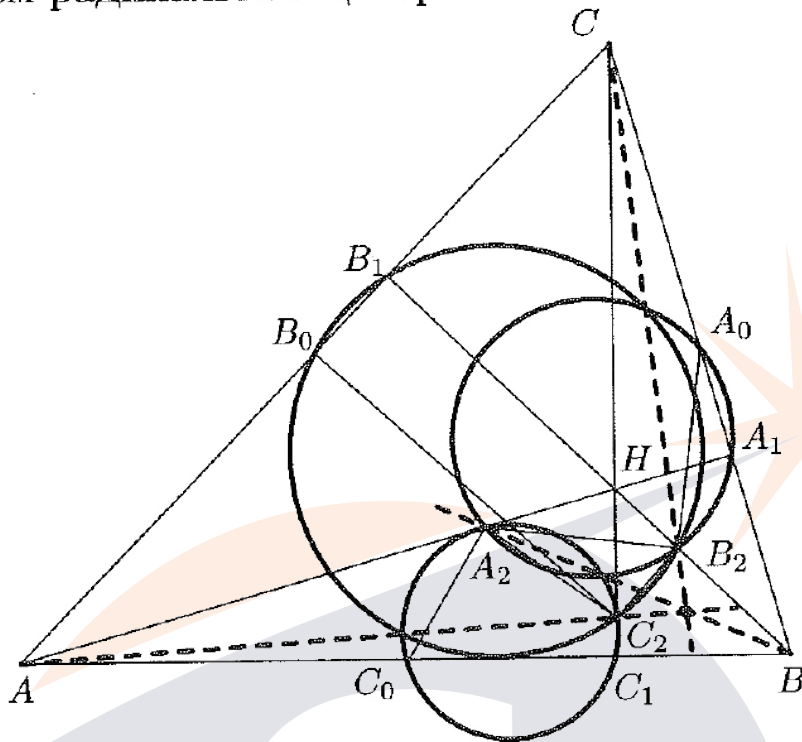
$$CA_0 \cdot CA_1 = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Tương tự, công suất của C đối với đường tròn đường kính B_0B_2 là

$$CB_0 \cdot CB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \cos C.$$



Hai biểu thức bằng nhau, nên CB_2 là trục đẳng phương của hai đường tròn trên. Do đó các đường thẳng CB_2, BA_2, AC_2 là các trục đẳng phương từng cặp và cắt nhau tại cùng tâm đẳng phương.



C4. Đáp án: $k + 1$.

Quy nạp theo k .

Cơ sở $k = 0$. Ta có đồng nhất thức

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz).$$

Giải phương trình

$$1 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz).$$

Với điều kiện của đề, ngoặc thứ nhất không nhỏ hơn 1, ngoặc thứ hai dương và nguyên. Do đó nghiệm duy nhất là

$$x = y = 0, \quad z = 1.$$

Bước quy nạp: nếu nhân bộ (x, y, z) biểu diễn 8^{k-1} với 2, ta được bộ biểu diễn 8^k . Còn lại chỉ cần chứng minh tồn tại duy nhất một biểu diễn 8^k trong đó có ít nhất một số lẻ trong x, y, z .

Trong biểu diễn như vậy, tổng $x + y + z > 1$ và chẵn, nên đúng hai trong ba số là lẻ. Khi đó

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz$$

là số lẻ, nên phải bằng 1. Mà

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2).$$

Suy ra $z - x = 1$, còn y bằng một trong hai số x, z .

Nếu $x = y = a, z = a + 1$ thì

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 3a + 1.$$

Nếu $x = a - 1, y = z = a$ thì

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 3a - 1.$$

Vì thế biểu diễn cần tìm được xác định duy nhất bởi phần dư của 8^k modulo 3.

C5. Giả sử $q < p < 2q$. Vì p, q nguyên tố cùng nhau, tồn tại các số nguyên x, y sao cho

$$px - qy = 1.$$

Do có thể thay (x, y) bằng $(x - qk, y + pk)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$ mà vẫn giữ đẳng thức, ta giả sử

$$|x| < \frac{q}{2}.$$

Hai số $|px|$ và $|qy|$ là hai số tự nhiên liên tiếp. Chúng không thể bằng 0 (nếu một số bằng 0 thì số kia bằng 1, điều không thể vì 1 không chia hết cho p hay q). Vì

$$|px| < \frac{pq}{2},$$

nên ước nguyên tố lớn nhất của $|px|$ là p .

Mặt khác,

$$|qy| \leq |px| + 1 < \frac{pq}{2} + 1 \leq \frac{p+1}{2} q,$$

suy ra

$$|y| \leq \frac{p+1}{2} \leq q,$$

nên mọi ước nguyên tố của $|qy|$ đều không vượt quá q . Điều phải chứng minh.

C6. Xem bài M7.

C7. Đặt

$$A = x^4 y^3 + \frac{1}{3} y^2 z^2 + \frac{1}{9} x^3 z^3.$$

Lời giải 1 (phản chứng). Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh sai. Khi đó

$$x^{24} < A^2, \quad \sqrt[5]{y^{60}} < A^2, \quad \sqrt[5]{z^{40}} < A^2,$$

tức là

$$x < A^{1/12}, \quad y < A^{1/6}, \quad z < A^{1/4}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &= x^4 y^3 + \frac{1}{3} y^2 z^2 + \frac{1}{9} x^3 z^3 \\ &< A^{\frac{4}{12} + \frac{3}{6}} + \frac{1}{3} A^{\frac{2}{6} + \frac{2}{4}} + \frac{1}{9} A^{\frac{3}{12} + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3} A^{5/6} + \frac{1}{9} A. \end{aligned}$$

Ta sẽ mâu thuẫn nếu chứng minh

$$\frac{4}{3} A^{5/6} + \frac{1}{9} A \leq A.$$

Bất đẳng thức này tương đương

$$A \geq \left(\frac{3}{2}\right)^6,$$

đúng vì $x, y, z > \frac{3}{2}$ và

$$A > x^4 y^3 > \left(\frac{3}{2}\right)^6.$$

Lời giải 2. Chọn trong ngoặc ở vế phải hạng lớn nhất. Có ba trường hợp.

Trường hợp 1:

$$x^4 y^3 \geq \frac{1}{3} y^2 z^2, \quad x^4 y^3 \geq \frac{1}{9} x^3 z^3.$$

Khi đó

$$A^2 \leq 9x^8 y^6.$$

Ước lượng vế trái từ dưới (bỏ z^{40}):

$$\begin{aligned} x^{24} + \sqrt[5]{y^{60} + z^{40}} &> x^{24} + y^{12} \geq 2x^{12} y^6 \\ &> 2x^8 y^6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 > 9x^8 y^6 \geq A^2. \end{aligned}$$

Trường hợp 2:

$$\frac{1}{3} y^2 z^2 \geq x^4 y^3, \quad \frac{1}{3} y^2 z^2 \geq \frac{1}{9} x^3 z^3.$$

Khi đó

$$A^2 \leq y^4 z^4.$$

Và

$$x^{24} + \sqrt[5]{y^{60} + z^{40}} > \sqrt[5]{y^{60} + z^{40}} \geq \sqrt[5]{2y^{30} z^{20}} = \sqrt[5]{2} y^6 z^4 > y^4 z^4 \geq A^2.$$

Trường hợp 3:

$$\frac{1}{9} x^3 z^3 \geq x^4 y^3, \quad \frac{1}{9} x^3 z^3 \geq \frac{1}{3} y^2 z^2.$$

Khi đó

$$A^2 \leq \frac{1}{9} x^6 z^6.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} x^{24} + \sqrt[5]{y^{60} + z^{40}} &> x^{24} + z^8 = x^{24} + \frac{1}{3} z^8 + \frac{1}{3} z^8 + \frac{1}{3} z^8 \\ &\geq \frac{4}{\sqrt[4]{27}} x^6 z^6 > \frac{1}{9} x^6 z^6 \geq A^2. \end{aligned}$$

C8. Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh n của đồ thị.

Với $n = 1$, hiển nhiên đúng. Giả sử đúng cho đồ thị có $n - 1$ đỉnh. Xét đồ thị liên thông G có n đỉnh, bỏ một đỉnh v sao cho đồ thị còn lại

$$G_1 = G \setminus v$$

vẫn liên thông. Áp dụng giả thiết quy nạp cho G_1 : các đỉnh của G_1 đã được tô hai màu và một số cạnh đã được chọn.

Nếu trong G , đỉnh v nối với một đỉnh xanh lục, tô v màu xanh lam và chọn cạnh nối đó. Nếu tất cả cạnh từ v chỉ đi tới các đỉnh xanh lam, tô v màu xanh lục và chọn tùy ý một cạnh đi ra từ v .

Trong cả hai tình huống, các cạnh được chọn tạo thành một đồ thị liên thông trên mọi đỉnh của G ; đồng thời không sinh ra cạnh chọn nối hai đỉnh cùng màu, và cũng không sinh ra cạnh gốc nối hai đỉnh xanh lục.

§8. ĐỪNG BỎ PHIẾU CHO MÀU ĐỎ!

Trong vòng thi thứ nhất của kỳ Olympic năm nay dành cho học sinh lớp 6, có một bài toán của tác giả O. Ivanova như sau.

Trên một bảng kích thước 4×9 có 9 ô màu đỏ, 11 ô màu xanh và 16 ô màu trắng. Quy tắc nhấp chuột vào một hàng hoặc một cột được quy định như sau: nếu trong đường lưới (hàng hoặc cột) đó, số lượng ô của một màu nào đó nhiều hơn số lượng ô của từng màu còn lại, thì toàn bộ đường lưới đó sẽ được đổi sang màu ấy; nếu không có màu nào chiếm ưu thế tuyệt đối thì bảng không có gì thay đổi. Người ta nhận thấy, nếu nhấp chuột lần lượt vào tất cả các hàng rồi mới đến tất cả các cột, thì mọi ô trên bảng đều biến thành màu đỏ. Ngược lại, nếu nhấp vào tất cả các cột trước rồi mới đến tất cả các hàng, thì mọi ô đều biến thành màu xanh. Hãy đưa ra một ví dụ về bảng thỏa mãn các điều kiện đó.

Lời giải của bài toán đòi hỏi một chút sự khéo léo khi thiết lập bảng. Dưới đây là một ví dụ.

D	D	D	D	X	X			
				D	D	D	D	D
X	X	X	X	X				
X	X	X	X					

(Quy ước: D - Đỏ, X - Xanh, khoảng trắng - Trắng)

Bảng này có thể được xem như một minh họa thực tế cho "nghịch lý bỏ phiếu" dưới đây.

Giả sử có một khu chung cư 4 tầng với 9 lối vào; tại mỗi lối vào, mỗi tầng chỉ có đúng một căn hộ. Để đơn giản, ta giả sử mỗi căn hộ có đúng 1 người ở, tổng cộng có 36 cư dân. Sơ đồ của khu chung cư này tương ứng với chính bảng 4×9 ở trên. Cư dân cần bỏ phiếu quyết định màu sơn cho tòa nhà. Có 16 người (gần một nửa) muốn sơn màu trắng, 11 người (chưa tới một phần ba) chọn màu xanh, và 9 người (chỉ đúng một phần tư) chọn màu đỏ. Giả sử sở thích của cư dân được phân bố chính xác như màu sắc trong bảng.

Khi đó, nếu tiến hành bỏ phiếu trực tiếp (màu nào nhận được nhiều phiếu nhất trên tổng số 36 phiếu sẽ thắng), khu chung cư sẽ được sơn màu trắng.

Nếu tiến hành bỏ phiếu theo từng lối vào trước, tức là mỗi lối vào tự chọn ra màu đa số của mình, rồi mới tổng hợp 9 kết quả lại, thì tòa nhà sẽ được sơn màu xanh. Lý do là có 5 trên tổng số 9 lối vào "ngiên" về màu xanh.

Ngược lại, nếu tiến hành bỏ phiếu theo từng tầng trước, tức là mỗi tầng chọn ra màu theo đa số của tầng mình rồi mới tổng hợp 4 kết quả lại, thì tòa nhà sẽ được sơn màu đỏ. Lý do là có 2 trên 4 tầng "bỏ phiếu" ủng hộ màu đỏ, trong khi màu trắng và màu xanh mỗi màu chỉ giành chiến thắng ở 1 tầng.

Có thể cách thức bỏ phiếu gián tiếp như vậy nghe có vẻ thiếu tự nhiên, nhưng trong thực tế nó lại được ứng dụng rất rộng rãi. Các cử tri thường được phân chia thành những nhóm nhỏ: lớp học, phòng ban, hoặc các bang/khu vực... Khi đó, người ta thường tổ chức bỏ phiếu trong nội bộ từng nhóm trước, sau đó mới đem tổng hợp kết quả của các nhóm tại hội đồng giáo viên, ban giám đốc, hoặc quốc hội... và quyết định phương án chiến thắng dựa trên số lượng nhóm ủng hộ nhiều nhất.

Ví dụ, thầy hiệu trưởng quyết định trong kỳ nghỉ tới sẽ tổ chức một hoạt động chung cho toàn bộ học sinh từ khối 1 đến khối 4: thi trượt tuyết (trắng), đi công viên nước (xanh), hoặc chép phạt lại bài kiểm tra (đỏ). Ngôi trường này khá nhỏ, mỗi lớp chỉ có đúng 9 học sinh, và xin bật mí thêm: một phần tư trong số đó là học sinh có học lực yếu. Vậy nên chọn phương án nào? Hãy để học sinh tự quyết định! Mỗi lớp sẽ tự tổ chức bỏ phiếu, sau đó nhà trường sẽ chọn phương án giành chiến thắng ở nhiều lớp nhất! Nghe rất quen thuộc đúng không?



§9. GÓC OLYMPIADOPHOBE



“BẤT KỲ” KHÔNG PHẢI LÀ “MỌI”

Bộ não của côn trùng vốn dĩ không được thiết kế cho việc tính toán phức tạp. Các thanh ghi vừa ít ỏi lại kém tin cậy, không có khả năng xử lý song song, không có bộ nhớ đệm, còn bộ nhớ RAM (nhớ làm việc) thì cùng lắm chỉ hỗ trợ địa chỉ hóa 4-bit. Thế nhưng, bất chấp mọi rào cản đó, chú gián Kuzka vẫn miệt mài tính toán. Để bù đắp cho những hạn chế của não bộ, cậu đã sử dụng đủ mọi mảnh khóc: đếm bằng ngón (hay nói chính xác hơn là bằng chân), dùng các quy tắc nhân nhẩm, và đủ mọi chiêu trò "ảo thuật" tính toán khác.

Quá trình tính toán diễn ra cực kỳ vất vả. Kuzka hươ vung cả sáu cái chân, lúc nghiêng sang phải lúc ngả sang trái, thỉnh thoảng lại lộn nhào một cách kỳ quặc. Có những lúc cậu chạy loanh quanh khắp quán Am-Bar rồi chộp lấy một mẫu phấn, hì hục ghi ghi chép chép xuống sàn nhà.

Nhìn từ bên ngoài, mọi hành động của cậu trông hết như một điệu múa tẻ lẽ cổ xưa. Busenka, Gorguly và Ogryza đứng nhìn theo đầy mê mẩn.

- Dù các tư thế cứ lặp đi lặp lại, - Busenka lên tiếng nhận xét, - nhưng chuỗi chuyển động này trông vẫn không có vẻ gì là tuần hoàn cả.
- Kể cả nếu có chu kỳ đi chẳng nữa, thì chắc chắn chu kỳ đó cũng phải rất lớn, - Ogryza gật gù phụ họa.
- Nhưng rõ ràng là mỗi tư thế đều đã được lặp lại ít nhất một lần, - Gorguly chột lời.

Kuzka rõ ràng đã hoàn toàn kiệt sức.

- Xong rồi! - cuối cùng Kuzka thở hắt ra một hơi nặng nhọc. - Ra kết quả rồi!
- Ra cái gì cơ?
- Tố vừa tìm ra được một dấu hiệu chia hết hoàn toàn mới! Chắc chắn các cậu chưa từng thấy bao giờ.
- Cho phép tôi bày tỏ một chút nghi ngờ nhé, - Gorguly lịch sự lên tiếng. - Bàn về các dấu hiệu chia hết thì tôi đã nắm rõ trong lòng bàn tay rồi!
- Vậy thì hãy chuẩn bị mở rộng tầm mắt đi, - Kuzka điệu bộ cúi chào hết như một nghệ sĩ trên sân khấu. - Xin trân trọng giới thiệu: dấu hiệu chia hết cực kỳ đơn giản, thanh nhã và hiệu quả dành cho số 403!
- Ý cậu là dấu hiệu để nhận biết một số chia hết cho 403 chứ gì? - Gorguly hỏi lại, có phần tò mò.
- Không, không phải là "chia hết cho"! Mà là dấu hiệu chia hết *của* số 403! Sự kỳ diệu nằm ở chỗ đó! Bình thường, người ta cho trước một số x rồi dùng dấu hiệu để kiểm tra xem x có chia hết cho 5 hay 11 hay không. Còn với dấu hiệu của tớ, ta sẽ kiểm tra xem số 403 có chia hết cho x hay không!

- Thế kiểm tra bằng cách nào? - Ogryza sốt ruột hỏi.
- Số 403 sẽ chia hết cho một số tự nhiên có hai chữ số x khi và chỉ khi: tổng các bình phương của hai chữ số tạo nên x bằng đúng 10, - Kuzka tuyên bố với vẻ đầy tự hào.

Cả nhóm khán giả im lặng mất vài giây để tiêu hóa thông tin, rồi đồng loạt vỗ tay rầm rộ.

- Cậu làm tốt lắm, Kuzka, - Ogryza cất lời khen ngợi.
- Tầm mắt của anh sao rồi? - Busenka quay sang hỏi Gorguly. - Đã được mở rộng chưa?
- Cảm ơn cô, mở rộng lắm rồi, - Gorguly đáp. - Từ bé đến giờ tôi chưa từng chứng kiến thứ gì giống như vậy. Thật sự quá ấn tượng. Nhưng điều khiến tôi bất phục nhất lại là điệu múa ba-lê nhào lộn mà cậu ấy đã biểu diễn để đúc kết ra được cái dấu hiệu đó.
- Đương nhiên, không hề dễ chút nào, - Kuzka hãnh diện đồng tình. - Hơn nữa, trong lúc tớ đang tập trung tính toán, các cậu cứ đứng ngoài thì thầm to nhỏ mãi, làm tớ mất tập trung lắm đấy.
- Bọn tớ chỉ đang trầm trồ thán phục thôi mà, - Busenka vội giải thích, - với cả, bọn tớ còn đang bàn luận xem chuỗi chuyển động của cậu có tính tuần hoàn hay không.
- Chuỗi nào cơ?
- Nếu ta xét dãy các tư thế của cậu, ký hiệu là x_n . Chẳng hạn, theo những gì tớ nhớ thì...

$$x_1 = \text{👉}, \quad x_2 = \text{👉}, \quad x_3 = \text{👉}, \quad \dots$$

Tớ nhận ra rằng các tư thế của cậu liên tục lặp lại, viết theo ngôn ngữ logic toán học ngắn gọn thì là:

$$\forall k \exists n x_k = x_{k+n}.$$

- Mấy cái ký hiệu tượng hình này nghĩa là gì thế? - Kuzka thắc mắc.
- Đó là các lượng từ trong logic. Ký hiệu " \forall " đọc là "với mọi"; còn " \exists " đọc là "tồn tại". Cả mệnh đề đó sẽ được đọc là: với mọi số k , tồn tại một số n sao cho $x_k = x_{k+n}$.
- Câu thần chú đó rốt cuộc có ý nghĩa gì?
- Đơn giản là thế này nhé: cậu chọn lấy một số k bất kỳ...
- "Bất kỳ" là cụ thể số nào cơ chứ? Và lấy ở đâu ra? - Kuzka vẫn tỏ vẻ không hiểu.
- Cứ lấy trong ngăn kéo của tớ chẳng hạn, - Ogryza lên tiếng, - trong đó tớ cất cả đồng số "bất kỳ" đấy. Đây này. - Ogryza lấy ra một chiếc hộp màu xanh, trên nắp hộp có đính kèm một chiếc phong bì nhỏ. Cô xé lớp vỏ phong bì rồi đưa nó cho Kuzka.

- Để tớ xem nào, - Kuzka hào hứng nói, - trong này chứa cái gì đây... Số 31! Ra vậy, 31 chính là một số bất kỳ à?
- Cũng không hoàn toàn là thế... Nhưng ít nhất nó là một đại diện cho các số "bất kỳ"! Để làm ví dụ thì ta có thể chọn số 31, nhưng về nguyên tắc, bất cứ con số nào khác cũng đều có quyền được đưa ra xem xét.
- Làm sao có thể xét hết tất cả mọi số được cơ chứ?
- Phương pháp là ta chọn ra một số đại diện, gọi nó là k , sau đó tiến hành lập luận mà không sử dụng bất kỳ tính chất đặc thù riêng biệt nào của số k đó. Khi làm như vậy, lập luận của chúng ta sẽ tự động đúng với mọi con số khác.
- Nói cách khác, nếu thích thì tớ có thể chọn $k = 31$, nhưng trong quá trình lập luận, tớ không được phép sử dụng dữ kiện nó chính xác là số 31?
- Hoàn toàn chính xác, - Gorguly tán thành, - ví dụ như cậu không được phép sử dụng tính chất "tổng bình phương các chữ số của nó bằng 10" vào trong lập luận.
- Nghe vẫn trừu tượng quá. Thôi bỏ qua đi. Tiếp theo là đoạn "tồn tại số $n...$ " - Kuzka đọc lại câu nói khi nãy. - Thế thì con số ấy tồn tại ở đâu?
- Nó tồn tại ngay ở đây này, bên trong chiếc hộp màu xanh, - Ogryza đáp và đẩy chiếc hộp về phía Kuzka.
- Cậu chắc chắn đây đúng là con số đó chứ? - Kuzka hỏi với vẻ bán tín bán nghi.
- Chính nó đây, - Ogryza xác nhận, - chiếc hộp này được thiết kế đi liền với chiếc phong bì chứa số k mà cậu vừa lấy.
- Được rồi, để tớ mở ra xem sao, - Kuzka cẩn thận hé mở nắp hộp.

Đột nhiên, "con số" lập tức bật tung ra khỏi hộp, nhảy vọt xuống sàn nhà, ngo ngoe mấy chục cái chân mỏng dính trông vô cùng buồn cười. Nó chạy thục mạng về phía góc phòng rồi chui tọt vào một cái khe hẹp dưới chân tường.

- Ái chà! - Kuzka giật mình kêu lên. - Có ai trong số các cậu kịp nhìn rõ đó là số mấy không?
- Tôi chịu, không nhìn kịp, - Gorguly đáp.
- Tớ cũng thế, - Busenka lắc đầu.
- Thế thì làm sao chúng ta sử dụng được con số này trong tính toán nếu thậm chí còn chẳng biết nó có giá trị bằng bao nhiêu?
- Quan tâm giá trị của nó làm gì cơ chứ? Điểm mấu chốt ở đây là con số đó có tồn tại, - Busenka giải thích.
- Nhưng tóm lại là nó tồn tại ở đâu?

- Ở đâu là ở đâu chứ? Ban đầu thì nó tồn tại ở bên trong chiếc hộp. Còn bây giờ thì nó đang tồn tại ở dưới chân tường kia kìa! Sự tồn tại của nó là điều hiển nhiên, chỉ là chúng ta không biết giá trị cụ thể của nó thôi. À, mà cậu cũng cần lưu ý rằng số n này là "hàng đính kèm" chỉ dành riêng cho số $k = 31$ thôi nhé. Nếu cậu chọn một số k khác, thì rất có khả năng cậu sẽ nhận được một số n hoàn toàn khác.
- Nghĩa là nó sống trong một chiếc hộp khác chứ gì, - Kuzka lảm bảm phỏng đoán. - Nhưng việc " k khác sẽ kéo theo n khác" có quan trọng đến mức đó không, trong khi đằng nào thì chúng ta cũng chẳng hề biết giá trị cụ thể của n bằng bao nhiêu?
- Cậu vẫn nên tập hình dung rõ ràng về mối quan hệ đó. Hãy lấy ví dụ, nếu số n này là một giá trị cố định và sử dụng chung cho mọi số k , thì ta hoàn toàn có thể kết luận rằng dãy số đó là một dãy tuần hoàn. Được viết dưới ngôn ngữ logic toán học là:

$$\exists n \forall k x_k = x_{k+n}.$$

- So với cái mệnh đề ban đầu, cậu chỉ việc đảo ngược thứ tự hai chữ thôi mà, - Kuzka nhận xét. - Giống hệt như việc nói "Mỗi con gián đều có một thói quen ngoáy râu" hay "Tồn tại một thói quen ngoáy râu mà mọi con gián đều có". Chúng có khác gì nhau đâu chứ?
- Đừng vội vàng đơn giản hóa vấn đề như vậy. Hai mệnh đề của chúng ta mang ý nghĩa khác nhau hoàn toàn, - Busenka nghiêm túc nói. - Cậu hoàn toàn có thể tự mình kiểm tra sự khác biệt đó mà.
- Tớ á? Cậu bắt tớ tự kiểm tra á? Tớ chỉ là một con côn trùng nhỏ bé mỏng manh thôi, sao cậu nữ bắt tớ phải làm những việc nặng nhọc như vậy... - Kuzka giả vờ than vãn, nhưng lời rên rỉ còn chưa kịp dứt, cậu đã đột ngột dựng đứng cặp râu lên với vẻ đầy khí thế: - Được thôi, tớ sẽ tự kiểm tra cho các cậu xem!

Khảo sát Mệnh đề 1:

$$\forall k \exists n x_k = x_{k+n}.$$

Mệnh đề này có nghĩa là: nếu ta chọn một số k bất kỳ, ví dụ lấy $k = 31$, thì bên trong chiếc hộp đi kèm của Ogryza sẽ xuất hiện một số n nào đó sao cho tư thế ở bước thứ 31 (x_{31}) sẽ hoàn toàn trùng khớp với tư thế ở bước thứ $31 + n$ (x_{31+n}). Nói một cách dễ hiểu là tư thế x_{31} chắc chắn sẽ được lặp lại trong tương lai! Và vì điều kiện này đúng với mọi số k bất kỳ chứ không chỉ riêng số 31, ta có thể kết luận: mọi tư thế đều sẽ được lặp lại tại một thời điểm nào đó trong tương lai!

Chuyển sang Mệnh đề 2:

$$\exists n \forall k x_k = x_{k+n}.$$

Mệnh đề này phát biểu rằng: tồn tại sẵn một khoảng cách n cố định (mặc dù hiện tại ta không biết chính xác n bằng bao nhiêu do nó đã chạy tót xuống gầm chân tường rồi), và với chính khoảng cách n cố định này, tại mọi thời điểm k bất kỳ, tư thế x_k đều sẽ lặp lại ở bước x_{k+n} . Vậy ở trường hợp này, toàn bộ các tư thế không chỉ lặp lại, mà chúng còn lặp lại theo một chu kỳ tuần hoàn cố định mãi mãi!

Vậy nếu ta thử thay đổi bằng các lượng từ khác thì sao nhỉ? Chẳng hạn như tạo ra Mệnh đề 3:

$$\forall k \forall n x_k = x_{k+n}.$$

Mệnh đề này có nghĩa là: cho dù bạn có chọn số k nào đi chăng nữa, và kết hợp với bất kỳ khoảng cách n nào đi chăng nữa, thì tư thế x_k luôn luôn giống hệt tư thế x_{k+n} . Tức là tớ chẳng làm gì khác ngoài việc giữ nguyên đúng một tư thế!

Busenka, Gorguly và Ogryza trở mắt ngạc nhiên nhìn Kuzka. Còn Kuzka lúc này dường như đang "lên đồng", hăng say hùng biện không ngừng nghỉ.

- Mọi người cứ thích làm ra vẻ khoa học nguy hiểm với mấy cái ký hiệu toán học ngoằn ngoèo, trong khi bản chất của vấn đề thì có khác gì nhau đâu cơ chứ! Thế tớ hỏi các cậu, nếu ta tiếp tục đổi chỗ hai lượng từ ở mệnh đề vừa rồi thì sao? Ta sẽ có Mệnh đề 4:

$$\forall n \forall k x_k = x_{k+n}.$$

Nó sẽ có ý nghĩa là...

- Khi hai lượng từ "với mọi" đứng liền kề nhau, cậu có thể đổi chỗ chúng thoải mái! - Ogryza vội vàng lên tiếng ngắt lời để ngăn cậu bạn đang quá hưng phấn. - Ý nghĩa của chúng vẫn giống y hệt nhau thôi.
- Ví dụ thế này nhé: "Trong mọi tầng hầm, mỗi một con chuột đều sở hữu một kho phô mai của riêng mình." Đúng không nào?
- Nghe rất hợp lý, - Ogryza gật đầu.
- Thế bây giờ tớ thử đổi chỗ nhé: "Mỗi một con chuột, ở trong mọi tầng hầm, đều sở hữu một kho phô mai." Ví dụ như khu vực tầng hầm nhà Zlobnopotam chỉ có đúng một cái kết sắt. Thế cậu định cất phô mai của cậu vào trong cái kết sắt đó à?
- Đương nhiên là không rồi, - Ogryza gãi đầu bối rối, - phô mai nặng mùi như thế, Zlobnopotam sẽ đánh hơi thấy và phát hiện ra ngay lập tức.
- Đấy, các cậu thấy chưa! - Kuzka đưa mắt nhìn quanh mọi người với vẻ đầy trách móc. - Chỉ vì dính vào mấy cái khái niệm lượng từ linh tinh rắc rối này mà suýt chút nữa là tớ đã đánh mất dấu hiệu chia hết tuyệt vời mà mình vừa tìm ra! Nói thật nhé, còn trùng chúng ta sống rất đơn giản, hoàn toàn chẳng cần đến mấy cái lượng từ làm gì! Tớ ghét lượng từ!

Ngay tại đỉnh điểm của màn diễn thuyết đầy cảm xúc ấy, Kuzka còn chưa kịp nổi giận cho thỏa thích thì bỗng nhiên cậu ngáp dài một cái, cơ thể từ từ trượt xuống, tựa hẳn lưng vào bức tường và nhanh chóng ngủ lịm đi.

- Đúng là bắt cậu nhóc làm việc quá sức rồi, - Ogryza khẽ chép miệng tỏ vẻ không hài lòng. - Bắt hai cái lượng từ chui vào trong cái đầu nhỏ bé của cậu ấy đã là một kỳ tích, mà chúng có trụ lại trong đó được lâu đâu cơ chứ.

Busenka đi tìm đầu đó được một chiếc lá cỏ ba lá mềm mại rồi nhẹ nhàng lót xuống dưới đầu để Kuzka gói lên.

- Mà tiện thể cho tôi hỏi, mấy cái hộp và phong bì kỳ diệu lúc nãy cô lấy ra thực chất là cái gì vậy? - Gorguly quay sang tò mò hỏi Ogryza.
- À, mấy thứ đó... Số là tối nay ở quán Am-Bar, tớ có tổ chức một chương trình quay xổ số 100% trúng thưởng. Cái hộp lúc nãy chính là một trong những phần thưởng của chương trình, và theo đúng kịch bản thì người giữ tấm vé số 31 sẽ quay trúng nó. Bên trong hộp chứa một con rết thuộc họ Symphyla: cơ thể có 24 chân, hệ hô hấp bằng khí quản, trông oai phong lẫm liệt y hệt như một con chiến mã thực thụ vậy!
- Ừ, công nhận là con vật đó trông ngầu thật đấy, - Gorguly gật gù đồng tình, - nhưng điều tôi thắc mắc là: con rết đó thì liên quan gì đến mấy khái niệm toán học nãy giờ?
- Thật ra thì chẳng có mối liên hệ nào cả. Nhưng anh phải công nhận là, để vào vai ẩn số n chạy trốn, nó đã có một màn diễn xuất vô cùng thiên tài!