Mục lục

TẬP SAN TOÁN HỌC

STAR EDUCATION

Số thứ 14 - 2026

Tập san số 14 lần này sẽ gồm 4 phần, trong đó

- Phần 1 giới thiệu các bài viết chuyên đề về đại số, hình học, số học, tổ hợp của các giáo viên tại trung tâm STAR EDUCATION.
- Phần 2 giới thiệu một số bài kiểm tra chuyên đề của các lớp chuyên đề, lớp đội tuyển ở trung tâm.
- Phần 3 giới thiệu đề thi và lời giải các đề thi chọn đội tuyển, dự tuyển của Thành phố Hồ Chí Minh, Phổ thông năng khiếu trong năm vừa qua.
- Phần 4 giới thiệu đề thi và lời giải của một số đề thi chọn đội tuyển vòng 1 của Trung Quốc trong các năm gần đây.

Các bài viết, chủ đề cho bạn đọc tham khảo để có thêm nhiều góc nhìn về toán học, đặc biệt là toán chuyên thi học sinh giỏi. Các bài kiểm tra, các chuyên đề vừa là các bài ôn tập, vừa là kim chỉ nam để các bạn học sinh định hướng học tập tốt.

Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi sai sót, mọi đóng góp xin gửi về địa chỉ **nguyentangvu@gmail.com**. Bản quyền thuộc trung tâm STAR EDUCATION, được đăng tải miễn phí trên mạng. Mong rằng tài liệu này sẽ được đón nhận và được chia sẻ rộng rãi. Xin chân thành cảm ơn.

PHẦN 1 MỘT SỐ BÀI VIẾT CHUYÊN ĐỀ

Trong phần này trình bày về một số chủ đề chuyên toán ở bậc Trung học cơ sở và Trung học phổ thông cho các giáo viên ở STAR EDUCATION biên soạn.

§1. KHAI THÁC MỘT SỐ HỆ THỨC VECTOR

NGUYỄN TĂNG VŨ - Phổ thông năng khiếu Đại học Quốc gia - Thành phố Hồ Chí Minh

Trong chương trình lớp 10, phần hình học có khái niệm mới là vector tương đối quan trọng, ở đây vector được định nghĩa theo ngôn ngữ hình học và các phép toán trên vector được xây dựng một cách có hệ thống đầy đủ, hợp lý. Vector là khái niệm mới, hiện đại, có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán, trong bài viết nhỏ này ta cùng tìm hiểu về một vài hệ thức vector đẹp và ứng dụng trong giải toán hình học.

A Từ định lý Jacobi đến đường thẳng Newton

Định lí 1.1. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. AM cắt BC tại D. Đặt $S_a = S_{MBC}, S_b = S_{MAC}, S_c = S_{MAB}, S = S_{ABC}$. Khi đó ta có

$$S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

Chứng minh. Gọi D là giao điểm của MA với BC, khi đó ta có

$$\frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$$

Thật vậy, ta có $DC \cdot \overrightarrow{MB} + DB \cdot \overrightarrow{MC} = DC \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) + DB \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = BC \cdot \overrightarrow{MD} + DC \cdot \overrightarrow{DB} + DB \cdot \overrightarrow{DC} = BC \cdot \overrightarrow{MD}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{MD} = \frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} (1)$$

Hơn nữa

$$\overrightarrow{MD} = -\frac{MD}{MA} \cdot \overrightarrow{MA} (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{MD}{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$$

Mặt khác

$$\frac{DC}{BC} = \frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{S_b}{S_b + S_c}, \quad \frac{DB}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}, \quad \frac{ND}{NA} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

nên

$$S_a \cdot \overrightarrow{M_A} + S_b \cdot \overrightarrow{M_B} + S_c \cdot \overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{0}$$

Trên đây là định lý Jacobi, trong trường hợp M nằm ngoài tam giác thì đẳng thức trên có dấu trừ và cộng.

Khi M trùng với một số điểm đặc biệt của tam giác thì hệ thức trên sẽ cụ thể hơn, ví dụ nếu M trùng với trọng tâm G của tam giác thì $S_a = S_b = S_c$ nên ta có hệ thức $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, rất quen thuộc. Khi M trùng với tâm đường tròn nội tiếp ta có ví dụ sau:

Ví dụ 1.1. Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng

$$a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Lời giải: Khi I là tâm đường tròn nội tiếp, theo định lý Jacobi ta có

$$S_{ABC} \cdot \overrightarrow{IA} + S_{BAC} \cdot \overrightarrow{IB} + S_{BCA} \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{1}{2}ra \cdot \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}rb \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}rc \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{1}{2}r(a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{0}$$

■

Định lí 1.2. Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trong tam giác, khi đó x, y, z thỏa

$$\frac{x}{S_{MBC}} = \frac{y}{S_{MAC}} = \frac{z}{S_{MAB}}$$

(hay còn kí hiệu $S_{MBC} : S_{MAC} : S_{MAB} = x : y : z$) khi và chỉ khi

$$x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

Chứng minh.

- Đặt

$$\frac{x}{S_a} = \frac{y}{S_b} = \frac{z}{S_c} = \frac{1}{t} \Rightarrow S_a = tx,\ S_b = ty,\ S_c = tz$$

$$S_a\overrightarrow{M_A} + S_b\overrightarrow{M_B} + S_c\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{0}$$

$$tx\overrightarrow{M_A} + ty\overrightarrow{M_B} + tz\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{0}$$

$$x\overrightarrow{M_A} + y\overrightarrow{M_B} + z\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{0}$$

- Giả sử ta có
$$x\overrightarrow{M_A} + y\overrightarrow{M_B} + z\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{0} \quad (1)$$
và
$$S_a\overrightarrow{M_A} + S_b\overrightarrow{M_B} + S_c\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$
Nhân (1) với S_a và trừ cho (2) nhân x ta có
$$(yS_a - xS_b)\overrightarrow{M_B} + (zS_a - xS_c)\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} yS_a = xS_b \\ zS_a = xS_c \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{S_b}{S_a}, \quad \frac{z}{x} = \frac{S_c}{S_a}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{S_a} = \frac{y}{S_b} = \frac{z}{S_c}$$

> ***Nhận xét:***
> Mở rộng hơn, khi M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác thì luôn tồn tại bộ ba $(x; y; z)$ thỏa
> $$x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}\,(*)$$
> và nếu có một bộ ba khác $(x'; y'; z')$ thỏa $(*)$ thì $x : y : z = x' : y' : z'$ ta gọi $(x; y; z)$ là tọa độ tỉ cự của M trong mặt phẳng tam giác ABC.

Sau đây là một ví dụ áp dụng của định lý trên

Ví dụ 1.2. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi I, H lần lượt là tâm nội tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi
$$HA \cdot \overrightarrow{IA} + HB \cdot \overrightarrow{IB} + HC \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Lời giải: Do I là tâm đường tròn nội tiếp nên ta có:
$$a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Theo giả thiết và kết quả bài trên ta có:
$$\frac{HA}{a} = \frac{HB}{b} = \frac{HC}{c}$$

Từ đó suy ra:
$$\frac{HA}{HB} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

Áp dụng định lý sin thì
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Suy ra:
$$\sin A \cdot \sin B - \sin A \cdot \sin B = 0$$

$\Rightarrow \sin(A - B) = 0$

$\Rightarrow A = B$ ■

Ví dụ 1.3. Cho tam giác ABC có đường tròn tâm I nội tiếp tam giác và tiếp xúc với các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E và F. Chứng minh rằng AD, BE và CF đồng quy tại điểm J và

$$(p-b)(p-c)\overrightarrow{JA}+(p-a)(p-c)\overrightarrow{JB}+(p-b)(p-a)\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{0}$$

Lời giải: Ta chứng minh được $AE = AF = p - a, BD = BF = p - b, CD = CE = p - c$. Theo định lý Ceva thì ta có AD, BE, CF đồng quy tại J.

Áp dụng định lý Jacobi ta có

$$x\cdot\overrightarrow{JA}+y\cdot\overrightarrow{JB}+z\cdot\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{0}$$

với

$$x:y:z=S_{IBC}:S_{IAC}:S_{IAB}$$

Mà

$$\frac{S_{IBC}}{S_{IAC}}=\frac{FB}{FA}=\frac{p-b}{p-a}$$

suy ra

$$S_{IBC}(p-a)=S_{IAC}(p-b)=S_{IAB}(p-c)$$

Do đó

$$S_{IBC}:S_{IAC}:S_{IAB}=\frac{1}{p-a}:\frac{1}{p-b}:\frac{1}{p-c}$$

hay

$$\frac{1}{p-a}\overrightarrow{IA}+\frac{1}{p-b}\overrightarrow{IB}+\frac{1}{p-c}\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$

$$(p-b)(p-c)\overrightarrow{IA}+(p-a)(p-c)\overrightarrow{IB}+(p-a)(p-b)\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$

■

Ví dụ 1.4. Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng

$$a\cdot\overrightarrow{ID}+b\cdot\overrightarrow{IE}+c\cdot\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{0}$$

Lời giải: Áp dụng định lý Jacobi cho tam giác DEF ta có

$$S_{IEF}\cdot\overrightarrow{ID}+S_{IDF}\cdot\overrightarrow{IE}+S_{IDE}\cdot\overrightarrow{IFF}$$

Ta cần chứng minh

$$S_{IFE}:S_{IDF}:S_{IDE}=a:b:c$$

Thật vậy $S_{IEF}=\frac{1}{2}r^2\cdot\sin IEF=\frac{1}{2}r^2\cdot\sin A=\frac{1}{2}r^2\frac{a}{2R}$, suy ra $\frac{S_{IEF}}{a}=\frac{r^2}{4R}$.
Tương tự ta cũng có $\frac{S_{IDF}}{b}=\frac{S_{IDE}}{c}=\frac{r^2}{4R}$, do đó ta có điều cần chứng minh. ■

Từ bài toán này ta có Định lý con nhím cho trường hợp tam giác như sau:

Định lí 1.3. (Định lý con nhím) Cho tam giác ABC. Các vector $\overrightarrow{a}$ vuông góc với BC và hướng ra ngoài tam giác và có độ dài bằng BC; các vector $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ được định nghĩa tương tự. Khi đó

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

Định lý con nhím còn đúng trong trường hợp đa giác, hoặc trường hợp đa diện.

Định lí 1.4. (Định lý con nhím) Cho đa giác lồi n đỉnh $A_1A_2...A_n$, các vecto $\overrightarrow{e_i}$ có độ dài 1 vuông góc với cạnh A_iA_{i+1} $(A_{n+1} \equiv A_1)$ và hướng ra ngoài. Khi đó ta có hệ thức

$$A_1A_2.\overrightarrow{e_1} + A_2A_3.\overrightarrow{e_2} + ... + A_nA_1.\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$$

Định lý này các bạn có thể chứng minh bằng quy nạp.

Sau đây là một ví dụng áp dụng Định lý con nhím trong trường hợp tứ giác.

Định lí 1.5. (Đường thẳng Newton) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Khi đó M, I, N thẳng hàng.

Chứng minh. Gọi E, F, G, H lần lượt là tiếp điểm của (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA.
Đặt $AE = AH = a, BE = BF = b, CF = CG = c, DG = DH = d$.
Ta có $AB \cdot \overrightarrow{IE} = b \cdot \overrightarrow{IA} + a \cdot \overrightarrow{IB}, BC \cdot \overrightarrow{IF} = b \cdot \overrightarrow{IC} + c \cdot \overrightarrow{IB}, CD \cdot \overrightarrow{IG} = c \cdot \overrightarrow{ID} + d\overrightarrow{IC}$ và $AD \cdot \overrightarrow{IH} = d \cdot \overrightarrow{IA} + a \cdot \overrightarrow{ID}$.

Theo định lý con nhím ta có

$$AB \cdot \overrightarrow{IE} + BC \cdot \overrightarrow{IF} + CD \cdot \overrightarrow{IG} + AD \cdot \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{0}$$

suy ra

$$(a+c)(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}) + (b+d)(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{0}$$

Mà $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN}$.

Do đó

$$(a+c)\overrightarrow{IN} + (b+d)\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{0}$$

từ đó suy ra I, M, N thẳng hàng và $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{b+d}{a+c}$.

Tiếp theo là áp dụng Định lý Jacobi trong chứng minh định lý về điểm Lemoine.

Ví dụ 1.5. (Đường đối trung điểm điểm Lemoine) Đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến qua đường phân giác xuất phát cùng đỉnh được gọi là đường đối trung của tam giác.

a) Trong một tam giác, 3 đường đối trung đồng qui tại một điểm L. Hơn nữa ta có hệ thức

$$a^2 \cdot \overrightarrow{LA} + b^2 \cdot \overrightarrow{LB} + c^2 \cdot \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$$

b) Trong một tam giác, điểm Lemoine là trọng tâm của của tam giác có các đỉnh là hình chiếu của điểm Lemoine trên các cạnh của tam giác đó.

Lời giải: a)

Ta có:

$$\frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{CAM}} = \frac{BM}{CM} = \frac{\sin \widehat{ABM}}{\sin \widehat{ACM}}$$

(1)

Lại có:
$$\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{CAP}} = \frac{PB}{PC} = \frac{\sin\widehat{ABP}}{\sin\widehat{ACP}}$$
(2)

Vì $\widehat{ABP} + \widehat{ACP} = 180^\circ$ nên:
$$\frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{CAM}} = \frac{\sin\widehat{PAC}}{\sin\widehat{PAB}}$$
Do đó:
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$
b)

Xét tam giác ABC có các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho:
$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{EC}{EA} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{FA}{FB} = \frac{b^2}{a^2}$$
Khi đó:
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB} = 1$$
$\Rightarrow AD, BE, CF$ đồng quy (theo định lý Ceva).

Gọi giao điểm là I. Ta có:
$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$
Xét theo diện tích:
$$\frac{S_{\triangle LBA}}{S_{\triangle LAC}} = \frac{BF}{FA} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{S_{\triangle LBC}}{S_{\triangle LCA}} = \frac{a^2}{c^2}$$
Suy ra:
$$a^2\cdot\overrightarrow{LA} + b^2\cdot\overrightarrow{LB} + c^2\cdot\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$$
■

B Từ tích vô hướng đến các đẳng thức độ dài

Tích vô hướng của hai vector được định nghĩa vô cùng đơn giản, là đại lượng được xác định bằng tích độ dài hai vector với cos góc tạo bởi hai vector đó. Tuy vậy ứng dụng của tích vô hướng nhiều, trong số đó có tính toán độ dài các đoạn thẳng, tính khoảng cách các điểm, thiết lập các đẳng thức hình học hay. Trong mục này ta chủ yếu quan tâm đến việc khai thác tích vô hướng kết hợp với định lý Jacobi để thiết lập đẳng thức hoặc bất đẳng thức hình học. Ta bắt đầu bằng ví dụ sau:

Ví dụ 1.6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và đường phân giác trong AD. Chứng minh rằng

a) $AM^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2$.

b) $AD = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$.

c) Với K là một điểm bất kì thuộc đoạn BC. thì

$$BC \cdot AK^2 = KC \cdot AB^2 + KB \cdot AC^2 - BC \cdot KB \cdot KC$$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Bình phương hai vế:

$$AM^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Mà:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

Do đó:

$$AM^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Vì $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c}{b}$ nên:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

Bình phương hai vế:

$$AD^2 = \frac{1}{(b+c)^2}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(b^2AB^2 + c^2AC^2 + 2bc\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$$

Mà:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = bc\cos A$$

Do đó:

$$AD^2 = \frac{1}{(b+c)^2}\left(b^2c^2 + c^2b^2 + 2b^2c^2\cos A\right)$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{2b^2c^2(1 + \cos A)}{(b+c)^2}$$

Suy ra:

$$AD = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$$

c)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{KC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{KB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Bình phương hai vế, ta có:

$$AK^2 = \frac{1}{BC^2} \left(KC^2 \cdot AB^2 + KB^2 \cdot AC^2 + 2KB \cdot KC \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

Nhân hai vế với BC^2, được:

$$BC^2 \cdot AK^2 = KC^2 \cdot AB^2 + KB^2 \cdot AC^2 + 2KB \cdot KC \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Ta biết rằng:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

Thay vào biểu thức trên, ta được:

$$BC^2 \cdot AK^2 = KC^2 \cdot AB^2 + KB^2 \cdot AC^2 + KB \cdot KC \left(AB^2 + AC^2 - BC^2 \right)$$

Thu gọn:

$$BC \cdot AK^2 = KC \cdot AB^2 + KB \cdot AC^2 - KB \cdot KC \cdot BC^2$$

■

Định lí 1.6. (Định lý Jacobi - Lagrange) Cho tam giác ABC, các số thực α, β, γ có tổng khác 0. Điểm I thỏa $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$. Khi đó với mọi điểm M ta có:

$$\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 + \gamma \cdot MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + \alpha \cdot IA^2 + \beta \cdot IB^2 + \gamma \cdot IC^2$$

và

$$\alpha \cdot IA^2 + \beta \cdot IB^2 + \gamma \cdot IC^2 = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \alpha\gamma AC^2)$$

Chứng minh. Ta có

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA}^2 + \beta \cdot \overrightarrow{MB}^2 + \gamma \cdot \overrightarrow{MC}^2 = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + \gamma(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + (\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC})^2$$

Vì $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, nên ta có:

$$(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC})^2 = 0$$

Khai triển:

$$\alpha^2 IA^2 + \beta^2 IB^2 + \gamma^2 IC^2 + 2\alpha\beta\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\beta\gamma\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 2\gamma\alpha\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2}, \quad \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2}, \quad \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{IC^2 + IA^2 - AC^2}{2}$$

Thế vào, ta được:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2)=\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2$$

Do đó

$$\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2=\frac{\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Từ định lý trên ta có đẳng thức sau, được gọi là định lý Jacobi–Lagrange:

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MI^2+\frac{\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Nhận xét:

Khi ta thay đổi điểm I bằng các điểm đặc biệt trong tam giác ta có đẳng thức khác nhau. Ví dụ nếu I trùng với trọng tâm G của tam giác ABC thì $\alpha=\beta=\gamma=1$, với mọi điểm M ta có

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

khi đó đại lượng $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi M trùng G.
Đặc biệt, khi cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác thì

$$OA^2+OB^2+OC^2=3OG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

. Ta tính được $OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$, dẫn tới $R^2\geq\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

Bằng cách cho các điểm khác, ta sẽ nhận được nhiều hệ thức tương tự. Các bạn xem thêm vài ví dụ sau.

Ví dụ 1.7. Cho tam giác ABC có I là tâm nội tiếp và O là tâm ngoại tiếp. Chứng minh rằng

a) $a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot IC^2=abc$.

b) $IO^2=R^2-2Rr$ (Hệ thức Euler). Từ đó suy ra $R\geq 2r$.

Lời giải:

a) Áp dụng Định lý Jacobi-Lagrange cho trường hợp I là tâm nội tiếp. Ta có

$$a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot IC^2=\frac{1}{a+b+c}(abc^2+bca^2+acb^2)=abc$$

b) Khi M trùng với O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$$a\cdot OA^2+b\cdot OB^2+c\cdot OC^2=(a+b+c)OI^2+abc$$

Suy ra $IO^2=R^2-\frac{abc}{a+b+c}=R^2-2Rr$.
Từ đó suy ra $R^2-2Rr\geq 0$, dẫn tới $R\geq 2r$.

■

Ví dụ 1.8. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. M là trung điểm cạnh BC. Đường tròn tâm M bán kính MH cắt BC tại A_1, A_2; các điểm B_1, B_2 và C_1, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng 6 điểm A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2$ cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn đó theo a, b, c, R.

Lời giải: Ta có

$$\overrightarrow{OA_1}^2 = \overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{MA_1}^2 = OB^2 - BM^2 + HA^2$$

$$= R^2 - \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{2}(HB^2 + HC^2) - \frac{1}{4}a^2$$

$$= R^2 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}(HB^2 + HC^2) - R^2$$

$$= \frac{1}{2}(HA^2 + HB^2 + HC^2) - R^2$$

$$\Rightarrow OA_1^2 = \frac{1}{2}(HA^2 + HB^2 + HC^2) - R^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right) - R^2$$

$$\boxed{OA_1^2 = 5R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Chứng minh tương tự cũng có cho OB_1^2, OC_1^2, do đó O cách đều 6 điểm A_i, B_i, C_i. ■

Ví dụ 1.9. Cho tam giác ABC có G, H, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm nội tiếp. Chứng minh rằng

a) $IH^2 = 4R^2 - \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a + b + c}$

b) $IG^2 = \dfrac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{3(a + b + c)}$.

Lời giải: Áp dụng định lý Jacobi-Lagrange khi I là tâm nội tiếp tam giác.

a) Khi M là trực tâm H của tam giác, ta có

$$a \cdot HA^2 + b \cdot HB^2 + c \cdot HC^2 = (a + b + c)HI^2 + abc$$

Suy ra $HI^2 = \dfrac{1}{a + b + c}(a \cdot HA^2 + b \cdot HB^2 + c \cdot HC^2) - \dfrac{abc}{a + b + c}$. (1)

Mặt khác $HA^2 = 4OM^2 = 4R^2 - a^2$, tương tự thì $HB^2 = 4R^2 - b^2, HC^2 = 4R^2 - c^2$.

Khi đó $a \cdot HA^2 + b \cdot HB^2 + c \cdot HC^2 = 4R^2(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có: $IH^2 = 4R^2 - \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a + b + c}$.

b) Khi M trùng với trọng tâm G của tam giác, ta có

$$a \cdot GA^2 + b \cdot GB^2 + c \cdot GB^2 = (a + b + c)GI^2 + abc$$

Suy ra

$$GI^2 = \frac{1}{a + b + c}(a \cdot GA^2 + b \cdot GB^2 + c \cdot GC^2) - \frac{abc}{a + b + c}$$

Ta có $a \cdot GA^2 = \frac{4a}{9}(\frac{1}{2}(b^2+c^2) - \frac{1}{4}a^2) = \frac{2}{9}(ab^2+ac^2) - \frac{1}{9}a^3$.
Tương tự ta cũng có $b \cdot GB^2 = \frac{2}{9}(ba^2+bc^2) - \frac{1}{9}b^3, c \cdot GC^2 = \frac{2}{9}(ca^2+cb^2) - \frac{1}{9}c^3$.
Từ đó ta có: $IG^2 = \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{3(a+b+c)}$.

■

Ví dụ 1.10. Cho tam giác ABC. Gọi O, I, G, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng

$$OI \geq OG \geq \frac{1}{2}IH$$

Lời giải:

- Theo ví dụ trên thì ta có $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$ và $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$, khi đó $OI \geq OG$ tương đương

  $$\frac{abc}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \Leftarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$$

  Đúng theo AM-GM.
- Xét
  $$4OG^2 - IH^2 = \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{9}$$

  Ta cần chứng minh:
  $$\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{9} \geq 0$$

  Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

  $$5(a^3+b^3+c^3) + 9abc \geq 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a)$$

  Điều này đúng vì theo BĐT Schur

  $$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

  và
  $$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

■

Để kết thúc bài viết, chúng ta cùng đi chứng minh lại Định lý Feuerbach, một định lý được xem là đẹp nhất của hình học phẳng sơ cấp, và lần này ta sử dụng các kĩ thuật tính toán độ dài như đã làm ở các ví dụ trên.

Định lí 1.7. Chứng minh rằng trong một tam giác thì đường tròn nội tiếp và đường tròn Euler tiếp xúc nhau.

Chứng minh. Nhắc lại, đường tròn Euler là đường tròn qua trung điểm các cạnh và chân các đường cao, đường tròn Euler có bán kính bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp và tâm là trung điểm đoạn thẳng nối trực tâm với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Xét tam giác ABC, gọi H, O, I lần lượt là trực tâm, tâm ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC, N là tâm đường tròn Euler và N là trung điểm OH. Để chứng minh (I) và (N) tiếp xúc, ta cần chứng minh $IN = \frac{1}{2}R - r$, trong đó R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

Ta đi tính độ dài đoạn IN, như cách đã làm như các bài toán trên.

Ta có $a \cdot NA^2 + b \cdot NB^2 + c \cdot NC^2$

$= (a+b+c)NI^2 + \frac{1}{a+b+c}(abAB^2 + acAC^2 + bcBC^2)$

$= (a+b+c)IN^2 + abc.$

Vì N là trung điểm OH nên ta có

$$AN^2 = \frac{1}{2}AH^2 + \frac{1}{2}OA^2 - \frac{1}{4}OH^2(1)$$

Mà $AH = 2OM$ nên $AH^2 = 4OM^2 = 4(OC^2 - MC^2) = 4R^2 - a^2(2)$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

suy ra

$$OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= 3R^2 + (OA^2 + OB^2 - AB^2) + (OA^2 + OC^2 - AC^2) + (OB^2 + OC^2 - BC^2)$$

$$= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$NA^2 = \frac{1}{2}(4R^2 - a^2) + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}(9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = \frac{1}{4}(R^2 - a^2 + b^2 + c^2)$$

Tương tự cho NB^2, NC^2, từ đó ta có:

$a \cdot NA^2 + b \cdot NB^2 + c \cdot NC^2$

$= \frac{1}{4}\left((a+b+c)R^2 + a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) - a^3 - b^3 - c^3\right)$

Khi đó:

$IN^2 = \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4(a+b+c)}\left(a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) - a^3 - b^3 - c^3\right) - \frac{abc}{a+b+c}$

Mà:

$a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) - a^3 - b^3 - c^3$

$= (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) + 2abc = \frac{16s^2}{a+b+c} + 8Rs$

$= \frac{p^2r^2}{2p} + 8Rrp = \frac{16pr^2}{2} + 8Rrp$

Suy ra

$$\frac{1}{4(a+b+c)}\left(a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) - a^3 - b^3 - c^3\right) = r^2 + Rr$$

Kết hợp các kết quả trên ta có

$$IN^2 = \frac{1}{4}R^2 + r^2 - Rr = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

Suy ra $IN = \frac{R}{2} - r$, do đó (I) và (N) tiếp xúc trong.

> ***Nhận xét:***
> Lời giải trên đã kết hợp nhiều bước tính toán phức tạp đã được thể hiện ở các ví dụ trên. Tuy phức tạp nhưng nhìn chung lời giải rất tự nhiên, các bước đi rõ ràng, việc tính toán chỉ là việc kiểm tra lại tính đúng đắn mà thôi.

Tới đây xin kết thúc bài viết, hi vọng các em có thêm một bài học thú vị, tự mình có thể khám phá thêm nhiều đẳng thức và bất đẳng thức mới.

§2. PHƯƠNG PHÁP MOVING POINTS

NGUYỄN ANH KHOA - Đại học sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Để tìm hiểu phương pháp Moving Points một cách hiệu quả, bạn đọc cần trang bị trước các kiến thức về tỷ số kép trên đường thẳng, tỷ số kép trên đường tròn và tỷ số kép của chùm đường thẳng. Ngoài ra, các phép biến hình căn bản như phép dời hình, phép đồng dạng và phép nghịch đảo cũng rất cần thiết.

A Lý thuyết

1 Ánh xạ xạ ảnh

Đầu tiên, ta sẽ tìm hiểu về khái niệm ánh xạ xạ ảnh. Ký hiệu $\mathcal{F}$ là tập hợp các đối tượng mà trên đó tỷ số kép được định nghĩa. Ở bài viết này, ta quan tâm đến những phần tử của $\mathcal{F}$ là đường thẳng, đường tròn và chùm đường thẳng.

Định nghĩa 2.1. Với $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$. Một ánh xạ $f\colon C_1 \to C_2$ được gọi là một *ánh xạ xạ ảnh* nếu nó bảo toàn tỷ số kép. Nghĩa là, nếu $A, B, C, D \in C_1$ thì

$$(A, B, C, D) = (f(A), f(B), f(C), f(D)).$$

Từ định nghĩa, ta có thể chứng minh tính chất sau.

Tính chất 2.1. Ánh xạ xạ ảnh là song ánh.

Định lí 2.1. Hợp của hai ánh xạ xạ ảnh là một ánh xạ xạ ảnh. Nghĩa là, nếu f và g đều là ánh xạ xạ ảnh thì $f \circ g$ cũng là ánh xạ xạ ảnh.

Chứng minh: Giả sử $g\colon C_1 \to C_2$ và $f\colon C_2 \to C_3$ là hai ánh xạ xạ ảnh. Xét các điểm $A, B, C, D \in C_1$. Vì g là ánh xạ xạ ảnh nên

$$(A, B, C, D) = (g(A), g(B), g(C), g(D)).$$

Vì f là ánh xạ xạ ảnh nên

$$(g(A), g(B), g(C), g(D)) = (f(g(A)), f(g(B)), f(g(C)), f(g(D))).$$

hay

$$(g(A), g(B), g(C), g(D)) = (f \circ g(A), f \circ g(B), f \circ g(C), f \circ g(D)).$$

Vậy $(A, B, C, D) = (f \circ g(A), f \circ g(B), f \circ g(C), f \circ g(D))$, suy ra $f \circ g$ là ánh xạ xạ ảnh. ∎

Tiếp theo ta tìm hiểu một số ánh xạ xạ ảnh hay gặp.

Tính chất 2.2. Cho một đường thẳng cố định và một điểm X không nằm trên đường thẳng đó, ánh xạ biến mỗi điểm P trên đường thẳng thành đường thẳng XP, hoặc ngược lại, là một ánh xạ xạ ảnh.

Tính chất 2.3. Cho một đường tròn cố định và một điểm X nằm trên đường tròn đó, ánh xạ biến mỗi điểm P trên đường thẳng thành đường thẳng XP, hoặc ngược lại, là một ánh xạ xạ ảnh.

Từ hai tính chất trên, kết hợp với Định lý 1.1 ta được tính chất sau.

Tính chất 2.4. Cho một đường tròn $\mathcal{C}$ cố định, một điểm X nằm trên đường tròn đó và một đường thẳng l cố định không đi qua X. Ánh xạ biến mỗi điểm P trên đường thẳng l thành điểm P' (P' là giao điểm của đường thẳng XP và l), hoặc ngược lại, là một ánh xạ xạ ảnh.

Hơn nữa ta cũng có tính chất liên quan đến các phép biến hình.
Tính chất 2.5. Các phép biến hình như phép dời hình, phép đồng dạng và phép nghịch đảo là các ánh xạ xạ ảnh.

Từ phép nghịch đảo, ta có tính chất sau.
Tính chất 2.6. Cho một đường tròn $\mathcal{C}$ cố định và một điểm X không nằm trên đường tròn đó. Ánh xạ biến mỗi điểm P trên đường tròn $\mathcal{C}$ thành điểm P' (P' là giao điểm của đường thẳng XP và $\mathcal{C}$) là một ánh xạ xạ ảnh.

Ngoài ra, phép chiếu song song cũng là ánh xạ xạ ảnh.
Tính chất 2.7. Cho hai đường thẳng l và l' không trùng nhau. Trên l lấy các điểm A, B, C, D và trên l' lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Khi đó $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

2 Phương pháp Moving Points

Định lí 2.2. Cho $f : C_1 \to C_2$ và $g : C_1 \to C_2$ là hai ánh xạ xạ ảnh. Khi đó, $f \equiv g$ khi và chỉ khi $f = g$ tại ba điểm phân biệt trên C_1.

Chứng minh: Chiều thuận là hiển nhiên. Để chứng minh chiều đảo, ta chọn ba điểm phân biệt A_1, A_2, A_3 trên C_1 sao cho $f(A_i) = g(A_i) = B_i$ với mọi $i = 1, 2, 3$. Khi đó, với bất kỳ $D \in C_1 \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$ tồn tại duy nhất một điểm X trên C_2 sao cho

$$(B_1, B_2, B_3, X) = (A_1, A_2, A_3, D).$$

Do đó $X = f(D) = g(D)$, điều phải chứng minh. ■

Từ định lý trên, ta có thể chứng minh một bài toán bằng phương pháp Moving Points với các bước thực hiện như sau:

a) Xác định hai ánh xạ xạ ảnh f và g tương ứng biến điểm P trên một đường thẳng hoặc đường tròn thành điểm Q và Q'. Hai ánh xạ này phải tương ứng với hai cách dựng khác nhau: một cách được cho trong đề bài và một cách theo điều cần chứng minh.
b) Tìm ba vị trí của P sao cho Q và Q' trùng nhau.
c) Trình bày lời giải: chứng minh các kết quả ở bước 2, sau đó chứng minh $Q' \equiv Q$ bằng biến đổi tỷ số kép.

Lưu ý:

- Ta phải chọn điểm chuyển động P cho phù hợp, có một số bài toán không cho điểm chuyển động, trong khi một số bài toán thì việc chọn điểm chuyển động khác với điểm đã cho sẽ dễ thực hiện hơn.
- Ánh xạ f và g thường là hợp của nhiều ánh xạ xạ ảnh quen thuộc.
- Thông thường có hai vị trí của điểm P mà dễ dàng chứng minh hoặc là chứng minh tương tự nhau (có yếu tố đối xứng).

3 Điểm vô cùng

Trong phương pháp Moving Points, đôi lúc ta sẽ gặp khó khăn trong việc chứng minh các kết quả ở bước 2. Khi đó, người ta thêm các đối tượng *điểm vô cùng của đường thẳng* vào mặt phẳng, tạo thành mặt phẳng xạ ảnh để khắc phục khó khăn trên. Ta chọn P là điểm vô cùng và thông thường trường hợp này sẽ dễ chứng minh. Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho l là một đường thẳng, mọi đường thẳng l' song song với l sẽ cắt l tại điểm vô cùng của l, ký hiệu là ∞_l. Ta có $\infty_{l'} = \infty_l$, do đó điểm vô cùng được xác định bởi phương của đường thẳng. Tất cả các điểm vô cùng nằm trên đường thẳng vô cùng.

Khi đó hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng xạ ảnh cắt nhau tại một điểm duy nhất. Ngược lại, tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt trong mặt phẳng xạ ảnh. Ví dụ, cho đường thẳng l và điểm S nằm ngoài l, đường thẳng đi qua S và ∞_l là đường thẳng qua S song song với l.

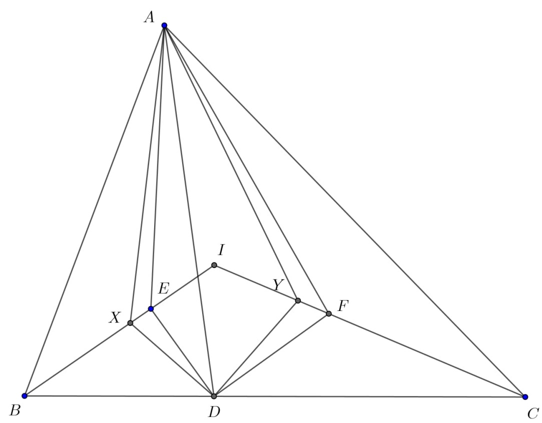
Từ đó ta có thể tính tỷ số kép của hàng điểm có điểm vô cùng. Giả sử ta muốn tính (A, B, C, D), trong đó $A, B, C \in l$ và $D = \infty_l$. Bằng các tính toán qua tỷ số kép của chùm (SA, SB, SC, SD) ta được

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} = (AB, C).$$

Một ý tưởng khác là khi $D = \infty_l$, hai khoảng cách vô cùng lớn BD và CD sẽ triệt tiêu nhau, do đó ta bỏ các khoảng cách có chứa D khỏi biểu thức.

B Ví dụ

Ví dụ 2.1 (Sebia MO 2018). Cho tam giác không cân ABC, (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. D là tiếp điểm của (I) và BC. E, F theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng BI, CI sao cho $2\angle EAF = \angle BAC$. Chứng minh rằng $\angle EDF = 90^\circ$.



Bước 1. Cho E chuyển động trên BI. Xét ánh xạ
$f \colon BI \to CI$
$E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F.$
Ta có f là ánh xạ xạ ảnh do $AE \mapsto AF$ là phép quay tâm A góc $\dfrac{\angle BAC}{2}$ không đổi.
Lấy F' là điểm thuộc CI sao cho $\angle EDF' = 90^\circ$.
Xét ánh xạ
$g \colon BI \to CI$
$E \mapsto DE \mapsto DF' \mapsto F'.$

Ta cũng có g là ánh xạ xạ ảnh do $DE \mapsto DF'$ là phép quay tâm D góc 90°.

Bước 2. Ta sẽ xét 3 vị trí của điểm E mà ảnh của E qua f và g trùng nhau.

- $E \equiv I$. Khi đó f và g đều biến E thành C;
- $E \equiv B$. Khi đó f và g đều biến E thành I;
- $E \equiv X$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADB. Khi đó gọi Y là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADC thì ta có $\angle XAY = \dfrac{\angle BAC}{2}$ và $\angle XDY = 90^\circ$. Vì thế f và g đều biến E thành Y.

Ta có thể trình bày lời giải bằng cách biến đổi tỷ số kép như sau.

Lời giải: Gọi X và Y là tâm nội tiếp tam giác ABD và ACD. Lấy F' là điểm thuộc CI sao cho $\angle EDF' = 90^\circ$.
Khi đó $\angle XDY = \angle XDI + \angle IDY = \dfrac{\angle BDI + \angle IDC}{2} = 90^\circ$
và $\angle XAY = \angle XAI + \angle IAY = \dfrac{\angle BAI + \angle IAC}{2} = \dfrac{\angle BAC}{2}$.
Ta có:

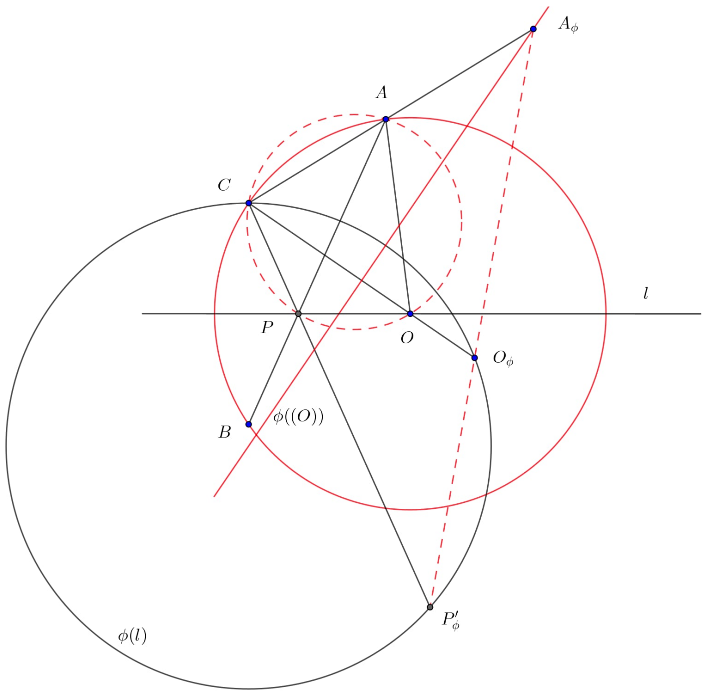
$$\begin{aligned}(BE, XI) &= A(BE, XI)\\ &= A(IF, YC) \qquad \text{(phép quay tâm } A \text{ góc } \frac{\angle BAC}{2})\\ &= (IF, YC).\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(BE, XI) &= D(BE, XI)\\ &= D(IF', YC) \qquad \text{(phép quay tâm } D \text{ góc } 90^\circ)\\ &= (IF', YC).\end{aligned}$$

Do đó $(IF, YC) = (IF', YC)$, suy ra $F' \equiv F$.
Vậy $\angle EDF = \angle EDF' = 90^\circ$. ■

Ví dụ 2.2. Cho AB là một dây cung của đường tròn tâm O. Đường thẳng l đi qua O và cắt cung AB tại điểm P. C là điểm đối xứng của B qua đường thẳng l. Chứng minh rằng các điểm A, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.



Bước 1. Cố định điểm A và đường thẳng l, cho điểm B chuyển động trên (O). Cho đường tròn ngoại tiếp tam giác AOC cắt lại đường thẳng l tại P', gọi tâm của đường tròn là I. Lấy M là hình chiếu vuông góc của I trên l. Ta có I thuộc trung trực AO cố định và M là trung điểm OP'. Xét ánh xạ
$f\colon (O) \to l$
$B \mapsto C \mapsto AC \mapsto OI \mapsto I \mapsto M \mapsto P'$.
Trong đó $B \mapsto C$ là phép đối xứng qua l; chùm AC và OI tương ứng vuông góc nên $AC \mapsto OI$ bảo toàn tỷ số kép; $I \mapsto M$ là phép chiếu song song theo phương OI (phương không đổi) từ trung trực AO tới l biến I thành M cũng là ánh xạ xạ ảnh; $M \mapsto P'$ là phép vị tự tâm O, tỷ số 2. Vậy f là ánh xạ xạ ảnh.
Mặt khác, xét ánh xạ
$g\colon (O) \to l$
$B \mapsto AB \mapsto P$.
Ta cũng có g là ánh xạ xạ ảnh.

Bước 2. Ta sẽ xét 3 vị trí của điểm B mà ảnh của B qua f và g trùng nhau. Cho l cắt (O) tại hai điểm U và V.

- $B \equiv U$. Khi đó các điểm P, C, B, P' trùng nhau tại U;
- $B \equiv V$. Khi đó các điểm P, C, B, P' trùng nhau tại V;
- $B \equiv B_0$ là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó $P \equiv O$. Mặt khác $C \equiv C_0$ là điểm đối xứng của B_0 qua l và đường tròn ngoại tiếp tam giác AOC_0 tiếp xúc l tại O, dẫn đến $P' \equiv O$. Vậy f và g đều biến B thành O.

Để trình bày lời giải bằng biến đổi tỷ số kép, ta phải gọi thêm các điểm I và M trong các trường hợp đặc biệt trên.

Lời giải: Gọi B_0 là điểm đối xứng của A qua O; C_0 là điểm đối xứng của B_0 qua l; I, I_0, I_1 và I_2 tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOC, AOC_0, AOU và AOV; M, M_1 và

M_2 tương ứng là hình chiếu vuông góc của I, I_1 và I_2 trên l.
Ta có I, I_0, I_1, I_2 cùng thuộc trung trực AO và M, M_1, M_2 tương ứng là trung điểm OP', OU, OV.
Hơn nữa, $AC_0 \| l$ (cùng vuông góc B_0C_0), suy ra $\angle C_0OV = \angle OC_0A = \angle OAC_0$. Dẫn đến (AOC_0) tiếp xúc l tại O, vì thế OI_0 vuông góc với l tại O.
Ta có:

$$\begin{aligned}
(BV, UB_0) &= (CV, UC_0) \qquad \text{(phép đối xứng qua đường thẳng } l\text{)}\\
&= A(CV, UC_0)\\
&= O(II_2, I_1I_0) \qquad (AC \perp OI, AV \perp AI_2, AU \perp OI_1, AC_0 \perp AI_0)\\
&= (II_2, I_1I_0)\\
&= (MM_2, M_1O) \qquad \text{(phép chiếu song song theo phương } OI \text{ từ trung trực } AO \text{ tới } l\text{)}\\
&= (P'V, UO) \qquad \text{(phép vị tự tâm } O\text{, tỷ số 2).}
\end{aligned}$$

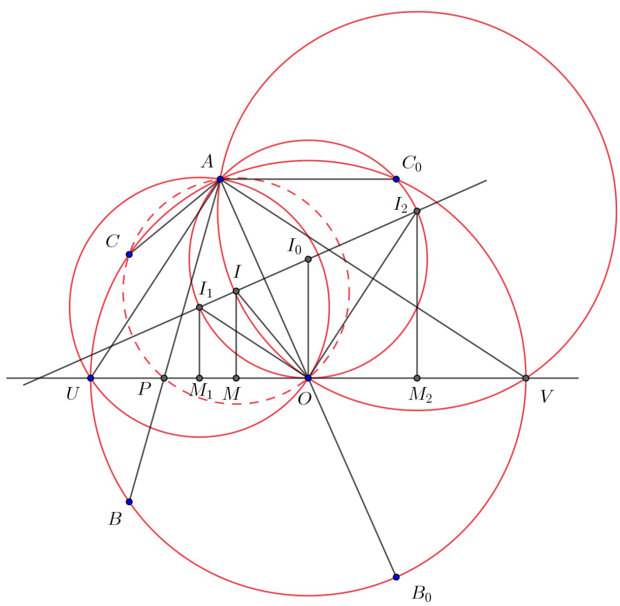
Cho đường tròn ngoại tiếp tam giác AOC cắt lại đường thẳng l tại P', ta có:

$$(BV, UB_0) = A(BV, UB_0) = (PV, UO).$$

Do đó $(P'V, UO) = (PV, UO)$, suy ra $P' \equiv P$.
Vậy A, O, C, P cùng thuộc một đường tròn. ■

Nhận xét:
Để ý rằng $\angle IAP' = 90^\circ - \angle AOU$ không đổi và $\dfrac{AI}{AP'}$ cũng không đổi. Ta có thể xét phép vị tự quay tâm A biến I thành P', đây cũng là một ánh xạ xạ ảnh.

Ngoài ra ta còn một cách khác để giải quyết khác cho bài toán là sử dụng phép nghịch đảo. Cụ thể, cố định điểm B và cho điểm A chuyển động trên (O). Khi đó điểm C cố định. Lấy $P' \in l$ sao cho A, C, P', O cùng thuộc một đường tròn. Xét ϕ là một phép nghịch đảo tâm C, phương tích tuỳ ý. Khi đó qua phép nghịch đảo ϕ, điểm O biến thành điểm O_ϕ cố định, điểm P' biến thành điểm P'_ϕ thuộc đường tròn $\phi(l)$ cố định và điểm A biến thành điểm A_ϕ thuộc đường thẳng $\phi((O))$ cố định. Hơn nữa, do A, C, P', O cùng thuộc một đường tròn nên A_ϕ, O_ϕ, P'_ϕ thẳng hàng.

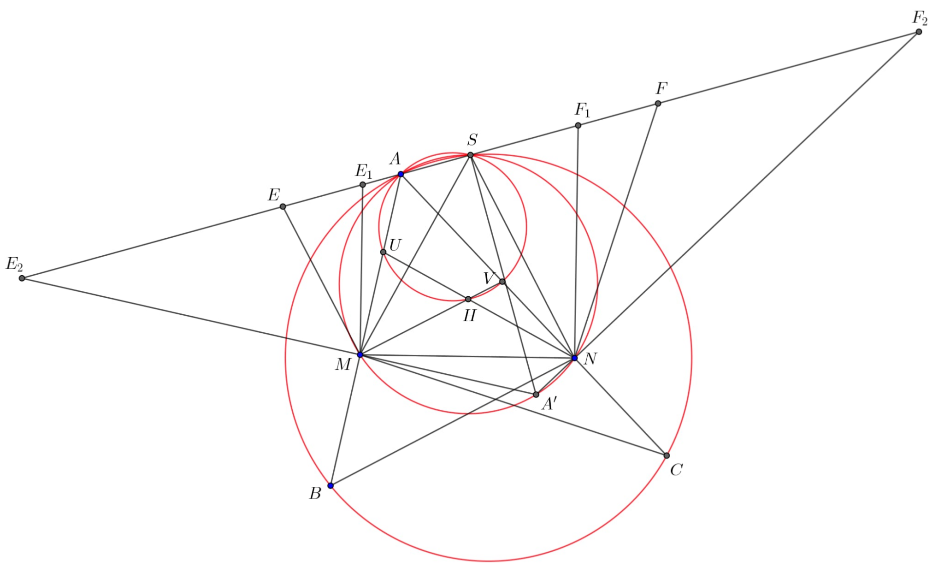


Xét ánh xạ
$f\colon (O) \to l$
$A \mapsto A_\phi \mapsto O_\phi A_\phi \mapsto P'_\phi \mapsto P.$
Ta có $A \mapsto A_\phi$ và $P'_\phi \mapsto P'$ là phép nghịch đảo ϕ nên bảo toàn tỷ số kép. Do đó f là ánh xạ xạ ảnh.
Mặt khác, xét ánh xạ
$g\colon (O) \to l$
$A \mapsto BA \mapsto P.$
Ta cũng có g là ánh xạ xạ ảnh.

Việc xét 3 trường hợp đặt biệt làm tương tự lời giải trên.

> ***Nhận xét:***
> Để ý rằng, giả sử AC cắt l tại Q, ta có $\overline{OP'} \cdot \overline{OQ} = OC^2$, nghĩa là Q và P' là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo tâm O, phương tích OC^2. Xét ánh xạ
> $t\colon (O) \to l$
> $A \mapsto CA \mapsto Q \mapsto P'.$
> Ta cũng có t là ánh xạ xạ ảnh.

Ví dụ 2.3. Cho tam giác ABC không cân tại A. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $BM = CN$. S là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và ABC. Chứng minh rằng đường thẳng qua M vuông góc với BN cắt AS tại E. Đường thẳng qua N vuông góc với CM cắt AS tại F. Chứng minh rằng $SE = SF$.



Ta cố định tam giác AMN và cho B, C tương ứng chuyển động trên AM và AN sao cho B, C cùng phía bờ MN và $BM = CN$. Theo tính chất quen thuộc, có S là điểm chính giữa cung MAN, suy ra AS là đường phân giác của $\angle MAN$ cố định. Hơn nữa, $\triangle SMB \sim \triangle SNC$.

Bước 1. Gọi F' là điểm đối xứng của E qua S. Xét ánh xạ
$f\colon AM \to AS$
$B \mapsto C \mapsto MC \mapsto NF \mapsto F.$

Trong đó $B \mapsto C$ là phép vị tự quay tâm S biến B thành C; chùm MC và NF tương ứng vuông góc nên $MC \mapsto NF$ bảo toàn tỷ số kép. Vậy f là ánh xạ xạ ảnh.
Mặt khác, xét ánh xạ
$g : AM \to AS$
$B \mapsto NB \mapsto ME \mapsto E \mapsto F'$.
Ta cũng có g là ánh xạ xạ ảnh.

Bước 2. Ta sẽ xét 3 vị trí của điểm B mà ảnh của B qua f và g trùng nhau. Lấy $U \in AM$ và $V \in AN$ thỏa mãn $NU \perp MS$ và $MV \perp NS$.

- $B \equiv M$. Khi đó $C \equiv N$ và E, F là các điểm trên AS sao cho ME, MF cùng vuông góc BC. Dẫn đến $F' \equiv F$;
- $B \equiv \infty_{AM}$. Khi đó $C \equiv \infty_{AN}$ và NB thành đường thẳng qua N song song AM, MC thành đường thẳng qua M song song AN. Vì thế E, F là các điểm thuộc AS sao cho $ME \perp AM$ và $NF \perp AN$. Dễ dàng chứng minh $F' \equiv F$;
- $B \equiv U$. Ta chứng minh rằng $C \equiv V$. Khi đó $E \equiv F \equiv S$. Vì thế f và g đều biến B thành S.

Tuy có sử dụng điểm vô cùng trong lúc xét trường hợp đặc biệt nhưng khi trình bày ta vẫn có thể "né" điểm vô cùng bằng cách biến đổi thông qua tỷ số đơn.

Lời giải: Do $BM = CN$ nên S là điểm chính giữa cung MAN (tính chất quen thuộc), suy ra AS là đường phân giác của $\angle MAN$ cố định.

Đường thẳng qua M vuông góc MN và đường thẳng qua N vuông góc MN tương ứng cắt AS tại E_1 và F_1.
Do S thuộc trung trực của MN nên $SE_1 = SF_1$.

Đường thẳng qua M vuông góc AM và đường thẳng qua N vuông góc AB tương ứng cắt AC tại E_2 và F_2.
Suy ra ME_2 cắt NF_2 tại A' thỏa AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.
Có $A'S$ vừa là đường cao, vừa là phân giác trong tam giác $A'E_2F_2$.
Dẫn đến S là trung điểm E_2F_2.

Lấy $U \in AB$ và $V \in AC$ thỏa $NU \perp MS$ và $MV \perp NS$.
Khi đó MV cắt NU tại H là trực tâm của tam giác SMN.
Có $\angle MUN = 90^\circ - \angle AMS = \angle ASH$.
Suy ra $AUHS$ nội tiếp. Tương tự $ASVH$ nội tiếp.
Lại có $\angle UHV = 180^\circ - \angle MSN = 180^\circ - \angle MAN$, suy ra $AUHV$ nội tiếp.
Vậy A, S, V, U, H đồng viên
Suy ra $MU = NV$

Ta có:

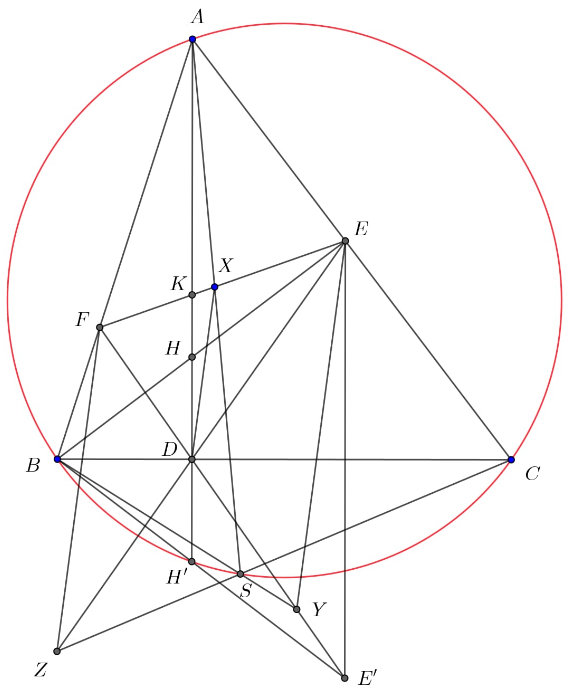
$$\begin{aligned}
(BU, M) = (CV, N) &\qquad (MB = NC, MU = NV) \\
&= (MC, MV, MN, Mx) \qquad (Mx \text{ là đường thẳng qua } M \text{ song song } AC) \\
&= (NF, NS, NF_1, NF_2) \qquad (MC \perp NF, MV \perp NS, MN \perp N_1, Mx \perp NF_2) \\
&= (FS, F_1F_2).
\end{aligned}$$

Gọi F' là điểm đối xứng của E qua S, ta có:

$$\begin{aligned}(BU, M) &= (NB, NU, NM, Ny) \qquad (Ny \text{ là đường thẳng qua } N \text{ song song } AB)\\ &= (ME, MS, ME_1, ME_2) \qquad (NB \perp ME, NU \perp MS, NM \perp ME_1, Ny \perp ME_2)\\ &= (ES, E_1E_2)\\ &= (F'S, F_1F_2) \qquad (\text{phép đối xứng tâm } S).\end{aligned}$$

Do đó $(FS, F_1F_2) = (F'S, F_1F_2)$, suy ra $F' \equiv F$.
Vậy $SE = SF$. ■

Ví dụ 2.4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ω, AD, BE, CF là các đường cao. X, Y, Z tương ứng thuộc EF, DF, DE sao cho DX, EY, FZ đôi một song song. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Cho AX cắt lại đường tròn ω tại S. Ta sẽ chứng minh B, S, Y thẳng hàng bằng phương pháp Moving Points. Bằng cách tương tự ta cũng sẽ có C, S, Z thẳng hàng. Cho điểm X chuyển động trên EF. Cho BY cắt lại đường tròn ω tại S'.

Bước 1. Xét ánh xạ
$f\colon EF \to \omega$
$X \mapsto AX \mapsto S.$
Ta có f là ánh xạ xạ ảnh.
Xét ánh xạ
$g\colon EF \to \omega$
$X \mapsto DX \mapsto EY \mapsto Y \mapsto BY \mapsto S'.$
Do chùm DX và EY tương ứng song song nên tỷ số kép của hai chùm bằng nhau, vì thế g cũng là ánh xạ xạ ảnh.

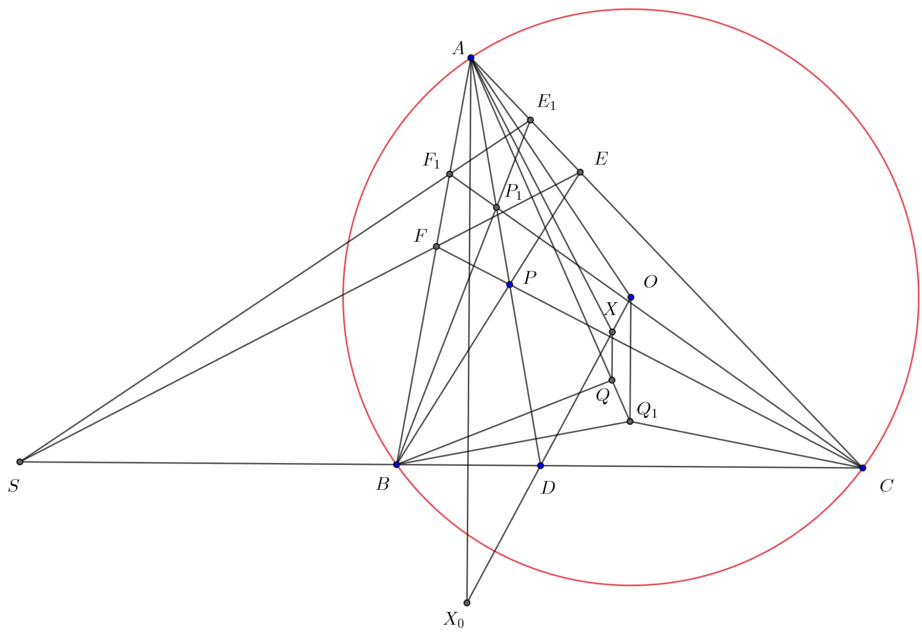
Bước 2. Ta sẽ xét 3 vị trí của điểm X mà ảnh của X qua f và g trùng nhau.

- $X \equiv E$. Khi đó $Y \equiv D$, dẫn đến $S \equiv S' \equiv C$.
- $X \equiv F$. Khi đó $Y \equiv \infty_{DF}$, dẫn đến $S \equiv S' \equiv B$.
- $X \equiv K$ là giao điểm của AD và EF. Biến đổi góc thì ta được $Y \equiv E'$ là điểm đối xứng của E qua BC. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và H' là điểm đối xứng của H qua BC. Ta có B, Y, H' thẳng hàng. Do đó, $S \equiv S' \equiv H'$.

Bằng những phân tích trên, bạn đọc hoàn toàn có thể trình bày lời giải bằng biến đổi tỷ số kép như đã thực hiện ở Ví dụ 1.1, 1.2, 1.3.

Lời giải: Dành cho bạn đọc. ■

Ví dụ 2.5. Cho tam giác ABC và hai điểm P và Q liên hợp đẳng giác. D, E, F tương ứng là giao điểm của AP, BP, CP với BC, CA, AB. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. X là giao điểm đường thẳng qua A vuông góc EF và OD. Chứng minh rằng $QX \perp BC$.



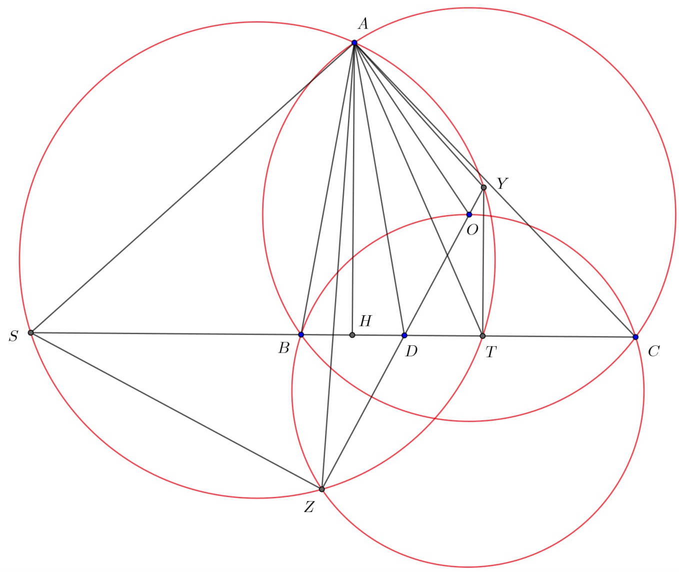
Cố định điểm D, cho P chuyển động trên AD. Khi đó, Q thuộc đường đẳng giác của AD trong góc $\angle BAC$ cố định. Cho EF cắt BC tại S, ta có $(SD, BC) = -1$, suy ra S cố định.

Bước 1. Xét ánh xạ
$f\colon AD \to OD$
$P \mapsto BP \mapsto E \mapsto SE \mapsto AX \mapsto X.$
Do chùm SE và chùm AX tương ứng vuông góc nên hai chùm có tỷ số kép bằng nhau, vì thế f là ánh xạ xạ ảnh.

Lấy X' thuộc OD sao cho $QX' \perp BC$. Xét ánh xạ
$g\colon AD \to OD$
$P \mapsto BP \mapsto BQ \mapsto Q \mapsto X'.$
Vì P và Q liên hợp đẳng giác nên $BP \mapsto BQ$ là phép đối xứng qua phân giác trong góc $\angle ABC$, do đó $BP \mapsto BQ$ bảo toàn tỷ số kép. Hơn nữa, $Q \mapsto X'$ là phép chiếu song song, phương vuông góc với BC là ánh xạ xạ ảnh. Vì thế g cũng là ánh xạ xạ ảnh.

Bước 2. Ta sẽ xét 3 vị trí của điểm P mà ảnh của P qua f và g trùng nhau.

- $P \equiv D$. Khi đó $Q \equiv A$ và $E \equiv C$, do đó $X \equiv X_0$ là giao điểm của OD và đường thẳng qua A vuông góc BC. Tất nhiên $QX_0 \perp BC$.
- $P \equiv P_1$, với P_1 là giao điểm của AD và BE_1, E_1 là giao điểm của AC và đường thẳng qua S vuông góc AO. Khi đó $X \equiv O$. Mặt khác, bằng biến đổi góc, ta được $Q \equiv Q_1$ thoả mãn tam giác BQ_1C cân tại Q_1. Do đó $QX \equiv Q_1O$ và vuông góc với BC.
- $P \equiv A$. Khi đó $Q \equiv T$ là điểm thuộc BC sao cho AT và AD đẳng giác trong góc $\angle BAC$. Mặt khác $E \equiv F \equiv A$, suy ra $X \equiv Y$ là điểm thuộc OD sao cho $AY \perp AS$. Ta chứng minh $TY \perp BC$.



Cho OD cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tại Z, H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có ZO là phân giác trong góc $\angle BZC$ và $Z(DS, BC) = (DS, BC) = 1$, suy ra $SZ \perp ZO$ tại Z. Do đó $ASZY$ nội tiếp đường tròn đường kính SY. Mặt khác, có $\overline{SD}.\overline{SZ} = OB^2 = OA^2$, dẫn đến $\triangle OAD \sim \triangle OZA$. Suy ra $\angle OZA = \angle OAD$. Do AH và AO cũng liên hợp đẳng giác trong góc $\angle BAC$, ta được $\angle HAT = \angle OAD$. Biến đổi góc

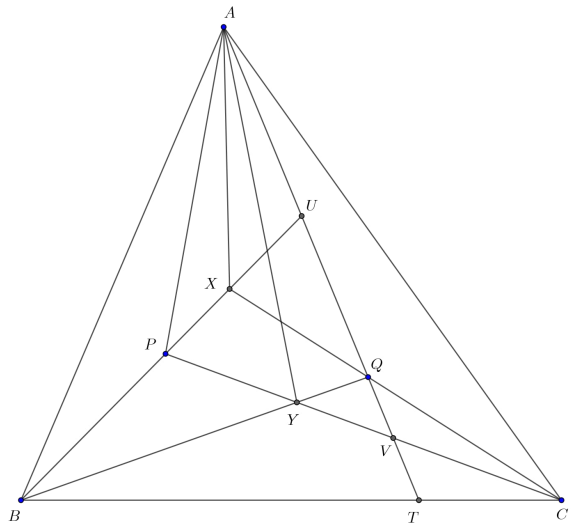
$$\angle ATS = 90^\circ - \angle HAT = 90^\circ - \angle OZA = \angle AZS.$$

Do đó $ATZS$ là tứ giác nội tiếp. Vậy $AYTS$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính SY. Suy ra $\angle ATS = 90^\circ$ hay $TY \perp BC$, điều phải chứng minh.

Lời giải: Dành cho bạn đọc. ■

Để kết thúc phần ví dụ, ta sẽ giải quyết một bài toán quen thuộc nhưng bằng phương pháp Moving Points.

Ví dụ 2.6. Cho tam giác ABC và hai điểm P, Q sao cho AP và AQ đẳng giác trong góc BAC. Giả sử BP cắt CQ tại X, BQ cắt CP tại Y. Chứng minh rằng AX và AY đẳng giác trong góc BAC.



Cố định điểm P. Gọi d là đường đẳng giác của AP trong góc $\angle BAC$, khi đó d cố định. Cho Q chuyển động trên d. Gọi X' là giao điểm của BP và đường đẳng giác của AY trong góc $\angle BAC$.

Bước 1. Xét ánh xạ
$f: d \to BP$
$Q \mapsto BQ \mapsto Y \mapsto AY \mapsto AX' \mapsto X'$. Ta có f là ánh xạ tuyến tính do $AY \mapsto AX'$ là phép đối xứng qua đường phân giác trong của góc $\angle BAC$.
Mặt khác, xét ánh xạ
$g: d \to BP$
$Q \mapsto CQ \mapsto X$.
Ta cũng có g là ánh xạ xạ ảnh.

Bước 2. Ta sẽ xét 3 vị trí của điểm Q mà ảnh của Q qua f và g trùng nhau. Giả sử d cắt BP, CP, BC tương ứng tại U, V, T.

- $Q \equiv U$. Khi đó $Y \equiv P$ và $X \equiv X' \equiv U$;
- $Q \equiv V$. Khi đó $Y \equiv V$ và $X \equiv X' \equiv P$;
- $Q \equiv T$. Khi đó $Y \equiv C$ và $X \equiv X' \equiv B$.

Lời giải: Dành cho bạn đọc. ■

C Bài tập tự luyện

Bài tập 2.1. Chứng minh các tính chất ở phần lý thuyết.

Bài tập 2.2 (IMO 2010). Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và giả sử Γ là đường tròn ngoại tiếp của nó. Giả sử đường thẳng AI lại cắt Γ tại D. Giả sử E là một điểm trên cung BDC và F là một điểm trên cạnh BC sao cho

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Giả sử G là trung điểm của đoạn IF. Chứng minh rằng các đường thẳng DG và EI cắt nhau tại một điểm trên Γ.

Bài tập 2.3. Cho tam giác ABC có P trên phân giác góc BAC. Hạ PX, PY, PZ vuông góc BC, CA, AB. Hạ XH vuông ZY. M là trung điểm cung BC chứa A. Chứng minh MP, AH, BC đồng quy.

Bài tập 2.4. Cho tam giác ABC và hai đường thẳng cắt nhau x và y cùng nằm trong một mặt phẳng. Điểm D di động trên cạnh BC. Đường thẳng qua D song song với x cắt CA tại E; đường thẳng qua D song song với y cắt AB tại F. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua điểm cố định.

Bài tập 2.5. Cho tam giác ABC và hai điểm E, F di chuyển trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 2.6 (Serbia TST 2019). Cho tam giác ABC ($AC \neq BC$) và D là điểm bên trong tam giác ABC sao cho

$$\angle ADB = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}.$$

Tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt AB tại P. Tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC cắt AD tại Q. Chứng minh rằng PQ là tia phân giác của $\angle BPC$.

Bài tập 2.7. Cho hình thang $ABCD$ ngoại tiếp (I). M, N, P, Q tương ứng là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA. S là một điểm tuỳ ý thuộc (I). MS cắt NQ tại K. Đường thẳng qua B song song với NS cắt QN tại F. Chứng minh rằng (AQF), (I), PK cùng đi qua một điểm.

Bài tập 2.8 (2015 USA TST P6). Cho tam giác ABC khác tam giác đều. Các điểm M_a, M_b, M_c là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi S là điểm thuộc đường thẳng Euler. Gọi X, Y, Z là giao của SM_a, SM_b, SM_c với đường tròn Euler. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Bài tập 2.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), AD, BE, CF là các đường cao. M, N thuộc (O) sao cho $\angle MAB = \angle NAC$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các đường tròn $(NEC), (MBF)$. Chứng minh rằng BI, CJ, OD đồng quy.

Bài tập 2.10. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Điểm I bất kì. BI, CI cắt AC, AB tại E, F. (AEF) cắt lại (O) tại K. AI cắt lại (O) tại S. Chứng minh rằng (KIS) trực giao đường tròn đường kính BC.

Bài tập 2.11 (Trải nghiệm VMO 2024 - Vòng 2).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Giả sử P là điểm nằm trong tam giác ABC và di chuyển trên một đường thẳng ℓ cố định đi qua A. Cho ℓ cắt lại (O) tại D. Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC.

a) DQ cắt BC tại G. Chứng minh rằng PG song song với AQ.
b) Lấy điểm K cố định sao cho $DK \perp BC$. Gọi R là hình chiếu vuông góc của Q lên BC. Chứng minh rằng đường thẳng qua R, vuông góc PK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 2.12 (Việt Nam TST 2023). Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC thì cắt nhau ở trực tâm H và M là trung điểm AH. Gọi K là hình chiếu của H lên EF. Đường thẳng không đi qua A và song song với BC cắt cung nhỏ AB, AC lần lượt tại các điểm P, Q. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E của đường tròn ngoại tiếp tam giác CQE và tiếp tuyến tại F của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF thì cắt nhau trên MK.

Tài liệu tham khả

[1] Nguyễn Văn Linh, *Một số chủ đề hình học phẳng dành cho học sinh chuyên toán*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2020.

[2] Vladyslav Zveryk, *The Method of Moving Points*, 2019.

[3] Wilhelm Carmevik, Neo Dahlfors, Alvin Palmgren, and Hjalmar Rusck, *The Method of Moving Points*, 2022.

§3. MỘT SỐ BÀI TOÁN TẬP HỢP SỐ

VÕ HOÀNG THÀNH - Giáo viên STAR EDUCATION

Trong nội dung bài viết này ta xét các tập hợp số và một số vấn đề liên quan. Cụ thể, cho trước một tập A, xét một tập con B thỏa mãn tính chất $\mathcal{P}$; từ đây ta có một số vấn đề liên quan đến "mô tả" tập B (như về lực lượng, về đặc điểm các phần tử hoặc thậm chí là xác định chính xác tập B). Các "quan hệ" là các phép toán số học cơ bản (giữa các phần tử trong tập hợp) hoặc có thể là phép toán tập hợp (giữa các tập hợp con), khai thác các "quan hệ" này sẽ giúp ta có các thông tin về tập B.

A Một số ví dụ

Ví dụ 3.1 (APMO 2004). Xác định tất cả các tập hữu hạn S khác rỗng gồm những số nguyên dương sao cho $\dfrac{i+j}{(i;j)} \in S$ với mọi $i, j \in S$.

Lời giải: Giả sử tồn tại tập S thỏa đề. Với $x \in S$ bất kì, ta có $2 = \dfrac{x+x}{(x;x)} \in S$.

Giả sử S chứa một số lẻ, gọi a là số lẻ lớn nhất thuộc S. Khi đó:

$$\frac{a+2}{(a;2)} = \frac{a+2}{1} = a+2$$

là số lẻ thuộc S, mâu thuẫn do a lẻ lớn nhất. Nếu $S \setminus \{2\} \neq \varnothing$, đặt $b = \min(S \setminus \{2\})$, khi này b chẵn và

$$\frac{b+2}{(b;2)} = \frac{b+2}{2}$$

thuộc S. Tuy nhiên, $\dfrac{b+2}{2} < b$, điều này là vô lý.

Vậy tập duy nhất thỏa đề là $S = \{2\}$. ■

> ***Nhận xét:***
> Ví dụ này cho thấy nếu ta biết được các phần tử trong tập có mối liên hệ gì đó thì có thể xác định cụ thể tập S. Cũng chú ý rằng nhờ điều kiện hữu hạn mà số lẻ lớn nhất a mới tồn tại (tương tự là số b). Nguyên lý cực hạn cũng là một ý tưởng tốt khi làm việc với các tập hữu hạn.

Ví dụ 3.2. Tìm tất cả các tập hữu hạn A, B khác rỗng có các phần tử là số nguyên thỏa mãn:

(i) Nếu $x \in A$ thì $x+1 \in B$;

(ii) Nếu $x \in B$ thì $x^2 - 4 \in A$.

Lời giải: Lấy $x \in B$ bất kỳ thì $x^2 - 4 \in A$, kéo theo $x^2 - 3 \in B$. Xây dựng dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = x$ và $u_{n+1} = u_n^2 - 3$ với mọi n nguyên dương. Khi đó $(u_n) \subset B$ nên là dãy bị chặn. Rõ ràng nếu $|x| \geq 3$ thì (u_n) là dãy các số nguyên tăng ngặt nên không bị chặn. Do đó $|x| \leq 2$. Từ đây dẫn đến nếu $x \in A$ thì $-3 \leq x \leq 1$. Áp dụng liên tiếp hai điều kiện (i) và (ii), ta có $0 \notin B$ và $-1 \notin A$.

Nếu $-3 \notin A$ thì $\pm 1 \notin B$. Mà do $x \neq x^2 - 3$ với mọi x nguyên nên $|B| \geq 2$, vậy nên $B = \{\pm 2\}$. Thử lại thấy không thỏa. Vậy $-3 \in A$, dẫn đến

$$-2 \in B \Rightarrow 0 \in A \Rightarrow 1 \in B.$$

Từ đây ta tìm được các cặp tập hợp $(A; B)$ thỏa mãn là:

$$\{-3;0\} \text{ và } \{-2;1\}, \quad \{-3;-2;0\} \text{ và } \{-2;\pm1\}, \quad \{-3;-2;0;1\} \text{ và } \{\pm1;\pm2\}.$$

■

> ***Nhận xét:***
> Bằng cách áp dụng các điều kiện liên tiếp, ta xây dựng được một dãy số. Từ điều kiện các tập A, B hữu hạn mà ta khẳng định được dãy phải bị chặn. Vì vậy có thể đưa bài toán về vấn đề tìm tham số u_1 để dãy bị chặn.

Ví dụ 3.3 (Olympic 30/4 lớp 10, 2003).

Tìm tất cả tập hợp hữu hạn M gồm n số thực, với $n \geq 2$ và thỏa mãn điều kiện: với mọi $a, b \in M$, $a \neq b$ thì $\dfrac{2a}{3} - b^2 \in M$.

Lời giải: Giả sử tồn tại tập M thỏa mãn đề bài. Nhận thấy rằng $0 \notin M$ vì nếu không thì M chứa vô hạn phần tử $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n a$ với $a \in M, a \neq 0$. Đặt $m = \min M$, khi đó với $a \in M, a \neq m$, ta có $\dfrac{2}{3}m - a^2 \in M$ nên

$$\frac{2}{3}m - a^2 \geq m \Rightarrow m \leq -3a^2 < 0.$$

Xét trường hợp $n \geq 3$. Giả sử tất cả phần tử âm của M là $a_1 < a_2 < ... < a_k$. Khi đó tất cả phần tử $\dfrac{2a_i}{3} - a_j^2$ đều âm và thuộc M với mọi $i \neq j$. Chú ý rằng

$$\frac{2a_1}{3} - a_i^2 < \frac{2a_1}{3} - a_j^2, \quad \text{với mọi } i < j \qquad \text{và} \qquad \frac{2a_x}{3} - a_k^2 < \frac{2a_y}{3} - a_k^2, \quad \text{với mọi } x < y.$$

Do đó M có ít nhất $2k - 3$ phần tử âm, suy ra $k \geq 2k - 3$, hay $k \leq 3$.

- Với $k = 3$, ta có: $\dfrac{2a_1}{3} - a_2^2 < \dfrac{2a_1}{3} - a_3^2 < \dfrac{2a_2}{3} - a_3^2$, nên là
$$\begin{cases} \dfrac{2a_1}{3} - a_2^2 = a_1 \\ \dfrac{2a_1}{3} - a_3^2 = a_2 \\ \dfrac{2a_2}{3} - a_3^2 = a_3 \end{cases}.$$
  Hệ này vô nghiệm.
- Với $k = 2$, xét các trường hợp $\dfrac{2a_1}{3} - a_2^2, \dfrac{2a_2}{3} - a_1^2 \in \{a_1; a_2\}$ ta cũng khẳng định không có trường hợp nào thỏa.

Vậy M chứa đúng một số âm là m. Giả sử M chứa hai số dương a, b; khi đó $\dfrac{2}{3}m - a^2$ và $\dfrac{2}{3}m - b^2$ là hai số âm thuộc M, vô lý. Vậy M chứa đúng một số dương. Vậy thì $M = \{m; t\}$, $m < 0 < t$. Lúc này $\dfrac{2}{3}m - t^2, \dfrac{2}{3}t - m^2 \in M$. Ta có các trường hợp:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}m - t^2 = t \\ \dfrac{2}{3}t - m^2 = t \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{2}{3}m - t^2 = a \\ \dfrac{2}{3}t - m^2 = m \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{2}{3}m - t^2 = t \\ \dfrac{2}{3}t - m^2 = a \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{2}{3}m - t^2 = m \\ \dfrac{2}{3}t - m^2 = m \end{cases}.$$

Giải các trường hợp trên, ta được tập thỏa đề là $M = \left\{-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. ∎

Ví dụ 3.4 (Romania 1996). Cho các số thực x, y. Chứng minh rằng nếu tập hợp $\{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) : n \in \mathbb{N}\}$ hữu hạn thì x, y là các số hữu tỉ.

Lời giải: Đặt $a_n = \cos(n\pi x), b_n = \cos(n\pi y)$, với mọi số nguyên dương n. Khi đó:

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2(a_n^2 + b_n^2) = 2 + a_{2n} + b_{2n}.$$

Nếu $\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$ là tập hữu hạn thì từ đẳng thức trên, suy ra $\{a_n - b_n : n \in \mathbb{N}\}$ cũng là tập hữu hạn. Chú ý $a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}(a_n - b_n)$ nên a_n chỉ nhận hữu hạn giá trị. Khi đó tồn tại hai số nguyên dương $m \neq p$ để

$$a_m = a_p \Leftrightarrow \cos(mx\pi) = \cos(px\pi) \Leftrightarrow mx\pi = px\pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k}{m-p} \in \mathbb{Q}.$$

Tương tự ta cũng có y là số hữu tỉ. Hoàn tất chứng minh. ∎

> ***Nhận xét:***
> Trong lời giải trên có sử dụng kết quả: nếu hai tập A, B hữu hạn thì tập tích Descartes $A \times B$ cũng hữu hạn.

Bây giờ ta xét một số ví dụ có các tập vô hạn.

Ví dụ 3.5 (Chọn đội dự tuyển lớp 10 PTNK 2009-2010).
Cho A là tập con của tập hợp các số hữu tỉ dương $\mathbb{Q}^+$, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

(i) 1 thuộc A.
(ii) x thuộc A thì $x + 1$ thuộc A.
(iii) x thuộc A thì $\frac{1}{x}$ thuộc A.

Chứng minh rằng $A = \mathbb{Q}^+$.

Lời giải: Từ các điều kiện trong giả thiết, dễ thấy A chứa các số có dạng k, $\frac{1}{k}$ và hễ x thuộc A thì $x + k$ thuộc A, với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác, vì hễ x thuộc A thì $\frac{1}{x}$ cũng thuộc A nên để hoàn tất chứng minh, ta chỉ cần chỉ ra rằng với p bất kì thuộc $\mathbb{N}^*$, A chứa tất cả các số có dạng $\frac{q}{p}$, mà $q \in \mathbb{N}^*$ và $1 < q < p$.

Thật vậy, xét dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{q}{p}$ và với mọi $n \geq 1$,

$$x_{n+1} = \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}, & \text{nếu } x_n \neq 0; \\ 0, & \text{nếu } x_n = 0. \end{cases}$$

Ta thấy (x_n) là dãy số hữu tỉ dương, và nếu tồn tại t là số nhỏ nhất sao cho $x_t = 0$ thì $x_n = 0$, với mọi $n \geq t$, đồng thời $\left\{\frac{1}{x_{t-1}}\right\} = x_t = 0$, nên $\frac{1}{x_{t-1}} \in \mathbb{N}^* \subset A$, suy ra $x_{t-1} \in A$, từ đó $x_{t-2} = k + x_{t-1} \in A$, $k \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Tiếp tục thực hiện tương tự, ta thu được $x_1 = \frac{q}{p} \in A$.

Ngược lại, nếu không tồn tại số t có tính chất vừa xét thì $x_n \in (0;1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, với q_n là mẫu số của x_n khi viết ở dạng phân số tối giản thì (q_n) là dãy nguyên dương, vô hạn và giảm ngặt, đây là điều vô lí.

Từ các lập luận trên, ta suy ra $A = \mathbb{Q}^+$. ■

Ví dụ 3.6. Đặt $M = \{a - b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$. Chứng minh rằng tập hợp $M \cap (-\delta; 0)$ có vô hạn phần tử với mọi $\delta > 0$ cho trước.

Lời giải: Xét phương trình nghiệm nguyên dương $x^2 - 3y^2 = 1$. Theo công thức nghiệm của phương trình Pell, tất cả nghiệm $(x; y)$ của phương trình là $(x_n; y_n)_{n \geq 1}$ trong đó:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n \\ y_0 = 0, y_1 = 1, y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xét $a_n = -x_n, b_n = y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $a_n + b_n\sqrt{3} \in M$. Ta sẽ chứng minh với mọi $\delta > 0$ cho trước luôn tồn tại số N để $(a_n + b_n\sqrt{3})_{n \geq N} \subset (-\delta; 0)$.
Đặt $u = 2 + \sqrt{3}, v = 2 - \sqrt{3}$. Từ công thức truy hồi của $(x_n), (y_n)$, ta có:

$$a_n = -\frac{u^n + v^n}{2}, \qquad b_n = \frac{u^n - v^n}{2\sqrt{3}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó $a_n + b_n\sqrt{3} = -v^n < 0$ và

$$a_n - b_n\sqrt{3} = -u^n \to -\infty \quad \text{khi } n \to +\infty.$$

Do đó tồn tại số N để với mọi $n \geq N$, ta có $a_n - b_n\sqrt{3} < -\frac{1}{\delta}$, suy ra

$$a_n + b_n\sqrt{3} = \frac{1}{a_n - b_n\sqrt{3}} > -\delta.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 3.7. Tồn tại hay không tập $A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ có ít nhất hai phần tử thỏa:

(i) $\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in A : \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$?

Lời giải: Tập A như vậy tồn tại. Ta sẽ xây dựng một tập A thỏa mãn đề bài.
Với mỗi số thực $x \neq 0$, đặt

$$R_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^* : \frac{y}{x} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Kiểm tra được mọi $x, y \in \mathbb{R}^*$ thì hoặc $R_x \cap R_y = \varnothing$, hoặc $R_x = R_y$. Ở mỗi tập R_x ta lấy đúng một phần tử, ký hiệu A là tập hợp tất cả các phần tử đó. Tập A này thỏa mãn (i) và (ii).
Thật vậy, với mọi $x, y \in A, x \neq y$ thì $R_x \neq R_y$, dẫn đến $R_x \cap R_y = \varnothing$, tức là $\frac{x}{y} \notin \mathbb{Q}$. Tiếp theo, với mọi $x \in \mathbb{R}$, nếu $x = 0$ thì chọn $y \in A$ tùy ý, nếu $x \neq 0$ thì chọn $y \in (A \cap R_x)$, cả hai trường hợp đều có $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Bài toán được hoàn tất. ■

Tiếp theo là một số bài toán đếm có liên quan đến tập hợp.

Ví dụ 3.8. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $X = \{1;2;...;n\}$. Với mỗi song ánh $f : X \to X$, ta gọi $D(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(i) - i|$ là độ dịch chuyển của f. Với $n \geq 3$ cho trước, tìm số các song ánh $f : X \to X$ có độ dịch chuyển bằng 4.

Lời giải: Xét song ánh $f : X \to X$ thỏa mãn $D(f) = 4$. Rõ ràng có tối đa bốn số x sao cho $f(x) \neq x$.

- Xét trường hợp có $i < j$ thỏa mãn $(f(i) - i)(f(j) - j) \neq 0$. Khi đó phải có $f(i) = j, f(j) = i$. Vì vậy,
$$4 = D(f) = |f(i) - i| + |f(j) - j| = 2(j - i) \Rightarrow j - i = 2.$$
Do đó mỗi cặp số cách nhau 2 đơn vị sẽ cho tương ứng một song ánh f thỏa $D(f) = 4$. Có tất cả $n - 2$ cặp số như vậy nên số song ánh là $n - 2$.
- Xét trường hợp có $i < j < k$ sao cho $(f(i) - i)(f(j) - j)(f(k) - k) \neq 0$. Nếu $f(i) = t \neq j,k$ thì $f(t) \neq t$, vậy có ít nhất 4 giá trị x để $f(x) - x \neq 0$, vô lý. Lập luận tương tự, ta có $(f(i);f(j);f(k))$ phải là một hoán vị của $(i;j;k)$. Nếu $f(i) = j$ thì $f(j) = k$, kéo theo $f(k) = i$. Do đó:
$$4 = D(f) = |f(i) - i| + |f(j) - j| + |f(k) - k| = j - i + k - j + k - i = 2(k - i).$$
Do đó $k - i = 2$, vì vậy $(i;j;k) = (i;i+1;i+2)$, dẫn đến $(f(i);f(i+1);f(i+2)) = (i+1;i+2;i)$. Tương tự, nếu $f(i) = k$ thì $(f(i);f(j);f(k)) = (f(i);f(i+1);f(i+2)) = (i+2;i;i+1)$. Vậy trong trường hợp này, cứ mỗi bộ ba số liên tiếp trong $(1;2;...;n)$ sẽ cho được đúng hai song ánh f thỏa mãn $D(f) = 4$. Có tất cả $n - 2$ bộ ba số liên tiếp nên số song ánh là $2(n - 2)$.
- Xét trường hợp có bốn số $i < j < k < l$ sao cho $f(x) \neq x$, $x \in \{i;j;k;l\}$. Ta có:
$$D(f) = |f(i) - i)| + |f(j) - j| + |f(k) - k| + |f(l) - l| \geq 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(i;j;k;l) = (i;i+1;k;k+1)$ và $f(i) = i+1, f(j) = i, f(k) = k+1, f(k+1) = k$. Vậy số song ánh sẽ bằng với số bộ bốn số gồm hai cặp hai số liên tiếp. Có tất cả $\dfrac{(n-3)(n-2)}{2}$ bộ bốn số như vậy.

Vậy số song ánh thỏa mãn đề bài là:
$$(n-2) + 2(n-2) + \frac{(n-3)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

■

> ***Nhận xét:***
> Bài toán quy về việc đếm các tập hợp gồm hai, ba, bốn phần tử của X với một số điều kiện ràng buộc. Bài toán cũng chỉ cần dùng tính chất thứ tự của tập số nguyên.

Ví dụ 3.9 (Thành phố Hồ Chí Minh TST 2025-2026).

Tập hợp A gồm các số nguyên được gọi là *đẹp* nếu A có ít nhất một phần tử khác 0 và với $x, y \in A$ (có thể trùng nhau) thì $x - y \in A$. Hỏi có bao nhiêu dãy các tập hợp đẹp $(A_1, A_2, ..., A_9)$ thỏa mãn $2025 \in A_1$ và $A_k \subset A_{k+1}$ với mọi $k = 1, 2, ..., 8$?

Lời giải: Xét A là tập hợp đẹp và $a \in A \setminus \{0\}$. Khi đó $0 = a - a \in A$, $-a = 0 - a \in A$, $2a = a - (-a) \in A$. Bằng quy nạp, ta có $ka \in A$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó nếu chọn số nguyên dương $b \in A$ nhỏ nhất thì A là tập hợp tất cả các bội số của b. Thật vậy, với mọi $c \in A$, ta viết $c = bq + r$ với $q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < b$. Do $b \in A$ nên $bq \in A$, dẫn đến $r = c - bq \in A$, vậy nên $r = 0$ (vì nếu $r > 0$ thì từ $r < b$ sẽ vô lý với cách chọn b). Từ chứng minh trên, với mỗi tập A đẹp ta có một tương ứng $1 - 1$ với một số nguyên dương b, đặt $b = f(A)$. Hơn nữa, nếu A, B là các tập hợp đẹp và $A \subset B$ thì $f(A) \vdots f(B)$.

Đặt $f(A_i) = a_i$. Theo chứng minh trên, ta có: $2025 \vdots a_1 \vdots a_2 \vdots \ldots \vdots a_9$. Số dãy các tập hợp đẹp $(A_1, A_2, ..., A_9)$ thỏa mãn đề bài bằng với số dãy không tăng $(a_1, \ldots, a_9)$ sao cho a_i đều là ước dương của 2025.

Do $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ nên $a_i = 3^{x_i} \cdot 5^{y_i}$ với x_i, y_i là các số nguyên thỏa mãn $0 \leq x_i \leq 4$ và $0 \leq y_i \leq 2$. Mỗi dãy $(a_1, \ldots, a_9)$ thỏa mãn điều kiện trên ứng với duy nhất một dãy các cặp số $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_9, y_9)$ sao cho $x_i \geq x_j, y_i \geq y_j$ với mọi $i < j$. Gọi số số k trong dãy $(x_1, ..., x_9)$ là t_k, $k = 0; 1; 2; 3; 4$. Khi đó:

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 9.$$

Theo bài toán chia kẹo của Euler, số dãy $(x_1, ..., x_9)$ là C_{13}^4. Tương tự, số dãy $(y_1, ..., y_9)$ là C_{11}^2. Tóm lại, tổng số dãy tập hợp đẹp $(A_1, A_2, ..., A_9)$ thỏa mãn đề bài là $C_{13}^4 \cdot C_{11}^2$. ■

> ***Nhận xét:***
> Giống với một số ví dụ trước, biết được phép toán giữa các phần tử trong tập A_i ta có thể xác định được cụ thể tập A_i. Từ đặc điểm của các tập con này ta có thể đi đếm số tập con một cách dễ dàng.

Ví dụ 3.10. Với mọi số nguyên dương n, ký hiệu $\pi(n)$ là số các số nguyên tố không vượt quá n. Chứng minh rằng:

$$\pi(n) \geq \frac{1}{2}\log_2 n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải: Rõ ràng mọi số nguyên dương n đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng $k^2 l$ với k, l là số nguyên dương, l không có ước chính phương khác 1. Do đó nếu đặt

$$S(n) = \{(k; l) : k, l \in \mathbb{N}^*, l \text{ không có ước chính phương khác } 1, k^2 l \leq n\}$$

thì $|S(n)| = n$. Bây giờ ta đếm số cặp $(k; l)$ mà $k^2 l \leq n$.

Do l không có ước chính phương khác 1 nên $l = p_1^{a_1} ... p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}$, $a_i \in \{0; 1\}$ và p_i là các số nguyên tố không vượt quá n. Có $2^{\pi(n)}$ tích như vậy. Chú ý $k \leq \sqrt{n}$ nên số cặp $(k; l) \in S(n)$ không quá $\sqrt{n} \cdot 2^{\pi(n)}$. Do đó:

$$n = |S(n)| \leq \sqrt{n} \cdot 2^{\pi(n)} \Rightarrow \pi(n) \leq \log_2 \sqrt{n} = \frac{1}{2}\log_2 n.$$

■

> ***Nhận xét:***
> Đây là một chứng minh rất đẹp của Paul Erdos liên quan đến hàm đếm số nguyên tố. Dù hiện nay có nhiều kết quả chặt hơn nhưng chứng minh này vẫn là một ví dụ hay cho việc sử dụng phép đếm để chứng minh bất đẳng thức, trong đó không thể thiếu việc thiết lập các tập hợp phù hợp.

Ví dụ 3.11. (Chọn đội tuyển PTNK 2012) Cho trước số nguyên dương n. Xét tập hợp $X = \{1;2;...;4n\}$. Hai tập con A, B của X được gọi là *không giống nhau* nếu $|A \triangle B| \geq 2n+1$ (ở đây, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ là hiệu đối xứng của A và B).

Xét $M = \{A_1; A_2; ...; A_m\}$ gồm m tập con đôi một không giao nhau của X.

a) Chứng minh rằng $m \leq 2n$.

b) Chứng minh rằng $m \leq \dfrac{4(n+1)}{3}$.

Lời giải:

a) Giả sử $m \geq 2n+1$. Ta đếm số các bộ ba số nguyên dương $(x; i; j)$ với $i < j$ mà $x \in A_i \triangle A_j$.
Theo giả thiết, số bộ này ít nhất là: $(2n+1) \cdot \dfrac{(2n+1) \cdot 2n}{2} = n(2n+1)^2$.
Với mỗi $x \in X$, giả sử có k tập A_i chứa x và $2n+1-k$ tập không chứa x. Khi đó số cặp A_i, A_j mà $x \in A_i \triangle A_j$ sẽ không quá

$$k(2n+1-k) \leq n(n+1).$$

Như vậy số bộ này nhiều nhất là $4n \cdot n(n+1)$. Từ đó dẫn đến

$$n(2n+1)^2 \leq 4n^2(n+1) \Rightarrow 1 \leq 0.$$

Điều này là vô lý. Vậy điều giả sử là sai, hay $m \leq 2n$.

b) Đặt $X' = X \cup \{0\}$. Ta xây dựng các tập A_i' theo nguyên tắc: nếu $|A_i|$ chẵn thì $A_i' = A_i$, nếu $|A_i|$ lẻ thì $A_i' = A_i \cup \{0\}$. Khi đó $|A_i'|$ chẵn với mọi i. Từ đó, do

$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

nên $|A_i' \triangle A_j'|$ chẵn. Mà $|A_i' \triangle A_j'| \geq |A_i \triangle A_j| \geq 2n+1$. Từ đây từ tính chẵn suy ra $|A_i' \triangle A_j'| \geq 2n+2$.
Bây giờ áp dụng lập luận câu a cho $M' = \{A_1'; A_2'; ...; A_m'\}$ là các tập con của X', ta có số bộ $(x; i; j)$ với $x \in A_i' \triangle A_j'$, một mặt sẽ có ít nhất $(2n+2) \cdot \dfrac{m(m-1)}{2}$; mặt khác sẽ không quá $(4n+1) \cdot \dfrac{m^2}{4}$. Từ đó suy ra

$$(2n+2) \cdot \frac{m(m-1)}{2} \leq (4n+1) \cdot \frac{m^2}{4} \Leftrightarrow m \leq \frac{4(n+1)}{3}.$$

■

Ví dụ 3.12 (China TST 2014). Cho A là tập hữu hạn các số thực dương, $B = \left\{\dfrac{a+b}{c+d} : a, b, c, d \in A\right\}$.
Chứng minh rằng:

$$|B| \geq 2|A|^2 - 1.$$

Lời giải: Ta cần bổ đề sau: Cho a, b, c, d, e, f, g, h là các số dương với $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} > \dfrac{e}{f} = \dfrac{g}{h}$, $a > c, e > g$. Khi đó:

$$\frac{e}{f} < \frac{e+c}{f+d} < \frac{e+a}{f+b} < \frac{a}{b}, \qquad \frac{e}{f} < \frac{a+e}{b+f} < \frac{a+g}{a+h} < \frac{a}{b}.$$

Trở lại bài toán, đặt $B_0 = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A \right\}$. Do $\frac{a}{b} = \frac{a+a}{b+b}$ nên $B_0 \subset B$. Giả sử $B_0 = \{k_1; k_2; ...; k_s\}$, $k_i < k_j$ với mọi $i < j$. Ta phân hoạch tất cả các số có dạng $\frac{a}{b}$ $(a, b \in A)$ thành s nhóm, mỗi nhóm có các số bằng nhau, tức là có n_i số bằng k_i. Khi đó ta có $n_1 + n_2 + ... + n_s = |A|^2$ và $n_1 = n_s = 1$.

Giả sử $k_{j-1} = \frac{a_1'}{b_1'} = \frac{a_2'}{b_2'} = ... = \frac{a'_{n_{j-1}}}{b'_{n_{j-1}}}$, $k_j = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_{n_j}}{b_{n_j}}$ với $a_1' < a_2' < ... < a'_{n_{j-1}}$, $a_1 < a_2 < ... < a_{n_j}$. Áp dụng bổ đề với $j = 2, ..., s$ ta có:

$$k_{j-1} < \frac{a'_{n_{j-1}} + a_1}{b'_{n_{j-1}} + a_1} < \frac{a'_{n_{j-1}-1} + a_1}{b'_{n_{j-1}-1} + a_1} < ... < \frac{a_2' + a_1}{b_2' + b_1} < \frac{a_1' + a_2}{b_1' + b_2} < ... < \frac{a_1' + a_{n_j}}{b_1' + b_{n_j}} < k_j.$$

Xét các tập hợp

$$T_{j-1} = \left\{ k_{j-1}; \frac{a'_{n_{j-1}} + a_1}{b'_{n_{j-1}} + a_1}; \frac{a'_{n_{j-1}-1} + a_1}{b'_{n_{j-1}-1} + a_1}; ...; \frac{a_2' + a_1}{b_2' + b_1}; \frac{a_1' + a_2}{b_1' + b_2}; ...; \frac{a_1' + a_{n_j}}{b_1' + b_{n_j}} \right\}$$

với $i = 2, ..., s$ và $T_s = \{k_s\}$. Rõ ràng các phần tử của T_{j-1} đều nhỏ hơn các phần tử của T_j nên các T_i là đôi một rời nhau. Hơn nữa, $|T_{j-1}| = n_{j-1} + n_j$ và $T_j \subset B$. Do đó:

$$\begin{aligned} |B| &\geq |T_1| + |T_2| + ... + |T_s| \\ &= (n_1 + n_2) + (n_2 + n_3) + ... + (n_{s-1} + n_s) + 1 \\ &= 2(n_1 + n_2 + ... + n_s) - 1 \\ &= 2|A|^2 - 1. \end{aligned}$$

Hoàn tất chứng minh. ■

Trên đây là một số bài toán trong các đề thi hoặc tác giả sưu tầm được liên quan đến tập hợp số. Các vấn đề dù không cần quá nhiều lý thuyết cao siêu nhưng vẫn mang vẻ đẹp nhất định. Bên dưới là một số bài tập dành cho độc giả.

B Bài tập

Bài tập 3.1. Xét tập A là tập con của $\mathbb{N}^*$ thỏa mãn với mọi $x, y \in A$ thì $|x - y| \geq \frac{xy}{31}$. Hỏi A có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Bài tập 3.2 (Romania TST 2002). Tìm tất cả các tập A, B thỏa các điều kiện sau:

a) $A \cup B = \mathbb{Z}$.
b) Nếu $x \in A$ thì $x - 1 \in B$.
c) Nếu $x, y \in B$ thì $x + y \in A$.

Bài tập 3.3. Đặt $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Tìm tất cả các song ánh $f : K \to K$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in K$.
(ii) $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in K$.
(iii) $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Bài tập 3.4 (Ba Lan, đề nghị IMO 1993).

Gọi S_n là số các dãy $(a_1; a_2; ...; a_n)$ với $a_i \in \{0; 1\}$ trong đó không có 6 phần tử liên tiếp nào bằng nhau. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Bài tập 3.5. Xét S là tập hợp con của tập $\mathbb{N}^*$ và tập $A = \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}^*\}$ là tập con của S. Biết rằng nếu $a, b \in A$ và $\dfrac{a}{b}$ là số nguyên thì $\dfrac{a}{b} \in S$. Hỏi S có phần tử lớn nhất không?

Bài tập 3.6. Xét tập hợp A có các phần tử là các số nguyên dương thỏa mãn:

(i) $\min A = 1, \max A = 100$.

(ii) Với mọi $a \in A, a > 1$ thì tồn tại $b, c \in A$ (b không nhất thiết khác c) sao cho $a = b + c$.

Tập A có thể có ít nhất bao nhiêu phần tử?

Bài tập 3.7. Tìm tất cả các tập hợp A khác rỗng gồm hữu hạn các số thực sao cho với mọi $x \in A$ thì $x + 1 - x^2 \in A$ và $x - 1 + x^2 \in A$.

Bài tập 3.8 (Indonesia Regional MO 2021).

Cho X là tập hợp gồm các phần tử là các số hữu tỉ dương thỏa mãn:

(i) Nếu x là số hữu tỉ và $2021 \le x \le 2022$ thì $x \in X$.

(ii) Với $x, y \in X$ thì $\dfrac{x}{y} \in X$.

Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều là phần tử của X.

Bài tập 3.9. Tìm tất cả các tập hợp $A \subset \mathbb{N}^*$ có nhiều hơn một phần tử và thỏa mãn

$$\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow \frac{a+b}{\gcd(a,b)} \in A.$$

Bài tập 3.10. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương khác nhau $(a; b)$ sao cho có đúng 2026 số thực thuộc đoạn $[0; 1]$ có thể viết dưới dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ với x, y là các số nguyên?

Bài tập 3.11 (Bulgaria 1998). Tìm tất cả các tập hợp A gồm hữu hạn các số thực không âm sao cho:

(i) A chứa ít nhất 4 phần tử;

(ii) Với bất kỳ $a, b, c, d \in A$ đôi một khác nhau, ta có $ab + cd \in A$.

Bài tập 3.12 (APMO 2006). Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều có thể viết được dưới dạng tổng hữu hạn các lũy thừa nguyên khác nhau đôi một của số tỉ lệ vàng $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 3.13. Cho $(a_n), (b_n), (c_n)$ là ba cấp số cộng vô hạn với các phần tử là các số nguyên. Giả sử $(a_n) \cup (b_n) \cup (c_n)$ chứa các số nguyên từ 1 đến 8. Chứng minh rằng 1980 là số hạng của ít nhất một trong ba cấp số cộng $(a_n), (b_n), (c_n)$.

Bài tập 3.14. Cho tập hợp A là tập con của $\mathbb{Q}$ có tính chất: Nếu $a \in A$ thì $1 + \dfrac{1}{a} \in A$ và $2 + \dfrac{1}{a-1} \in A$ $(a \neq 1)$. Biết rằng $2 \in A$. Chứng minh rằng:

a) Tất cả các số nguyên $n \ge 3$ đều thuộc A.

b) Tất cả các số hữu tỉ lớn hơn 1 đều thuộc A.

Bài tập 3.15 (Kiểm tra lớp 11DT 2025).

Cho một số nguyên $n \ge 2$. Gọi một số nguyên dương T là số có tính chất $\mathcal{P}$ nếu tồn tại các tập con $A_1, A_2, ..., A_m$ $(m \ge 3)$ khác nhau và khác rỗng của $S = \{1; 2; ...; n\}$ thỏa mãn $T = \sum\limits_{i=1}^{m} |A_i|$, và với mọi $p, q, r \in \{1; 2; ...; m\}$ đôi một phân biệt, ta có $A_p \cap (A_q \triangle A_r) = \varnothing$ hoặc $A_p \subset (A_q \triangle A_r)$. Tìm số có tính chất $\mathcal{P}$ lớn nhất.

Bài tập 3.16 (Nghệ An 2009). Cho số nguyên $n \geq 2$. Ký hiệu $A = \{1; 2; ...; n\}$. Tập con B của A được gọi là tập *tốt* nếu B khác rỗng và trung bình cộng của các phần tử của B là một số nguyên. Gọi T_n là số các tập tốt của tập A. Chứng minh rằng $T_n - n$ là một số chẵn.

Tài liệu tham khả

[1] Th.S. Nguyễn Văn Nho. *Tuyển tập Olympic Toán học tại các nước Đông Âu*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] Th.S. Nguyễn Văn Nho and NGƯT. ThS. Lê Hoành Phò. *Tuyển tập Olympic Toán học tại các nước châu Á - Thái Bình Dương*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Nguyễn Chí Trung, Nguyễn Văn Phương, Phan Lê Phi Lâm, Võ Thành Đạt, Huỳnh Phạm Minh Nguyên, and Đoàn Cao Khả. *Tập san Toán học: Kỉ niệm 20 năm thành lập trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa*. Tp. HCM, tháng 3 năm 2020.

§4. CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ TỒN TẠI VÔ HẠN TRONG SỐ HỌC

NGUYỄN THÁI HƯNG - Giáo viên STAR EDUCATION

A Lý thuyết và ví dụ

Về bài toán chứng minh có vô hạn số nguyên dương n để mệnh đề $P(n)$ đúng, ta có một số hướng đi sau:

- Chỉ ra một trường hợp tổng quát: $n = f(k)$ với $f(1), f(2), \ldots$ đôi một khác nhau.
- Sử dụng quy nạp: nếu đã có các giá trị $n_1, n_2, \ldots, n_k$ thỏa mãn $P(n)$ thì chọn n_{k+1} phụ thuộc vào $n_1, \ldots, n_k$ cũng thỏa mãn $P(n)$. Tùy thuộc vào từng bài toán mà n_{k+1} phụ thuộc vào toàn bộ $n_1, \ldots, n_k$ hay chỉ phụ thuộc vào n_k.
- Sử dụng phản chứng: giả sử tồn tại hữu hạn các số tự nhiên $n_1, \ldots, n_k$ để $P(n)$ thỏa mãn. Sau đó chỉ ra thêm một giá trị khác nằm ngoài các số $n_1, \ldots, n_k$ cũng thỏa mãn.

Sau đây là một định lý khá quan trọng về sự tồn tại vô hạn trong số học:

Định lí 4.1 (Schur). Cho f là một đa thức khác hằng, hệ số nguyên. Khi đó tồn tại vô hạn số nguyên tố là ước của ít nhất một số hạng khác 0 trong dãy $f(1), f(2), f(3), \ldots$.

Chứng minh: Giả sử $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ với $a_n \neq 0$ và $n \geq 1$.

- Nếu $a_0 = 0$ thì $f(0) = 0$ và $f(p) \neq 0$ với p là số nguyên tố đủ lớn. Khi đó $f(p) - f(0) \vdots p$ nên $f(p) \vdots p$. Như vậy, định lý được chứng minh trong trường hợp này.
- Nếu $a_0 \neq 0$, ta có

$$f(a_0 x) = a_0 + a_0 a_1 x + \cdots + a_0^n a_n x^n = a_0 \left(1 + a_1 X + \cdots + a_0^{n-1} x^n\right).$$

  Đa thức $g(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_0^{n-1} a_n x^n$ khác hằng, do đó tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $x \geq k_0$ thì $|g(x)| \geq 2$. Với mỗi $k \geq k_0$, chọn số nguyên tố p_k là ước của $g(k!)$. Khi đó $p_k \mid g(k!)$ và $k! \mid g(k!) - 1$, suy ra p_k nguyên tố cùng nhau với $k!$ và do đó $p_k > k$. Hơn nữa, p_k là ước của $f(a_0 k!)$ với $k \geq k_0$ và $p_k > k!$.
  Định lý được chứng minh.

■

Sau đây là một ví dụ áp dụng định lý Schur.

Ví dụ 4.1 (Iran 2004). Tìm tất cả các đa thức f hệ số nguyên sao cho $f(m)$ và $f(n)$ nguyên tố cùng nhau với mọi số nguyên m và n nguyên tố cùng nhau.

Lời giải: Ta thấy rằng đa thức $\pm x^k$ với $k \geq 0$ là các đa thức thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ chứng minh đây cũng chính là các đa thức duy nhất thỏa mãn.

Xét f là một đa thức cần tìm và đặt $f(x) = x^k g(x)$ với $k \geq 0$ và $g(0) \neq 0$. Nếu g là đa thức hằng thì rõ ràng $g(x) \equiv \pm 1$. Giả sử g khác hằng, theo định lý Schur 4.1 thì có vô hạn số nguyên tố p sao cho phương trình $g(n) \equiv 0 \pmod p$ có nghiệm. Xét một cặp (p, n) như vậy với p nguyên tố cùng nhau với $g(0) \neq 0$. Nếu $n \vdots p$ thì $g(n) - g(0) \vdots n \vdots p$, điều này không xảy ra vì $g(n) \vdots p$ nhưng $\gcd(p, g(0)) = 1$. Do đó $\gcd(p, n) = 1$ nên $\gcd(n, n+p) = 1$, dẫn đến $f(n)$ và $f(n+p)$ nguyên tố cùng nhau, điều này vô lý vì $f(n)$ và $f(n+p)$ đều chia hết cho p (vì p là ước của cả $g(n)$ và $g(n+p)$). Tóm lại, g là hằng và ta có kết thúc bài toán. ■

Ví dụ 4.2. Cho số nguyên dương $k > 1$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $n \mid k^n + 1$.

Lời giải: **Phân tích và lời giải.**

- **Hướng 1:** Ta sẽ tìm n có dạng gần giống với $k^n + 1$. Cụ thể, ta thử xét $n = k^a + 1$, khi đó ta cần có $k^a + 1 \mid k^n + 1$. Vì vậy, ta cần n lẻ và $a \mid n \mid k^a + 1$. Cách đơn giản nhất là chọn a có dạng p^t để có thể áp dụng Định lý LTE. Tuy nhiên, ta sẽ cần đến p lẻ và $p \mid k + 1$, khi đó ta có
$$v_p(k^n + 1) = v_p(k + 1) + v_p(n) \geq 1 + t,$$
suy ra $n = p^t \mid k^n + 1$. Đây là một trường hợp rất tốt, tuy nhiên ta cần lưu ý đến trường hợp còn lại là $p + 1$ không có ước nguyên tố lẻ hay $p + 1 = 2^m$ $(m \geq 2)$. Ta vẫn cần $a \mid k^a + 1$ hay lúc này là $a \mid (2^m - 1)^a + 1$. Vậy làm sao để làm xuất hiện ước nguyên tố lẻ như trường hợp đầu tiên? Ta thấy rằng $(2^m - 1) + 1$ không cho ta ước nguyên tố lẻ nhưng $(2^m - 1)^2 + 1 = 2(2^{2m-1} - 2^m + 1)$ thì lại có! Vì vậy, ta chỉ cần chọn $a = 2 \cdot p^t$ với p là ước nguyên tố lẻ của $(2^m - 1)^2 + 1$ là có thể giải quyết được bài toán. Thật vậy, chọn $a = 2 \cdot p^t$ với p là ước nguyên tố lẻ của $(2^m - 1)^2 + 1$; khi đó
$$v_p\left[(2^m - 1)^a + 1\right] = v_p\left(\left[(2^m - 1)^2\right]^{p^t} + 1\right) = v_p\left[(2^m - 1)^2 + 1\right] + v_p(p^t) \geq t + 1.$$
Vì vậy $(2^m - 1)^a + 1 \,\vdots\, p^t$, mà $(2^m - 1)^a + 1$ là số chẵn nên nó chia hết cho 2, suy ra $(2^m - 1)^a + 1$ chia hết cho a. Hoàn tất chứng minh.
- **Hướng 2:** Ta thấy $n = 1$ là một số thỏa mãn. Ta thử nghĩ đến việc quy nạp, hi vọng rằng có thể tìm được một số khác thỏa mãn dựa vào các số đã cho. Giả sử n_1 thỏa mãn $n_1 \mid k^{n_1} + 1$, ta cần chọn n phụ thuộc vào n_1 sao cho $n \mid k^n + 1$ (ta chỉ mong rằng nó sẽ phụ thuộc vào một giá trị n_1, vì nếu phụ thuộc vào nhiều giá trị đã biết trước đó như $n_1, n_2, \ldots, n_k$ thì rất khó để xử lí). Để đơn giản, ta chọn n có dạng giống với $k^n + 1$, chẳng hạn $n = k^{n_1} + 1$. Như vậy, để $n = k^{n_1} + 1 \mid k^n + 1$ thì ta cần $n_1 \mid n$ và $n = k^{n_1} + 1$ lẻ, điều này chỉ xảy ra khi k chẵn. Như vậy, nếu k chẵn thì ta giải quyết xong, ta cần xét đến k lẻ. Để ý rằng
$$k^n + 1 = (k^{n_1})^{\frac{n}{n_1}} + 1.$$
Do đó nếu $\dfrac{n}{n_1} = \dfrac{k^{n_1} + 1}{n_1}$ lẻ thì ta có thể suy ra $k^n + 1 \,\vdots\, k^{n_1} + 1$. Điều hoàn toàn có thể xử lí được vì k lẻ nên nếu n_1 chẵn thì $k^{n_1} + 1 \equiv 2 \pmod 4$ và ta chỉ cần chọn thêm n_1 chẵn. Vì vậy, tại bước cơ sở của chứng minh quy nạp, ta chọn $n_1 = 2$, cũng là một giá trị thỏa mãn khi k lẻ.
Tóm lại, ta sử dụng quy nạp như sau:
$$k \text{ chẵn: } \begin{cases} n_1 = 1 \\ n_{i+1} = k^{n_i} + 1, \ \forall i \geq 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad k \text{ lẻ : } \begin{cases} n_1 = 2 \\ n_{i+1} = k^{n_i} + 1, \ \forall i \geq 1 \end{cases}.$$
- **Hướng 3:** Ta cũng sẽ sử dụng phương pháp quy nạp nhưng theo một cách khác. Ta thấy rằng nếu $n \mid k^n + 1$, nếu ta tìm một số khác là $n_1 = an + b$ thì việc có được $an + b \mid k^{an+b} + 1$ không khả thi. Vì vậy, ta sẽ chọn đơn giản là $n_1 = na$ và cần $an \mid k^{an} + 1$, vấn đề là làm sao để xác định a? Ta cần phải tìm một liên hệ nào đó giữa $k^n + 1$ và $k^{an} + 1$, điều này dễ

thấy ngay vì $k^{an}+1=(k^n)^a+1$. Tuy nhiên, điều này cũng không dễ dàng vì làm sao để chứng minh nó chia hết cho an? Để vượt qua, ta sẽ chuyển k^n về dạng "đa thức biến n", đặt $k^n+1=bn$, khi đó

$$k^{an}+1=(k^n)^a+1=(bn-1)^a+1=\sum_{i=1}^{a} C_a^i(bn)^i+(-1)^a+1. \tag{1.1}$$

Để biểu thức (1.1) được gọn nhất có thể, ta sẽ chọn a lẻ và khi đó ta cần $\sum_{i=1}^{a} C_a^i(bn)^i$ chia hết cho an. Vì vậy, ta sẽ chọn a sao cho $C_a^i b^i$ chia hết cho a với mọi i. Nhưng để mọi thứ trở nên đơn giản hết sức có thể, ta có thể chọn luôn $a=b$ để phép chia hết xảy ra. Điều này chưa thực sự ổn vì ta còn thêm điều kiện a lẻ, vì vậy để phép chọn $a=b$ xảy ra, ta còn cần đến b lẻ. Việc này có thể xảy ra hay không? Câu trả lời là có vì ta có thể kiểm soát b. Thật vậy, từ $k^n+1=bn$, ta thấy rằng nếu k chẵn thì rõ ràng b lẻ. Còn k lẻ thì sao? Rất đơn giản, ta sẽ chọn n chẵn để $k^n+1\equiv 2 \pmod 4$, khi đó $b=\dfrac{k^n+1}{n}$ là số lẻ; và để việc này xảy ra, tại bước cơ sở của phép quy nạp, ta sẽ chọn $n=2$.
Điều thú vị là với cách chọn để quy nạp này, đó là

$$n_1=an=bn=\frac{k^n+1}{n}\cdot n=k^n+1,$$

cũng chính là cách chọn để quy nạp trong **Hướng 2**.

■

Ví dụ 4.3. Có tồn tại hay không vô hạn số nguyên dương $n>1$ sao cho $n \mid 2^{\sigma(n)}-1$?

Lời giải: **Phân tích và lời giải.**
Ta sẽ thử chọn trực tiếp n, ta sẽ chọn $n=2^a-1$. Để $2^a-1 \mid 2^{\sigma(n)}-1$ thì $a \mid \sigma(n)$ hay $a \mid \sigma(2^a-1)$. Điều này lại vô cùng khó khăn vò ta không thể kiểm soát được các ước nguyên tố của 2^a-1 nên việc xác định $\sigma(2^a-1)$ vô cùng khó khăn.

Để tìm ý tưởng khác, ta thử xét những trường hợp đơn giản nhất. Với $n=p$ là số nguyên tố, ta cần $p \mid 2^{p+1}-1$, dễ dàng thấy $p=3$ thỏa mãn. Ta thử sẽ thử tìm một số khác cũng thỏa mãn có dạng ap, để có thể tính được $\sigma(ap)$ dễ dàng, ta sẽ chọn $a=q$ là một số nguyên tố khác p. Khi đó ta cần $pq \mid 2^{(p+1)(q+1)}-1$. Để ý rằng $(p+1)(q+1) \vdots 4$ và $2^4-1=15$, vì vậy ta có thể chọn được $p=3$ và $q=5$. Cứ tương tự như vậy, ta dự đoán sẽ chọn được $n=p_1p_2\ldots p_k$ với $p_1,p_2,\ldots,p_k$ là các ước nguyên tố của $2^{2^k}-1$. Do đó, ta cần chứng minh thêm $2^{2^k}-1$ có ít nhất k ước nguyên tố. Ta đi đến lời giải sau đây.

Đặt $F_n=2^{2^n}-1$ với mọi $n\geq 1$. Ta chứng minh F_n có ít nhất n ước nguyên tố. Ta có $F_1=3$ có 1 ước nguyên tố. Giả sử F_n có ít nhất n ước nguyên tố, ta sẽ chứng minh F_{n+1} có ít nhất $n+1$ ước nguyên tố. Thật vậy, ta có

$$F_{n+1}=2^{2^{n+1}}-1=\left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right)=F_n\left(2^{2^n}+1\right).$$

Theo giả thiết quy nạp thì F_n có ít nhất n ước nguyên tố, hơn nữa $\left(F_n,2^{2^n}+1\right)=1$ nên $2^{2^n}+1$ có các ước nguyên tố không trùng với các ước nguyên tố của F_n, từ đó suy ra F_{n+1} có ít nhất $n+1$ ước nguyên tố. Gọi $p_1,p_2,\ldots,p_k$ là các ước nguyên tố của $2^{2^k}-1$; chọn $n=p_1p_2\cdots p_k$, khi đó

$$n=p_1p_2\cdots p_k \mid 2^{2^k}-1 \mid 2^{(p_1+1)\cdots(p_k+1)}-1=2^{\sigma(p_1\cdots p_k)}-1=2^{\sigma(n)}-1.$$

$\blacksquare$

Ví dụ 4.4. Một số nguyên dương a được gọi "siêu ước" nếu nó có nhiều ước hơn tất cả các số nguyên dương bé hơn nó. Chứng minh rằng

a) Tồn tại vô hạn số siêu ước.
b) Nếu a là số siêu ước và $p < q$ là các số nguyên tố thì $v_p(a) \geq v_q(a)$.
c) Nếu p, q là các số nguyên tố thỏa mãn $p^k < q$ với k nguyên dương. Chứng minh rằng nếu a siêu ước và là bội của q thì a là bội của p^k.
d) Nếu p, q là các số nguyên tố thỏa mãn $p^k > q$ với k nguyên dương. Chứng minh rằng nếu p^{2k} là ước của một số siêu ước a thì q cũng là ước của a.
e) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N sao cho mọi số siêu ước lớn hơn N đều là bội của n.

Lời giải:

a) Giả sử tồn tại hữu hạn số siêu ước. Khi đó ta gọi a là số siêu ước lớn nhất. Khi đó mọi số nguyên lớn hơn a đều không là số siêu ước. Ta chứng minh

$$\tau(a+n) \leq \tau(a), \tag{1.2}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với $n = 0$ thì rõ ràng (1.2) đúng. Giả sử (1.2) đúng với mọi số tự nhiên $k \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$), ta cần chứng minh $\tau(a+n+1) \leq \tau(n)$. Thật vậy, vì $a+n+1$ không là số siêu ước (do $a+n+1 > a$) nên tồn tại $1 \leq k \leq a+n$ sao cho $\tau(a+n+1) \leq \tau(k)$.
- Nếu $k < a$ thì rõ ràng $\tau(k) < \tau(a)$ (do a siêu ước).
- Nếu $a \leq k \leq a+n$ thì theo giả thiết quy nạp, ta được $\tau(k) \leq \tau(n)$.

Từ đó ta kết luận $\tau(a+n+1) \leq \tau(a)$. Theo nguyên lí quy nạp, ta được $\tau(n) \leq \tau(a)$ với mọi $n \geq a$. Điều này vô lí vì chọn $n = p^{\tau(a)} > a$ với p là một số nguyên tố đủ lớn thì $\tau(n) = \tau(a) + 1 > \tau(a)$. Vậy có vô hạn số siêu ước.

b) Nếu $v_p(q) = 0$ thì bài toán được giải quyết. Xét $v_p(q) \geq 1$. Đặt $v_p(a) = x$ và $v_q(a) = y$ với $x, y \in \mathbb{N}$ và $y \geq 1$. Xét $b = a \cdot \dfrac{p}{q} < a$. Khi đó

$$\begin{aligned}\tau(b) < \tau(a) &\Rightarrow \tau(p^{x+1}q^{y-1}A) < \tau(p^x q^y A)\\ &\Rightarrow (x+2)y\tau(A) < (x+1)(y+1)\tau(A)\\ &\Rightarrow (x+2)y < (x+1)(y+1)\\ &\Rightarrow 2y < x+y+1\\ &\Rightarrow y < x+1.\end{aligned}$$

Do đó $y \leq x$ hay $v_q(a) \leq v_p(a)$.

c) Đặt $a = p^x q^y A$ với $A \in \mathbb{N}^*$ và $(A, p) = (A, q) = 1$. Chọn $b = a \cdot \dfrac{p^k}{q} < a$, khi đó

$$\begin{aligned}\tau(a) > \tau(b) &\Rightarrow \tau(p^x q^y A) > \tau\left(p^{x+k}q^{y-1}A\right)\\ &\Rightarrow \tau(A)(x+1)(y+1) > \tau(A)(x+k+1)y\\ &\Rightarrow (x+1)(y+1) > (x+k+1)y\\ &\Rightarrow x > ky-1.\end{aligned}$$

Vì $y \geq 1$ (do $a \,\vdots\, q$) nên $x > k-1$, do đó $x \geq k$. Vì vậy $v_p(a) = k$ hay $a \,\vdots\, p^k$.

d) Đặt $a = p^x q^y A$ với $A \in \mathbb{N}^*$ và $(A,p) = (A,q) = 1$. Vì $a \vdots p^{2k}$ nên $v_p(a) \geq 2k$. Xét $b = a \cdot \dfrac{q}{p^k} < 1$ nên $\tau(b) < \tau(a)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\tau\left(p^{x-k}q^{y+1}A\right) < \tau\left(p^x q^y A\right) &\Rightarrow (x-k+1)(y+1)\tau(A) < (x+1)(y+1)\tau(A)\\ &\Rightarrow x-k+1 < x+1\\ &\Rightarrow k > 0.\end{aligned}$$

Do đó $k = v_q(a) \geq 1$ hay $a \vdots q$.

e) Giả sử với mọi số nguyên dương N thì tồn tại một số siêu ước lớn hơn N và không chia hết cho n. Khi đó ta thu được một dãy số tăng $(a_k)_{k\geq 1}$ sao cho a_k siêu ước và a_k không chia hết cho n với mọi $k \geq 1$.
Giả sử các số $a_1, a_2, \ldots,$ chỉ có hữu hạn ước nguyên tố $q_1, q_2, \ldots, q_l$. Đặt $a_k = q_1^{\alpha_{k1}} q_2^{\alpha_{k2}} \cdots q_l^{\alpha_{kl}}$ với $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kl} \in \mathbb{N}$. Nếu các dãy số $(\alpha_{k1})_{k\geq 1}, (\alpha_{k2})_{k\geq 1}, \ldots, (\alpha_{kl})_{k\geq 1}$ đều bị chặn thì dãy $(a_k)_{k\geq 1}$ bị chặn, điều này mâu thuẫn vì dãy $(a_k)_{k\geq 1}$ là dãy số nguyên tăng. Do đó tồn tại ít nhất một dãy $(\alpha_{ki})_{k\geq 1}$ $(1 \leq i \leq l)$ không bị chặn. Xét q là một số nguyên tố khác $q_1, \ldots, q_l$; chọn α_{ki} đủ lớn sao cho $a_k \vdots p_i^{2\alpha_{ki}}$ và $p_i^{\alpha_i} > q$. Theo câu d), ta thu được $a_k \vdots q$ (Vô lí).
Như vậy các số $a_1, a_2, \ldots,$ có vô hạn ước nguyên tố. Gọi $\{q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots,\}$ là tập hợp tất cả các ước nguyên tố khác nhau của $a_1, a_2, \ldots$. Đặt $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$. Khi đó tồn tại $r \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots\}$ đủ lớn để $r > \max\left\{p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_t^{\alpha_t}\right\}$. Xét a_m là số hạng của dãy $(a_k)_{k\geq 1}$ mà $a_m \vdots r$. Theo câu d), ta suy ra $a_m \vdots p_i^{\alpha_i}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, t$. Như vậy $a_m \vdots n$, điều này mâu thuẫn vì mọi số a_k đều không chia hết cho n.
Hoàn tất chứng minh.

■

Ví dụ 4.5.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương $n > 1$ sao cho

$$\varphi(n) \geq \varphi(k) + \varphi(n-k),\ \forall 1 \leq k \leq n-1.$$

b) Có tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho

$$\varphi(n) \leq \varphi(k) + \varphi(n-k),\ \forall 1 \leq k \leq n-1$$

hay không?

Lời giải:

a) Chọn n là các số nguyên tố lớn hơn 2.

b) Gọi p_i là số nguyên tố lớn thứ i. Chọn các số nguyên n có dạng $n = p_1 p_2 \cdots p_m$. Khi đó, với mọi $1 \leq k \leq m-1$, gọi $q_1, q_2, \ldots, q_l$ là các ước nguyên tố của k. Rõ ràng $q_i \geq p_i$ và $m \geq l$. Khi đó, ta được

$$\varphi(k) = k\prod_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \geq k\prod_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \geq k\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\varphi(n-k) \geq (n-k)\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$. Do đó

$$\varphi(k) + \varphi(n-k) \geq k\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + (n-k)\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \varphi(n).$$

Hoàn tất bài toán.

■

Ví dụ 4.6. Cho p là số nguyên tố thỏa mãn $p \equiv 1 \pmod 5$ hoặc $p \equiv 4 \pmod 5$. Xét dãy số $x_1 = 1$, $x_2 = k \in \mathbb{Z}$ và $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ với mọi $n \geq 1$.

a) Với $k = 1$, chứng minh rằng $x_{n+p-1} \equiv x_n \pmod p$ với mọi số nguyên dương n.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên k để x_n không chia hết cho p với mọi số nguyên dương n.

Lời giải:

a) Với $k = 1$, ta thu được

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i(\sqrt{5})^i - \sum_{k=0}^{n} C_n^i(-\sqrt{5})^i\right) \\ &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n} C_n^i\left(\sqrt{5}\right)^i\left[1-(-1)^i\right]. \end{aligned}$$

Với $n = p-1$, lưu ý $C_n^i\left(\sqrt{5}\right)^i\left[1-(-1)^i\right] = 0$ nếu i chẵn và $C_{p-1}^{2i+1} \equiv -1 \pmod p$ với mọi $1 \leq i \leq \dfrac{p-3}{2}$, ta được :

$$\begin{aligned} x_{p-1} &= \frac{1}{2^{p-1}\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} C_{p-1}^{2i+1}(\sqrt{5})^{2i+1}\cdot 2 \\ &\equiv -\frac{1}{2^{p-2}}\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} 5^i \\ &\equiv -\frac{1}{2^{p-2}}\cdot\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{4} \\ &\equiv -\frac{1}{2^p}\cdot\left(5^{\frac{p-1}{2}}-1\right) \pmod p. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $p \equiv 1, 4 \pmod 5$ nên $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\dfrac{5}{p}\right) \equiv 1 \pmod p$, từ đó suy ra $x_{p-1} \equiv 0 \pmod p$. Mặt khác, với $n = p$, ta có (lưu ý rằng $C_p^i \,\vdots\, p$ với mọi $1 \leq i \leq p-1$):

$$x_p = \frac{1}{2^p\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2i+1}(\sqrt{5})^{2i+1}\cdot 2 = \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2i+1}5^i \equiv \frac{5^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}} \equiv 1 \pmod p.$$

Vậy $x_{p-1} \equiv 0 \pmod p$ và $x_p \equiv 1 \equiv x_1 \pmod p$. Bằng quy nạp, ta thu được điều phải chứng minh.

b) Bằng quy nạp, ta chứng minh được $x_n = F_{n-1}k + F_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$, trong đó (F_n) là dãy Fibonacci xác định như trong câu a). Ta có

$$x_{n+p-1} = F_{n+p-2}k + F_{n+p-3} \equiv F_{n-1}k + F_{n-2} \equiv x_n \pmod p,\ \forall n \geq 2.$$

Như vậy để xác định k sao cho $x_n \not\vdots\, p$ với mọi $n \geq 1$; ta chỉ cần chọn k sao cho $x_2, x_3, \ldots, x_p$ không chia hết cho k. Để ý rằng, nếu $F_{i-1} \vdots\, p$ $(i \geq 2)$ thì $x_i \not\vdots\, p$. Thật vậy, nếu $F_{i-1} \vdots\, p$ và $x_i = F_{i-1}k + F_{i-2} \vdots\, p$ thì $F_{i-2} \vdots\, p$, điều này mâu thuẫn vì $(F_n, F_{n+1}) = 1$, $\forall n \geq 0$. Do đó, để đơn giản, ta có thể giả sử $F_1, \ldots, F_{p-1}$ không chia hết cho p. Khi đó, gọi y_i là số nguyên thỏa mãn $y_i F_i \equiv 1 \pmod p$ $(i = \overline{1, p-1})$. Khi đó tập hợp $\{-F_0 y_1, \ldots, -F_{p-2} y_{p-1}\}$ nhận tối đa $p-1$ số dư khi chia cho p. Vì vậy, ta có thể chọn được k sao cho $-F_{i-1}y_i \not\equiv k$ (mod p). Nhân hai vế cho F_i, ta có

$$-F_{i-1}y_iF_i \not\equiv F_ik \pmod p \text{ hay } F_ik + F_{i-1} \not\equiv 0 \pmod p.$$

Vì $1 \leq i \leq p-1$ nên $x_2, x_3, \ldots, x_p$ không chia hết cho p. Hoàn tất chứng minh.

■

B Bài tập

Bài tập 4.1. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n thỏa mãn $n \mid 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Bài tập 4.2. Chứng minh rằng $2^n + 3^n$ chia hết cho n^2 với vô hạn số nguyên dương n.

Bài tập 4.3. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n để $n^2 + 1 \mid n!$.

Bài tập 4.4. Cho một dãy vô hạn $a_1, a_2, \ldots$ gồm các số nguyên có các tính chất sau:

a) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo n với mọi $n \geq 1$.
b) Có vô hạn các số hạng dương và âm trong dãy.

Chứng minh rằng mỗi số nguyên xuất hiện đúng một lần trong dãy số trên.

Bài tập 4.5. Với n và k là các số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng $(n!)^k$ là ước của $(kn)!$.
b) Chứng minh có hữu hạn số nguyên dương n thỏa mãn $n! + 1$ là ước của $(kn)!$.

Bài tập 4.6.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên dương n để $n^4 + 1$ có ước nguyên tố lớn hơn $2n$.
b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên dương n để $n^2 + 1$ có ước nguyên tố lớn hơn $2n + \sqrt{2n}$.

Bài tập 4.7. Một số nguyên dương được gọi là *mạnh* nếu $p^2 \mid n$ với mọi ước nguyên tố p của n. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp số mạnh liên tiếp.

Bài tập 4.8. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và

$$a_{n+1} = a_n^4 - a_n^3 + 2a_n^2 + 1,\ n \geq 1.$$

Đặt $b_n = a_n^2 + 1$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng

a) b_{n+1} chia hết cho b_n và $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}, b_n\right) = 1$ với mọi $n \geq 1$.
b) Tồn tại vô hạn số nguyên tố không là ước của mọi số hạng trong dãy (a_n).

Bài tập 4.9. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương a để phương trình $\tau(an) = n$ không có nghiệm nguyên dương n.

Bài tập 4.10. Với số nguyên dương n có dạng phân tích tiêu chuẩn $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$, ta đặt $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s}$. Chứng minh rằng

a) Tồn tại vô hạn số nguyên dương n để $\lambda(n) = \lambda(n+1) = 1$.

b) Tồn tại vô hạn số nguyên dương n để $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$.

§5. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG

NGUYỄN PHƯỚC THỊNH - Giáo viên STAR EDUCATION

Đa thức là một chủ đề quan trọng trong chương trình toán chuyên cấp Trung học cơ sở và Trung học phổ thông, thậm chí ở một số chuyên ngành toán ở bậc đại học. Trong thời gian gần đây, việc xuất hiện các bài toán liên quan đến đa thức trong các đề thi chọn đội tuyển các tỉnh cũng như các kì thi Olympic trở nên thường xuyên hơn, chứng tỏ tính quan trọng của chuyên đề đa thức trong các cuộc thi học sinh giỏi. Với sự rộng rãi về các mảng khác nhau trong chuyên đề đa thức, trong nội dung bài viết này, tác giả đề cập đến vấn đề nghiệm của đa thức và một số ứng dụng.

A Kiến thức chuẩn bị

Trong phần này, tác giả nhắc lại một số khái niệm căn bản về đa thức và một số thống nhất chung cho các phần tiếp theo. Lưu ý rằng một số tính chất có thể không được đề cập, chủ yếu nhắc đến các khái niệm liên quan đến nghiệm của đa thức.

Định nghĩa 5.1. Xét K là một trong các tập hợp $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ta kí hiệu tập hợp (quy ước $x^0 = 1$)

$$\begin{aligned} K[x] &= \left\{ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K,\ \forall i = \overline{0, n} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K,\ \forall i = \overline{0, n} \right\}. \end{aligned}$$

Tập $K[x]$ được đĩnh nghĩa như trên được gọi là *vành đa thức một biến x* trên K. Mỗi phần tử trong $K[x]$ được viết là $P(x)$ hoặc đơn giản là P. Phần tử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$$

được gọi là một *đa thức* theo biến x với các hệ số thuộc tập K.

> ***Nhận xét:***
> Ta hiểu rằng nếu viết $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thì đa thức $P(x)$ là một ánh xạ $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, biến x đại diện cho các số thực. Trong bài viết này, nếu không nói gì thêm, ta hiểu là đang xét các đa thức với hệ số thực, tức là $P(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Định nghĩa 5.2. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Nếu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0, \text{ với } a_n \neq 0,$$

thì ta nói *bậc* của đa thức $P(x)$ là n. Kí hiệu $\deg P(x) = n$ (hoặc $\deg P = n$).

> ***Nhận xét:***
>
> - Trường hợp $P(x) = a$ với a là hằng số, ta gọi P là *đa thức hằng*. Nếu a khác 0 thì ta nói P *có bậc là* 0.
> - Nếu $P(x) = 0$, ta nói P là *đa thức không*. Thông thường ta không định nghĩa bậc của đa thức không, tuy nhiên tỳ vào tình huống ta có thể quy ước nó có bậc là -1 hoặc $-\infty$.
> - Khi viết $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$ và không đề cập đến điều kiện của a_n, ta cần hiểu $P(x) = 0$ hoặc $\deg P(x) \leq n$.
> - Trong trường hợp $a_n = 1$ hay $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$, ta gọi P là *đa thức*

monic hay *đa thức đơn khởi*.

Định nghĩa 5.3. Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (với $a_n \neq 0$). Khi đó các số $a_0, a_1, \ldots a_n$ được gọi là *hệ số* của đa thức $P(x)$, trong đó $a_n \neq 0$ được gọi là *hệ số bậc cao nhất* của $P(x)$, a_0 được gọi là *hệ số tự do* của $P(x)$.

Định nghĩa 5.4. Cho đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x], \text{ với } a_n \neq 0.$$

Khi đó, với $c \in \mathbb{R}$, ta gọi phần tử

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0$$

là *giá trị của đa thức* $P(x)$ tại phần tử c.

Định nghĩa 5.5. Cho hai đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Nếu có đa thức $S(x) \in \mathbb{R}[x]$ để $P(x) = Q(x)S(x)$ thì ta nói $P(x)$ *chia hết cho* $Q(x)$ (kí hiệu $P(x) \,\vdots\, Q(x)$) hoặc $Q(x)$ *chia hết* $P(x)$ (kí hiệu $Q(x) \mid P(x)$), với thương là $S(x)$.

Định lí 5.1 (Định lý Bézout). Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $c \in \mathbb{R}$. Khi đó, tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x)\,(x-c)\,Q(x) + P(c).$$

Chứng minh: Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (với $a_n \neq 0$). Khi đó

$$P(x) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
P(x) - P(c) &= a_n(x^n - c^n) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - c^{n-1}\right) + \ldots + a_1(x-c) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^k - c^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (x-c)\left(x^{k-1} + x^{k-2}c + \ldots + c^{k-1}\right) \\
&= (x-c)\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^{k-1} + x^{k-2}c + \ldots + c^{k-1}\right)\right] = (x-c)Q(x),
\end{aligned}$$

với $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (x-c)\left(x^{k-1} + x^{k-2}c + \ldots + c^{k-1}\right)$. Từ đó suy ra

$$P(x) = (x-c)Q(x) + P(c).$$

Ta có điều phải chứng minh. ■

Định nghĩa 5.6. Phần tử $c \in \mathbb{R}$ được gọi là *nghiệm thực* của đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ nếu $P(c) = 0$.

Hệ quả 1.1. Phần tử $c \in \mathbb{R}$ là nghiệm của đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - c$.

Định nghĩa 5.7. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $c \in \mathbb{R}$. Phần tử x được gọi là *nghiệm bội* (bậc) m của $P(x)$ nếu $(x-c)^m \mid P(x)$ nhưng $(x-c)^{m+1} \nmid P(x)$. Hay nói cách khác,

$$\begin{cases} P(x) = (x-c)^m Q(x), \\ Q(x) \in \mathbb{R}[x],\ Q(c) \neq 0. \end{cases}$$

Nhận xét:

- Thông thường khi nói "nghiệm bội" ta hiểu đó là nghiệm bội 2 trở lên ($m \geq 2$). Khi $m = 1$ ta nói nghiệm đó là *nghiệm đơn*.
- Đa thức có nghiệm bội m được xem như có m nghiệm bằng nhau. Theo nghĩa này, tổng số nghiệm thực sự của một đa thức có thể nhiều hơn số nghiệm phân biệt của nó.
- Khi ta nói "Đa thức $P(x)$ có các nghiệm $c_1, \ldots, c_n$ (không nhất thiết phân biệt)" thì ta hiểu rằng, nếu có hai hay nhiều phần tử c_i trong dãy trên bằng nhau thì nghiệm đó là nghiệm bội.

Mệnh đề 5.1. Nếu $P(x)$ là đa thức bậc n, có hệ số cao nhất là a và có n nghiệm thực $c_1, c_2, \ldots, c_n$ đôi một phân biệt thì

$$P(x) = a(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

Chứng minh: Hiển nhiên $n \geq 1$ vì đang xét n nghiệm thực phân biệt. Vì c_1 là nghiệm của $P(x)$ nên theo *Hệ quả 1.1*, tồn tại đa thức $Q_1(x)$ có bậc $n-1$ sao cho

$$P(x) = (x-c_1)Q_1(x).$$

Từ đó suy ra $0 = P(c_2) = (c_2 - c_1)Q_1(c_2) \Rightarrow Q(c_2) = 0$. DO đó c_2 là nghiệm của $Q_1(x)$. Tiếp tục áp dụng *Hệ quả 1.1* ta được

$$P(x) = (x-c_1)(x-c_2)Q_2(x),$$

với $Q_2(x)$ là đa thức có bậc $n-2$. Tiếp tục như thế cho đến nghiệm a_n, ta được

$$P(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)Q_0(x),$$

với $Q_0(x)$ là đa thức 0, tức là $Q_0(x) = C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dễ dàng suy ra được $C = a$, từ đó

$$P(x) = a(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

■

Trong trường hợp đa thức có nghiệm bội, tổng số nghiệm thực sự của một đa thức có thể nhiều hơn số nghiệm phân biệt của nó. Khi đó ta cũng có một kết quả tổng quát hơn của *Mệnh đề 5.1*

Mệnh đề 5.2. Nếu $P(x)$ là đa thức bậc n, hệ số cao nhất là a và có n nghiệm thực $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (không nhất thiết phân biệt) thì

$$P(x) = a(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

Nếu cần cụ thể hơn về số lần lặp lại của các nghiện bội, ta có thể biểu diễn như mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 5.3. Giả sử đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_m$ với bội tương ứng $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Khi đó, tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ để

$$P(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_m)^{k_m} \cdot Q(x).$$

> ***Nhận xét:***
> Nếu $\deg P = n$ và k_i là bội của nghiệm i, $i = \overline{1,m}$ thì
> $$k_1 + k_2 + \ldots + k_m \le \deg P.$$

Định lí 5.2. Cho $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc bé hơn hoặc bằng n. Khi đó, nếu P có nhiều hơn n nghiệm thì tất cả các hệ số bằng 0, tức là $P \equiv 0$.

Chứng minh: Giả sử có đa thức $P(c)$ bậc $n \ge 1$ có ít nhất $n+1$ nghiệm khác nhau là $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Vì a_1 là nghiệm của $P(x)$ nên $P(x)$ chia hết cho $(x - a_1)$, tức là

$$P(x) = (x - a_1)q_{n-1}(x),$$

trong đó $q - n - 1(x)$ là đa thức có bậc $n-1$. Cho $x = a_2$ từ đẳng thức trên, ta được

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)q_{n-1}(a_2).$$

Do đó a_2 là một nghiệm của $q_{n-1}(x)$, từ đó ta có

$$q_{n-1}(x) = (x - a_2)q_{n-2}(x),$$

trong đó $q_{n-2}(x)$ là đa thức bậc $n-2$. Suy ra

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_{n-2}(x).$$

Tiếp tục lặp lại như vậy, đến bước thứ n, ta được

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)q_0(x),$$

trong đó $q_0(x)$ là đa thức bậc không, tức là $q_0(x) \equiv C$. Từ đó ta có

$$P(x) = C(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Nếu $C = 0$ thì $P(x) \equiv 0$, trái với giả thiết. Vậy $C \ne 0$. Thay $x = a_{n+1}$ vào đẳng thức trên, ta được

$$0 = P(a_{n+1}) = (a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2)\ldots(a_{n+1} - a_n).$$

Vì $a_{n+1} \ne a_i$, $\forall i = \overline{1,n}$ nên vế phải của đẳng thức khác không, từ đó ta có điều vô lý. Vậy $P(x)$ bậc n không thể có nhiều hơn n nghiệm khác nhau. ■

Hệ quả 1.2.

- Một đa thức bậc n có không quá n nghiệm thực (tính cả bội).
- Nếu hai đa thức có bậc không quá n trùng nhau tại $n+1$ điểm thực thì chúng trùng nhau. Nói cách khác, nếu $P(x), Q(x)$ là hai đa thức có bậc không quá n và tồn tại $n+1$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sao cho
  $$P(a_i) = Q(a_i),\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n+1\},$$
  thì $P(x) = Q(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Liên quan đến nghiệm đa thức, không thể không nhắc đến *Định lý Viete* nói lên mối quan hệ giữa các nghiệm và các hệ số của đa thức.

Định lí 5.3 (Định lý Viete). Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ với $a_n \neq 0$. Giả sử $P(x)$ có n nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) là $x_1, \ldots, x_n$. Khi đó

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

B Sơ lược về các đa thức bậc thấp

1 Đa thức bậc hai

Trong *Định nghĩa 5.1*, khi cho $n = 2$, ta được đa thức có bậc hai, còn gọi là *tam thức bậc hai*.

Định nghĩa 5.8. Một *tam thức bậc hai* hệ số thực là một đa thức có dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

Tam thức bậc hai đã xuất hiện từ bậc Trung học phổ thông và xuyên suốt đến bậc Trung học phổ thông. Ta nhắc lại một số kết quả quan trọng.

Định lí 5.4 (Nghiệm của phương trình bậc hai).

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thực.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Định lí 5.5 (Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số bậc hai).

Xét hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) (Ở đây ta hiểu hàm số $y = f(x)$ là một ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Khi đó

- Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Định lí 5.6 (Dấu của tam thức bậc hai).

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, khi đó

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nếu $a > 0$; $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nếu $a < 0$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nếu $a > 0$; $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nếu $a < 0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) < 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$ và $f(x) > 0$ trên các khoảng còn lại nếu $a > 0$; $f(x) > 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$ và $f(x) < 0$ trên các khoảng còn lại nếu $a < 0$ (trong đó $x_1 < x_2$ là các nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$).

2 Giải các phương trình bậc ba, bậc bốn

Trong phần này, tác giả trình bày sơ lược về *Phương pháp Carnado* dùng để tìm nghiệm của phương trình bậc ba và *Phương pháp Ferrari* dùng để tìm nghiệm của phương trình bậc bốn.
Phương pháp Carnado. Trong phần này, ta trình bày một phương pháp được dùng để giải phương trình bậc ba, sử dụng một số tính toán liên quan đến số phức (đã được lược bỏ trong Chương trình phổ thông 2018). Chính vì thế, phần này chỉ mang tính chất tham khảo, bạn đọc muốn tìm hiểu sâu hơn có thể tham khảo các tài liệu liên quan đến số phức.
Xét phương trình bậc ba $ax^2+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Không mất tính tổng quát, ta có thể cho $a=1$. Ta luôn có thể đưa phương trình bậc ba về không có hạng tử bình phương (hay còn gọi là *khuyết bậc hai*) bằng cách đặt $x=y-\dfrac{b}{3}$. Khi đó biến đổi và rút gọn, phương trình trở thành

$$y^3+\left(c-\frac{b^2}{3}\right)y+\left(\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d\right)=0.$$

Đặt $p=c-\dfrac{b^2}{3}, q=\dfrac{2b^3}{27}-\dfrac{bc}{3}+d$, phương trình trở thành $y^3+py+q=0$, gọi là *phương trình bậc ba thu gọn*. Để giải phương trình này, ta cần mệnh đề sau

Mệnh đề 5.4. Cho phương trình bậc ba thu gọn $x^3+px+q=0$ $(p,q\in\mathbb{R})$. Số phức x_0 là nghiệm của phương trình trên khi và chỉ khi x_0 có thể biểu diễn dưới dạng $x_0=u_0+v_0$, trong đó (u_0,v_0) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Chứng minh: *Chiều thuận.* Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $x^3+px+q=0$ và xét (u_0,v_0) là hai nghiệm phức của phương trình

$$Z^2-x_0Z-\frac{p}{3}=0.$$

Khi đó, theo Định lý Viete, ta được

$$u_0+v_0=x_0,\ u_0v_0=-\frac{p}{3}.$$

Do x_0 là nghiệm của phương trình $x^3+px+q=0$ nên

$$\begin{aligned}(u_0+v_0)^3+p(u_0+v_0)+q=0 &\Leftrightarrow u_0^3+v_0^3+3u_0v_0(u_0+v_0)+p(u_0+v_0)+q=0\\ &\Leftrightarrow u_0^3+v_0^3+(3u_0v_0+p)(u_0+v_0)+q=0\\ &\Leftrightarrow u_0^3+v_0^3+q=0.\end{aligned}$$

Từ đó ta có $u_0^3+v_0^3=-q$. Vậy (u_0,v_0) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Chiều đảo. Giả sử x_0 có thể biểu diễn thành tổng hai số u_0,v_0, trong đó u_0,v_0 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Khi đó $u_0^3 + v_0^3 = -q$ và $3u_0v_0 + p = 0$. Thay $x = u_0 + v_0$ vào biểu thức $x^3 + px + q$ ta được

$$\begin{aligned} x_0^3 + px_0 + q &= (u_0 + v_0)^3 + p(u_0 + v_0) + q \\ &= u_0^3 + v_0^3 + 3u_0v_0(u_0 + v_0) + p(u_0 + v_0) + q \\ &= (u_0^3 + v_0^3 + q) + (3u_0v_0 + p)(u_0 + v_0) = 0. \end{aligned}$$

Vậy x_0 là nghiệm của phương trình $x^3 + px + q = 0$. Mệnh đề được chứng minh. ∎

Tiếp theo, ta trình bày (không chứng minh) mệnh đề dưới đây, được dùng để tìm ta các nghiệm của hệ phương trình nói trên nếu tìm được một nghiệm của hệ đó.

Mệnh đề 5.5. Hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

luôn có ba nghiệm. Hơn nữa, nếu (u_1, v_1) là một nghiệm của hệ trên thì hai nghiệm còn lại là $(u_1\varepsilon, v_1\varepsilon^2)$ và $(u_1\varepsilon^2, v_1\varepsilon)$, trong đó $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Với mệnh đề trên, từ việc tìm ra các nghiệm (u_0, v_0), ta sẽ suy ra nghiệm $y = u_0 + v_0$ của phương trình $y^2 + py + q = 0$, từ đó tìm được nghiệm x của phương trình bậc ba ban đầu.

Phương pháp Ferrari. Nếu như phương pháp Cardano dùng để giải phương trình bậc ba cần tính toán nhiều với số phức (đã được lược bỏ ở Chương trình phổ thông 2018) thì phương pháp Ferrari giải phương trình bậc bốn không sử dụng nhiều kiến thức về số phức mà chỉ đơn thuần là biến đổi đại số, đưa về giải phương trình bậc hai.

Không mất tính tổng quát, xét phương trình bậc bốn đơn khởi $x^3 + ax^3 + bx^3 + cx + d = 0$. Ta có biến đổi sau

$$x^4 + ax^3 = \left(x^4 + 2 \cdot \frac{ax}{2} \cdot x^2 + \frac{a^2x^2}{4}\right) - \frac{a^2x^2}{4} = \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 - \frac{a^2x^2}{4}.$$

Từ đó phương trình ban đầu trở thành

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

Với $y \in \mathbb{R}$ bất kì, ta có

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + \frac{ax}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d + 2y\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) + y^2 \\ \Leftrightarrow\ &\left(x^3 + \frac{ax}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)x^2 + (ay - c)x + (y^2 - d). \quad (1) \end{aligned}$$

Ta chọn y sao cho vế phải của (1) là một bình phương đúng, nghĩa là

$$(ay - c)^2 + (a^2 - 4b + 8y)(y^2 - d) = 0. \quad (2)$$

Thay một nghiệm của (2) vào (1), ta có phương trình

$$f^2(x) = g^2(x),$$

trong đó $\deg f = 2$ và $\deg g = 1$. Từ đó ta có các phương trình bậc hai

$$f(x) = g(x) \text{ và } f(x) = -g(x).$$

Giải các phương trình bậc hai trên, ta được các nghiệm của phương trình ban đầu.

Nhận xét:
Ở (2), việc tìm giá trị y thỏa mãn tương đương với việc giải một phương trình bậc ba ẩn y hệ số thực, và việc giải phương trình này được giải quyết triệt để bằng *Phương pháp Carnado* đã được trình bày ở trên.

C Các bài toán đánh giá nghiệm của phương trình bậc hai bằng biệt thức

Liên quan đến tam thức bậc hai, có khá nhiều bài toán liên quan đến đánh giá nghiệm dựa trên biệt thức của nó. Ta xét các bài toán dưới đây, với lưu ý rằng trong một số bài toán, ta nói *biệt thức* của biểu thức $ax^2 + bx + c$ là $\Delta = b^2 - 4ac$ mà không nhất thiết $a \neq 0$.

Ví dụ 5.1. Gọi D là biệt thức của một tam thức bậc hai có hệ số bậc hai monic (có hệ số bậc cao nhất bằng 1). Giả sử $D > 0$, khi đó hãy xác định số nghiệm của đa thức $Q(x) = P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right)$.

Lời giải: Giả sử $P(x) = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{R})$, khi đó $D = b^2 - 4c$. Ta có

$$\begin{aligned} Q(x) = P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) &= x^2 + bx + c + \left(x + \sqrt{D}\right)^2 + b\left(x + \sqrt{D}\right) + c \\ &= 2x^2 + 2\left(b + \sqrt{D}\right)x + 2c + D + b\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Ta có $Q(x)$ là một tam thức bậc hai có biệt thức bằng

$$4\left(b + \sqrt{D}\right)^2 - 8\left(2c + D + b\sqrt{D}\right) = 4\left(b^2 - 4c - D\right) = 0.$$

Vậy đa thức $Q(x)$ có nghiệm kép. ■

Ví dụ 5.2. Cho các số thực khác không a, b, c. Chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình dưới đây không có nghiệm thực

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + 2c &= 0, \\ bx^2 + 2cx + 2a &= 0, \\ cx^2 + 2ax + 2b &= 0. \end{aligned}$$

Lời giải: Giả sử cả ba phương trình trên đều có nghiệm. Từ đó các biệt thức tương ứng phải dương. Từ đó ta có

$$b^2 \geq 2ac > 0,\ c^2 \geq 2ab > 0,\ a^2 \geq 2bc > 0.$$

Nhân vế theo vế ta được $a^2b^2c^2 \geq 8a^2b^2c^2 > 0$ hay $a^2b^2c^2 \leq 0$, vô lí vì $a, b, c \neq 0$. Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.3 (Russian Mathematical Olympiad 2013).

Cho các số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh rằng ít nhất hai trong ba phương trình dưới đây có nghiệm

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b) &= x - c, \\ (x-c)(x-a) &= x - b, \\ (x-c)(x-b) &= x - a. \end{aligned}$$

Lời giải: Đặt $f(x) = (x-a)(x-b)-(x-c)$, $g(x) = (x-c)(x-a)-(x-b)$, $h(x) = (x-c)(x-b)-(x-a)$. Giả sử các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ đều không có nghiệm thực, khi đó $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó ta có

$$\begin{cases} \Delta_{f(x)} < 0 \\ \Delta_{g(x)} < 0 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} (a+b+1)^2 < 4(c+ab) \\ (a+c+1)^2 < 4(b+ac) \end{cases}.$$

Từ đó biến đổi ta được $(a-b+1)^2 < 4(c-b)$ và $(c-a-1)^2 < 4(b-c)$, vô lí vì $c-b$ và $b-c$ không thể cùng âm. Vậy ít nhất hai phương trình ở đề bài có nghiệm. ■

Ví dụ 5.4 (Saint Petersburg Mathematical Olympiad 2013).

Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Biết rằng không có phương trình nào trong các phương trình dưới đây có nhiều hơn một nghiệm thực:

$$x^2 - a_1x + a_2 = 0,\ x^2 - a_2a + a_3 = 0,\ \ldots,\ x^2 - a_{10}x + a_1 = 0.$$

Chứng minh rằng với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, ta có $a_i \leq 4$.

Lời giải: Từ giả thiết suy ra các biệt thức của các tam thức bậc hai đều bé hơn hoặc bằng 0. Từ đó ta có

$$a_1^2 \leq 4a_2,\ a_2^2 \leq 4a_3,\ \ldots,\ a_{10}^2 \leq 4a_1.$$

Giả sử tồn tại một số a_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$) lớn hơn 4. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 > 4$. Từ các bất đẳng thức ở trên ta lần lượt suy ra $a_2 > a_1 > 4$, tiếp theo là $a_3 > a_2 > 4$ ... Tiếp tục như vậy, ta sẽ có $a_1 > a_{10} > a_9 > \ldots > a_1 > 4$, mâu thuẫn. Từ đó ta có $a_i \leq 4$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. ■

Ví dụ 5.5 (A.Golovanov). Cho a, b, c là các số thực khác 0 và giả sử rằng phương trình $ax + \dfrac{c}{x} = b$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình dưới đây có nghiệm thực.

$$ax + \frac{c}{x} = b - 1,\ ax + \frac{c}{x} = b + 1.$$

Lời giải: Giả sử phản chứng, phương trình $ax + \dfrac{c}{x} = b$ có nghiệm nhưng cả hai phương trình

$$ax + \frac{c}{x} = b - 1,\ ax + \frac{c}{x} = b + 1$$

đều vô nghiệm. Ta viết lại ba phương trình trên lần lượt dưới dạng

$$ax^2 - bx + c = 0,\ ax^2 - (b-1)x + c = 0,\ ax^2 - (b+1)x + c = 0.$$

Do $a \neq 0$ nên từ giả thiết phản chứng, ta có

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ (b-1)^2 - 4ac < 0 \\ (b+1)^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

Cộng hai vế của hai bất phương trình cuối với nhau, ta được $2b^2 + 2 - 8ac < 0$ hay $b^2 - 4ac < -1$ (mâu thuẫn với $b^2 - 4ac \geq 0$). Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.6. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 và $f(x) = ax^2 + bx + c$ là một đa thức thỏa mãn $f(f(1)) = 1$ và phương trình $f(x) = x$ có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng $f(1) = 1$.

Lời giải: Đặt $f(1) = m$, khi đó $f(f(1)) = f(m) = 1$. Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c = m \\ am^2 + bm + c = 1. \end{cases}$$

Từ đó từ vế theo vế và biến đổi, ta được

$$(m - 1)(am + a + b + 1) = 0.$$

Từ đó suy ra $m = 1$ hoặc $b = -(am + a + 1)$. Giả sử $m \neq 1$, khi đó $b = -(am + a + 1)$, khi đó $a = 1 + m + am$. Từ đó biệt thức của đa thức $f(x) - x$ là

$$(b - 1)^2 - 4ac = (am - a)^2 + 4.$$

Do phương trình $f(x) = x$ có nghiệm nguyên nên biệt thức trên phải là số chính phương, từ đó $(am - a)^2 + 4 = d^2$ với số nguyên d nào đó. Từ đó ta có

$$(|d| - |am - a|)(|d| + |am - a|) = 4.$$

Nhận thấy cả hai nhân tử có cùng tính chẵn lẻ, ta suy ra cả hai đều phải là số chẵn, đồng thời là số nguyên dương chẳn. Từ đó ta có

$$|d| - |am - a| \geq 2.$$

Ta có $|am - m| = |a| |m - 1| \geq 1$ (do $m \neq 1$), từ đó $|d| \geq 3$. Tuy nhiên

$$4 = (|d| - |am - a|)(|d| + |am - a|) \geq 2(|d| + |am - a|) > 4.$$

Từ đó ta có điều vô lí và do đó $m = 1$, tức là $f(1) = 1$. ■

Ví dụ 5.7 (Saint Petersburg Mathematical Olympiad 2009).
Tồn tại hay không các tam thức bậc hai f, g, h sao cho các đa thức

$$f(x),\ g(x),\ h(x),\ f(x) + g(x),\ g(x) + h(x),\ f(x) + h(x)$$

đều có biệt thức bằng 1 (giả sử các đa thức nói trên đều có bậc bằng 2).

Lời giải: Kí hiệu biệt thức của đa thức $P(x)$ là D_P. Ta có nhận xét sau:

$$D_{f+g+h} = D_{f+g} + D_{g+h} + D_{f+h} - D_f - D_g - D_h.$$

Thật vậy, giả sử $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, $h(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$ $(a_1, a_2, a_3 \neq 0)$. Từ đó ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} &(b_1 + b_2 + b_3)^2 - 4(a_1 + a_2 + a_3)(c_1 + c_2 + c_3) \\ &= \sum_{\text{cyc}}(b_1 + b_2)^2 - 4\sum_{\text{cyc}}(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) - \sum_{\text{cyc}} b_1^2 + 4\sum_{\text{cyc}} a_1c_1. \end{aligned}$$

Từ đó nhận xét được chứng minh.
Trở lại bài toán, áp dụng nhận xét trên ta có $D_{f+g+h} = 0$, do đó $f(x) + g(x) + h(x) = k(x - x_0)^2$ với $k \neq 0$ và $x_0 \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra

$$f(x + x_0) + g(x + x_0) + h(x + x_0) = kx^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giả sử $f(x+x_0) = ax^2+bx+c$, $g(x+x_0)+h(x+x_0) = Ax^2+Bx+C$. Đồng nhất hệ số, ta được

$$a+A=k,\ B+b=0,\ c+C=0.$$

Từ đó suy ra $1 = B^2-4AC = b^2+4(k-a)c = b^2-4ac+kc = 1+kc$, suy ra $c=0$ (do $k\neq 0$). Một cách tương tự, ta chứng minh được hệ số tự do của $f(x+x_0), g(x+x_0), h(x+x_0)$ đều bằng 0. Từ đó giá trị tuyệt đối của hệ số trước x của $f(x+x_0), g(x+x_0), h(x+x_0)$ đều bằng 1, do đó tổng của chúng không thể có hệ số trước x bằng 0. Từ đó ta có điều vô lí và do đó không tồn tại các tam thức bậc hai $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn điều kiện đề bài. ■

Ví dụ 5.8 (Saint Petersburg Mathematical Olympiad 2013).

Cho hai đa thức bậc hai $f(x)$ và $g(x)$. Biết rằng phương trình $f(x)g(x)=0$ có đúng một nghiệm thực và phương trình $f(x)+g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $f(x)-g(x)=0$ không có nghiệm thực.

Lời giải: Xét hai trường hợp

- **Trường hợp 1:** Cả hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có chung nghiệm duy nhất x_0. Khi đó

$$f(x) = a(x-x_0)^2,\ g(x) = b(x-x_0)^2.$$

  Từ đó ta có $f(x)+g(x) = (a+b)(x-x_0)^2$. Nếu $a+b=0$ thì $f(x)+g(x)$ có vô số nghiệm. Do đó $a+b\neq 0$ và khi đó $f(x)+g(x)$ có đúng một nghiệm, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.
- **Trường hợp 2:** Đa thức $f(x)$ có nghiệm kép và đa thức $g(x)$ vô nghiệm. Hơn nữa $f(x)+g(x)$ có hai nghiệm phân biệt ta có $\Delta_f = 0, \Delta_g < 0$ và $D_{f+g} > 0$. Ta chứng minh được đẳng thức dưới đây

$$\Delta_{f+g} + \Delta_{f-g} = 2\left(\Delta_f + \Delta_g\right).$$

  Từ đó ta có được $\Delta_{f-g} < 0$, từ đó phương trình $f(x)-g(x)=0$ vô nghiệm.

■

D Các bài toán đánh giá nghiệm liên quan đến định lý Viete

Liên quan đến đánh giá nghiệm, đối với các đa thức bậc hai, trong một số trường hợp, ta sử dụng các kết quả dưới đây, được suy ra từ *Định lý 5.6*

Định lí 5.7. Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$. Khi đó

$$af(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = b^2-4ac\leq 0.$$

Định lí 5.8 (Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai).

Nếu tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $af(\alpha) < 0$ thì phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < \alpha < x_2$. Nếu tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $af(\alpha)\leq 0$ thì phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm.

Hệ quả 1.3. Nếu tồn tại $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sao cho $f(\alpha)\cdot f(\beta)\leq 0$ thì phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm. Trong trường hợp tìm được α,β thỏa $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ thì phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt và $\Delta > 0$.

Trước hết, ta xét các ví dụ liên quan đến đa thức bậc hai.

Ví dụ 5.9 (Singapore Mathematical Olympiad 2012).

Cho a,b,c,d là các số thực dương phân biệt thỏa mãn

$$\left(a^{2012}-c^{2012}\right)\left(a^{2012}-d^{2012}\right) = 2011,$$
$$\left(b^{2012}-c^{2012}\right)\left(b^{2012}-d^{2012}\right) = 2011.$$

Tính giá trị của biểu thức $(cd)^{2012} - (ab)^{2012}$.

Lời giải: Đặt $a^{2012} = A, b^{2012} = B, c^{2012} = C, d^{2012} = D$. Từ giả thiết ta suy ra A, B là hai nghiệm của phương trình

$$(x - C)(x - D) = 2011, \text{ hay } x^2 - (C + D)x + CD - 2011 = 0.$$

Từ đó, theo Định lý Viete, ta có

$$A + B = C + D \text{ và } AB = CD - 2011.$$

Từ đó ta được $(cd)^{2012} - (ab)^{2012} = CD - AB = 2011$. ■

Ví dụ 5.10 (Moscow Mathematical Olympiad 2010).

Biết rằng tổng của bất kì hai trong ba đa thức

$$x^2 + ax + b,\ x^2 + cx + d,\ x^2 + ex + f$$

đều là các đa thức không có nghiệm thực. Tổng của cả ba đa thức có thể là một đa thức có nghiệm thực hay không?

Lời giải: Câu trả lời là không. Thực vậy, đặt

$$f(x) = x^2 + ax + b,\ g(x) = x^2 + cx + d,\ h(x) = x^2 + ex + f.$$

Do tổng của hai đa thức bất kì trong ba đa thức trên không có nghiệm thực, ta có

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &> 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) + h(x) &> 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) + h(x) &> 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Từ đó dễ dàng suy ra $f(x) + g(x) + h(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó tổng của ba đa thức nói trên là một đa thức không có nghiệm thực. ■

Ví dụ 5.11 (Saint Petersburg Mathematical Olympiad).

Biết rằng đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ có nghiệm trong $(0;1)$. Giả sử rằng tồn tại $p \in (0;1)$ với $p \neq \frac{-a}{2}$ thoa mãn $f(b - f(p)) > f(p)$. Chứng minh rằng tồn tại các số thực phân biệt $p, q \in (0;1)$ thỏa mãn $f(p) = f(q)$.

Lời giải: Giả sử $h(x) = x^2 + cx + d$ là một đa thức monic bất kì. Khi đó

$$h(h(0)) = h(d) = d(d + c + 1) = h(0)h(1).$$

Áp dụng cho $g(x) = f(x) - f(p) = x^2 + ax + (b - f(p))$, ta được

$$0 < f(b - f(p)) - f(p) = g(b - f(p)) = g(0)g(1).$$

Do $g(p) = 0$, $g(x)$ có nghiệm thuộc $(0;1)$. Kết hợp với $g(0)g(1) > 0$ ta suy ra hoặc $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;1)$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép thuộc $(0;1)$. Tuy nhiên vì $p \neq \frac{-a}{2}$ nên p không là nghiệm kép của $g(x)$. Do đó, tồn tại $q \neq p$ sap cho $g(p) = 0$, do đó

$$0 = g(q) = f(q) - f(p).$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.12. Với mỗi số nguyên n, gọi a_n, b_n là hai nghiệm của phương trình $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = \frac{1}{(1+a_3)(1+b_3)} + \frac{1}{(1+a_4)(1+b_4)} + \ldots + \frac{1}{(1+a_{20})(1+b_{20})}.$$

Lời giải: Đặt $x^2 + (2n+1)x + n^2 = (x-a_n)(x-b_n)$. Thay $x = -1$ vào đẳng thức, ta được $(1+a_n)(1+b_n) = n^2 - 2n$. Từ đó ta có

$$S = \sum_{n=3}^{20} \frac{1}{n^2-2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{20}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) = \frac{531}{760}.$$

■

Tiếp theo, ta xét các ví dụ liên quan đến áp dụng *Định lý Viete* cho các nghiệm của phương trình bậc ba, bậc bốn.

Ví dụ 5.13. Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = x^3 + ax^2 + (4b - a^2)x + 4ab - a^3 - 8c$ cũng có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải: Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm phân biệt của đa thức đã cho. Theo Định lý Viete, ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,\ x_1x_2x_3 = -c.$$

Khi đó, đặt $y_1 = x_2 + x_3 - x_1, y_2 = x_1 + x_3 - x_2, y_3 = x_1 + x_2 - x_3$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 = -a \\
&y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \sum (x_1 + x_2 - x_3)(x_3 + x_1 - x_2) \\
&= 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 4b - a^2 \\
&y_1y_2y_3 = (x_2 + x_3 - x_1)(x_1 + x_3 - x_2)(x_1 + x_2 - x_3) \\
&= 4(-a)b - (-a)^3 - 8(-c) = a^3 + 8c - 4ab.
\end{aligned}$$

Từ đó theo định lý Viete đảo, $Q(x)$ có ba nghiệm là y_1, y_2, y_3, các nghiệm này là phân biệt do x_1, x_2, x_3 phân biệt. ■

Ví dụ 5.14. Biết rằng phương trình $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ có ba nghiệm thực dương. Chứng minh rằng

a) $0 < 3ab \le 1$;
b) $b \ge 9a$;
c) $b \ge \sqrt{3}$.

Lời giải: Hiển nhiên $a \ne 0$. Gọi r, s, t là các nghiệm của phương trình bậc ba đã cho.

a) Từ Định lý Viete, ta có

$$r + s + t = \frac{1}{a},\ rs + st + tr = \frac{b}{a},\ rst = \frac{1}{a}.$$

Do $r, s, t > 0$ nên từ các đẳng thức trên, ta được $a < 0$ và $b > 0$, do đó $ab > 0$. Mặt khác, từ bất đẳng thức

$$(r + s + t)^2 \ge 3(rs + st + tr),$$

ta suy ra $\dfrac{1}{a^2} \ge 3 \cdot \dfrac{b}{a}$, từ đó $0 < 3ab \le 1$.

b) Từ bất đẳng thức $(r+s+t)(rs+st+tr) \geq 9rst$ cho ta $\dfrac{b}{a^2} \geq \dfrac{9}{a}$, từ đó $g \geq 9a$.

c) Từ bất đẳng thức $(rs+st+tr)^2 \geq 3rst(r+s+t)$ cho ta $\dfrac{b^2}{a^2} \geq \dfrac{3}{a^2}$. Từ đó $b^2 \geq 2$ và do $b \geq 0$, ta thu được $b \geq \sqrt{3}$.

■

Ví dụ 5.15. Biết rằng phương trình $x^3 + \sqrt{3}(a-1)x^2 - 6ax + b = 0$ có ba nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$|b| \leq |a+1|^3.$$

Lời giải: Gọi r, s, t là các nghiệm của phương trình đã do. Theo Định lý Viete, ta có

$$r+s+t = -\sqrt{3}(a-1),\ rs+st+tr = -6a,\ rst = -b.$$

Từ đó ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{|b|} = \sqrt[3]{|r|\cdot|s|\cdot|t|} &\leq \sqrt{\frac{r^2+s^2+t^2}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{(r+s+t)^2 - 2(rs+st+tr)}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{3(1-a)^2 + 12a}{3}} = |a+1|.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có $|b| \leq |a+1|^3$. ■

Ví dụ 5.16 (Vladimir Cerbu - Mathematical Reflections S455).
Gọi a và b là hai số thực thỏa mãn phương trình $f(x) = x^4 - x^3 + ax + b$ có tất cả các nghiệm đều là số thực. Chứng minh rằng $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{3}{16}$.

Lời giải: Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm (không nhất thiết phân biệt) của đa thức $f(x)$ nói trên. Từ Định lý Viete, ta có

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \\
x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 &= 0 \\
-x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right) &= a \\
x_1x_2x_3x_4 &= b.
\end{aligned}$$

Hai phương trình đầu tiên cho ta $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1$ Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$1 = x_1^2 + (x_2^2+x_3^2+x_4^2) \geq x_1^2 + \frac{1}{3}(x_2+x_3+x_4)^2 = x_1^2 + \frac{1}{3}(1-x_1)^2.$$

Từ đó suy ra $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$. Tương tự, ta suy ra $-\dfrac{1}{2} \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$. Từ đó ta có

$$f(1) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 0.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{3}{16}$ tương đương với $a \geq 2b$.
Xét $b \leq 0$, khi đó từ $a+b \geq 0$ suy ra $a \geq 0$ và khi đó hiển nhiên $a \geq 2b$.
Xét $b > 0$ hay $x_1x_2x_3x_4 > 0$, khi đó ta có

$$a \geq 2b \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \leq -2.$$

Rõ ràng không thể có trường hợp cả bốn nghiệm đều dương hoặc đều âm. Xét trường hợp có hai nghiệm dương và hai nghiệm âm, giả sử $x_1, x_2 > 0$ và $x_3, x_4 < 0$. Khi đó $-\dfrac{1}{2} \leq x_4 \leq 1$ nên ta có $2x_4 + 1 \geq 0$ và $1 - x_4 \geq 0$, hơn nữa $x_1x_2x_3 < 0$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
x_4^2(1-x_4) \geq x_1x_2x_3(2x_4+1) \quad & \Leftrightarrow x_4^2(x_1 + x - 2 + x_3) - x_1x_2x_3 \geq 2x_1x_2x_3x_4 \\
& \Leftrightarrow \frac{x_4(x_1+x_2+x_3)}{x_1x_2x_3} - \frac{1}{x_4} \geq 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{-x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}{x_1x_2x_3} - \frac{1}{x_4} \geq 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \leq 2.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh ■

Ví dụ 5.17 (Great Britain, IMO Longlisted 1987).

Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ có tất cả các nghiệm đều thực thì $ab \leq 0$.

Lời giải: Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm thực của phương trình bậc bốn nói trên. Khi đó từ Định lý Viete, ta có đẳng thức

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$ (ngược lại, nếu tổng ba trong bốn nghiệm bất kì bằng 0 thì $a = 0$ và hiển nhiên $ab \leq 0$). Khi đó ta có

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_4(x_1+x_2+x_3) = 0 \Leftrightarrow x_4 = -\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1+x_2+x_3}.$$

Cũng từ Định lý Viete, ta chứng minh được

$$\begin{aligned}
a &= -x_4 - (x_1+x_2+x_3) = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1+x_2+x_3} - (x_1+x_2+x_3), \\
b &= -x_4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 = \frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2}{x_1+x_2+x_3} - x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
ab &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 x_i\right)^2} \left[\left(\sum_{cyc} x_1x_2\right)^2 - x_1x_2x_3 \sum_{i=1}^3 x_i\right] \left[\sum_{cyc} x_1x_2 - \left(\sum_{i=1}^3 x_i\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 x_i\right)^2} \left(\sum_{cyc} x_1^2x_2^2 + \sum_{cyc} x_1^2x_2x_3\right)\left(-\sum_{i=1}^3 x_i^2 - \sum_{cyc} x_1x_2\right) \\
&= -\frac{1}{4(x_1+x_2+x_3)^2} \cdot \sum_{cyc} (x_1x_2 + x_2x_3)^2 \cdot \sum_{cyc} (x_1+x_2)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Vậy $ab \le 0$ và ta có điều phải chứng minh. ■

E Các định lý về đánh giá nghiệm

1 Các định lý về đánh giá nghiệm

Trong phần này tác giả trình bày một số định lý về đánh giá nghiệm, được sử dụng trong một số trường hợp cần chặn giá trị của nghiệm đa thức. Các định lý này có thể áp dụng để giới hạn khoảng giá trị của nghiệm. Ngoài ra, nó còn có thể được sử dụng để chứng minh phương trình không có nghiệm thực, bằng cách phản chứng có nghiệm và từ các định lý đánh giá nghiệm để suy ra điều vô lý.

Định lí 5.9. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ với

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ với }_n \neq 0.$$

Gọi α là một nghiệm thực (nếu có) của $P(x)$. Khi đó

a) $|\alpha| \le 1 + \max\left\{\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|, k = \overline{0, n-1}\right\}$;

b) $|\alpha| \le p + \max\left\{\left|\dfrac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right|, k = \overline{0, n-1}\right\}$, với p là số dương tùy ý;

c) $|\alpha| \le 2\max\left\{\sqrt[k]{\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|}, k = \overline{0, n-1}\right\}$.

d) $|\alpha| \le \left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \max\left\{\sqrt[k-1]{\left|\dfrac{a_k}{a_{n-1}}\right|}, k = \overline{0, n-2}\right\}$.

Chứng minh:

a) Ta có $P(x) = a_n x^n \cdot \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \dfrac{a_0}{a_n x^n}\right)$.

Đặt $A = \max\left\{\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|, k = \overline{0, n-1}\right\}$. Xét các trường hợp

- Với nghiệm α mà $|\alpha| \le 1$, hiểm nhiên ta có $|\alpha| \le 1 + A$;
- Với nghiệm α mà $|\alpha| > 1$, ta có

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow -1 = \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha^n} \\ &\Leftrightarrow 1 \le A\left(\frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\alpha^2|} + \ldots + \frac{1}{|\alpha^n|}\right) = \frac{A}{|\alpha|} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{|x^n|}}{1 - \dfrac{1}{|\alpha|}} \\ &\Leftrightarrow 1 \le \frac{A}{|\alpha| - 1} \Leftrightarrow |\alpha| \le 1 + A. \end{aligned}$$

b) Với $p > 0$ vất kì, ta có

$$\frac{1}{p_n} P(x) = a_n \left(\frac{1}{p}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{p}\left(\frac{x}{p}\right)^{n-1} \ldots + \frac{a_n}{p}.$$

Theo kết quả ở ý a, ta có

$$\frac{|\alpha|}{p} \le 1 + \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_n p^k}\right|, k = \overline{0, n-1}\right\} \Leftrightarrow |\alpha| \le p + \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right|, k = \overline{0, n-1}\right\}.$$

c) Đặt $p = \max \sqrt[k]{\frac{a_k}{a_n}}$, khi đó $\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \le pk$, suy ra $\left|\frac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right| \le p$. Do đó $\max \left|\frac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right| \le p$.

Theo kết quả câu b, ta có

$$|\alpha| \le p + \max \left|\frac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right| \le 2p = 2\max \sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|}.$$

d) Đặt $p = \max \sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right|}$, khi đó $|a_k| \le a_{n-1} \cdot p^{k-1}$. Do đó

$$\left|\frac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \Rightarrow \max \left|\frac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|.$$

Theo kết quả câu b, ta được

$$|\alpha| \le p + \max \left|\frac{a_k}{a_n \cdot p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \max \sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right|}.$$

■

Định lí 5.10 (Cauchy). Giả sử $P(x) = x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n \in \mathbb{R}[x]$ với các số thực không âm a_k $(k = \overline{1, n})$ và ít nhất một trong số chúng khác không. Khi đó, đa thức $P(x)$ có duy nhất một nghiệm dương α, còn các nghiệm γ khác (nếu có) đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá α.

Chứng minh: Đặt $Q(x) = \frac{P(x)}{x^n} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} - 1$. Nếu $x \neq 0$ thì phương trình $P(x) = 0$ tương đương với phương trình $Q(x) = 0$. Mặt khác, dễ dàng chứng minh được khi x biến thiên từ 0 đến $+\infty$ thì $Q(x)$ đơn điệu giảm từ $+\infty$ đến -1. Vậy nếu $x > 0$ thì phương trình $Q(x) = 0$ có đúng một nghiệm, gọi là α. Từ đó ta có

$$Q'(x) = -\frac{P'(x)x^n - nx^{n-1}P(x)}{x^{2n}} \text{ và } P(\alpha) = 0.$$

Từ đó suy ra

$$-\frac{P'(\alpha)}{\alpha^n} = Q'(\alpha) = -\frac{a_1}{\alpha^2} - \frac{2a_2}{\alpha^3} - \ldots - \frac{na_n}{\alpha^{n+1}} < 0.$$

Vậy α là nghiệm đơn của $P(x)$. Giả sử γ là một nghiệm khác của $P(x)$. Đặt $a = |\gamma|$ và giả sử $a > \alpha$. Vì $Q(x)$ đơn điệu giảm và $a > \alpha$ nên $f(a) > 0$. Mặt khác, ta có

$$\gamma^n = a_1\gamma^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Do đó $a^n \le a_1a^{n-1} + \ldots + a_n$, từ đó $P(a) < 0$, vô lý. Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

2 Một số bài toán đánh giá nghiệm, số nghiệm của đa thức

Ví dụ 5.18. Với số nguyên dương n, chứng minh rằng nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ là một nghiệm của đa thức

$$f(x) = n!x^n + (n-1)!x^{n-1} + \ldots + 1!x + 1$$

thì $-2 < \alpha < 0$.

Lời giải: Hiển nhiên $\alpha < 0$ vì nếu $\alpha \geq 0$ thì $f(\alpha) > 0$. Theo *Định lý 5.9* ta có

$$|\alpha| \leq 1 + \max\left\{\left|\frac{(n-k)!}{n!}\right| \mid r = 1, 2, \ldots, n\right\} < 2.$$

Từ đó $\alpha > -2$ và ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.19. Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + 1 = 7c$. Xét hai đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $Q(x) = x^2 + 2x + d$. Giả sử $P(x)$ có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt). Chứng minh rằng tích ba nghiệm của $P(x)$ không vượt quá -1 và đa thức $P(Q(x))$ có tối đa bốn nghiệm thực phân biệt.

Lời giải: Giả sử $P(x)$ có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3. Vì $a, b, c > 0$ nên $x_1, x_2, x_2 < 0$. Đặt $u = -x_1, v = -x_2, t = -x_3$, khi đó $u, v, t > 0$ và $P(x) = (x+u)(x+v)(x+t)$.
Từ $c = P(0) = uvt$ và $8c = 1 + a + b + c = (1+u)(1+v)(1+t)$ ta được

$$8c = (1+u)(1+v)(1+t) \geq 8\sqrt{uvt} = 8\sqrt{c}.$$

Do đó $c \geq 1$, suy ra $x_1x_2x_3 = -c \leq -1$.
Ta có $P(Q(x)) = (Q(x)+u)(Q(x)+v)(Q(x)+t)$. Từ đó phương trình $P(Q(x)) = 0$ tương đương với

$$(x^2 + 2x + d + u)(x^2 + 2x + d + v)(x^2 + 2x + d + t) = 0.$$

Giả sử đa thức $P(Q(x))$ có nhiều hơn 4 nghiệm thực phân biệt thì khi đó trong ba phương trình

$$x^2 + 2x + d + u = 0,\ x^2 + 2x + d + v = 0,\ x^2 + 2x + d + t = 0,$$

có hai phương trình có hai nghiệm phân biệt, phương trình còn lại có ít nhất một nghiệm, đồng thời các nghiệm này không được trùng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử các phương trình $x^2 + 2x + d + u = 0$ và $x^2 + 2x + d + v = 0$ đều có hai nghiệm phân biệt còn $x^2 + 2x + d + t = 0$ có ít nhất một nghiệm, khi đó từ điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai ta được $1 > d + u, 1 > d + v$ và $1 \geq d + t$. Từ đó suy ra

$$1 > (d+u)(d+v)(d+t) > uvt = c \geq 1.$$

Từ đó suy ra điều vô lý, suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.20 (Olympic 30 tháng 4 năm 2024 - Lớp 10).

Cho hai đa thức $P(x) = x^9 - x^5 + x - 4$ và $Q(x) = x^{13} - 4x^4 + 2x - 4$. Gọi x_0 là một nghiệm thực của đa thức $P(x)$.

a) Chứng minh $0 < x_0 \leq \sqrt[5]{4}$.

b) Chứng minh $\sqrt[6]{2} < Q(x_0) < \sqrt[5]{4}$.

Lời giải:

a) Do x_0 là nghiệm của $P(x)$ nên $4 = x_0(x_0^8 - x_0^4 + 1)$, do đó $x_0 > 0$.
Ta có $x_0^5 + 4 = x_0^9 + x_0 \geq 2x_0^5$, suy ra $x_0 \leq \sqrt[5]{4}$.

b) Ta có $x_0^8 - x_0^4 + 1 = \dfrac{4}{x_0}$, suy ra

$$\frac{x_0^{12}+1}{4} = \frac{x_0^4+1}{x_0} = x_0^3 + \frac{1}{3x_0} + \frac{1}{3x_0} + \frac{1}{3x_0} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{27}} > \frac{4}{3}.$$

Từ đó suy ra $x_0^{12} > \dfrac{13}{3} > 4$, do đó $x_0 > \sqrt[6]{2}$.

Mặt khác, ta có $Q(x) = (x^4+1)P(x) + x$, do đó $\sqrt[6]{2} < Q(x_0) \le \sqrt[5]{4}$. Hơn nữa $\sqrt[5]{4}$ không là nghiệm của $P(x)$, do đó ta được $\sqrt[6]{2} < Q(x_0) < \sqrt[5]{4}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

■

Ví dụ 5.21 (Olympic 30 tháng 4 năm 2024 - Lớp 11).

Cho hai đa thức $P(x) = x^4 - 2x - 1$ và $Q(x) = x^6 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 1$.

a) Chứng minh đa thức $P(x)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

b) Gọi hai nghiệm thực phân biệt của $P(x)$ là u và v. Chứng minh uv là một nghiệm của $Q(x)$.

Lời giải:

a) Ta có $P'(x) = 4x^3 - 2$; $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, hơn nữa $P\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right) < 0$. Do đó $P(x)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

b) Gọi hai nghiệm thực phân biệt của $P(x)$ là u và v. Dễ thấy $u, v \neq 0$ và $u^4 = 2u+1, v^4 = 2v+1$. Đặt $\alpha = uv$, khi đó

$$\alpha^3 = \left(\frac{1}{u}+2\right)\left(\frac{1}{v}+2\right) = \frac{1}{\alpha} + 2\cdot\frac{u+v}{\alpha} + 4 \Rightarrow \alpha(\alpha^3-4) = 1 + 2(u+v). \quad (*)$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
&2(u-v) = u^4 - v^4 = (u-v)(u^3+v^3+uv(u+v))\\
&\Rightarrow 2 = \left(\frac{1}{u}+2\right) + \left(\frac{1}{v}+2\right) + uv(u+v) = 4 + \frac{u+v}{\alpha} + \alpha(u+v) = 4 + (u+v)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\\
&\Rightarrow u+v = \frac{-2\alpha}{\alpha^2+1}.
\end{aligned}$$

Thay vào (*) ta được $\alpha^4 - 4\alpha = 1 - \dfrac{4\alpha}{\alpha^2+1}$, suy ra $\alpha^6 + \alpha^4 - 4\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0$. Vậy $\alpha = uv$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

■

F Đa thức hệ số nguyên. Nghiệm nguyên của đa thức

Liên quan đến các bài toán về nghiệm nguyên (hay hữu tỉ) của đa thức hệ số nguyên (hay hữu tỉ), do các biểu thức khi số đều có giá trị là số nguyên nên ta có thể vận dụng linh hoạt các tính chất số học để chứng minh, mà điển hình nhất là các tính chất liên quan đến ước và bội, chia hết.

Định lí 5.11. Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $a_n \neq 0$ (tức là $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$). Nếu tồn tại số $\alpha = \dfrac{p}{q}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$, trong đó $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, $(p,q) = 1$ thì ta có $p \mid a_0$ và $q \mid a_n$.

Chứng minh: Vì $\dfrac{p}{q}$ là một nghiệm của $P(x)$ nên $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$. Do đó

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Nhân cả hai vế với q^n, ta được

$$a_n p^n + a_{n-1} a^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} a_n p^n = -\left(a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_0 q^n\right) \vdots\, q \\ a_0 q^n = -\left(a_n p^n + \ldots + a_1 p q^{n-1}\right) \vdots\, p \end{cases}$$

Mà p, q nguyên tố cùng nhau nên từ đó ta phải có $q \mid a_n$ và $p \mid a_0$. ■

Hệ quả 1.4.

- Mọi nghiệm nguyên của đa thức $P(x)$ đều là ước của hệ số tự do của $P(x)$.
- Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức đơn khởi (monic) hệ số nguyên đều là nghiệm nguyên.

> ***Nhận xét:***
> Định lý trên cho phép ta xác định được một tập hữu hạn các số hữu tỉ có thể là nghiệm của đa thức hệ số nguyên $P(x)$, từ đó có thể tìm tất cả các nghiệm hữu tỉ của $P(x)$ bằng cách thử từng giá trị.
> Nếu đa thức $P(x)$ có hệ số hữu tỉ thì bằng cách uy đồng mẫu các hệ số của $P(x)$, ta có thể đưa bài toán giải nghiệm hữu tỉ của $P(x)$ về bài toán giải nghiệm hữu tỉ của một đa thức hệ số nguyên.

Định lí 5.12. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Nếu $P(x)$ có nghiệm nguyên $x = a$ thì $P(x) = (x-a)Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là một đa thức có hệ số nguyên.

Ví dụ 5.22 (Thi tuyển sinh 10 chuyên Tin Hà Nội 2023-2024).

Cho đa thức $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2022x + 2023$. Chứng minh rằng $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải: Giả sử $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó do $f(x)$ monic nên nghiệm này phải là số nguyên và là ước của 2023. Do đó $a \in \{-1, -2023, -7, -17, -289, -119\}$. Thay các giá trị của a vào ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. ■

Ví dụ 5.23. Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên thỏa mãn $P(0)$ và $P(1)$ đều là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm nguyên.

Lời giải: Giả sử tồn tại số nguyên a là nghiệm của đa thức đa cho. Khi đó tồn tại đa thức $Q(x)$ hệ số nguyên sao cho $P(x) = (x-a)Q(x)$. Ta có

$$P(0) = (0-a)Q(0),\ P(1) = (1-a)Q(1).$$

Do $P(0), P(1)$ là các số lẻ nên $-a, 1-a$ cũng là các số lẻ, vô lý vì tính chẵn là của $-a$ và $1-a$ là khác nhau. Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.24 (HSG lớp 9 Tuyên Quang 2022-2023).

Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên. Chứng minh rằng $P(x)$ không có nghiệm nguyên trong các trường hợp sau

a) Tích $P(1) \cdot P(2) \cdot \ldots \cdot P(23)$ không chia hết cho 23.

b) Tích $P(Q(1)) \cdot P(Q(2)) \cdot \ldots \cdot P(Q(23))$ không chia hết cho 23, trong đó $Q(x) = x^3 - 1$.

Lời giải:

a) Giả sử đa thức $P(x)$ có nghiệm nguyên x_0, khi đó $P(x) = (x - x_0)R(x)$, trong đó $R(x)$ là đa thức hệ số nguyên.
Nhận xét rằng trong các số nguyên dương từ 1 đến 23, có đúng một số có cùng số dư với x_0 khi chia cho 23. Gọi số đó là a, khi đó ta có

$$P(a) = (a - x_0)R(a) \vdots 23 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

b) Tương tự câu a, bài toán được chứng minh nếu ta chỉ ra các số $Q(1), Q(2), \ldots, Q(23)$ có các số dư khi chia cho 23 là đôi một phân biệt, tức là chúng tạo thành một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo 23.
Thật vậy, giả sử tồn tại $1 \leq i < j \leq 23$ để $Q(i) \equiv Q(j) \pmod{23}$. Khi đó $i^3 - 1 \equiv j^3 - 1 \pmod{23}$ hay $i^3 \equiv j^3 \pmod{23}$.
Nếu $j = 23$ thì từ đó $i = 23$ (vô lí). Nếu $i < j < 23$ thì từ $i^3 \equiv j^3 \pmod{23}$ suy ra $i^{21} \equiv j^{21} \pmod{21}$. Hơn nữa theo *Định lý Fermat nhỏ* ta có $i^{22} \equiv j^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Từ đó chứng minh được $i \equiv j \pmod{23}$, tuy nhiên do $1 \leq i, j \leq 23$ nên dẫn đến $i = j$ (vô lí).
Từ đó lập luận tương tự câu a ta suy ra $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

■

Ví dụ 5.25 (Thi tuyển sinh 10 THPT chuyên Nghệ An 2023-2024).
Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$. Biết rằng $P(x)$ có hai nghiệm nguyên, đồng thời $|c| \leq 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Xác định đa thức $P(x)$.

Lời giải: Gọi hai nghiệm nguyên của $P(x) = x^2 + bx + c$ là u, v. Theo Định lý Viete, ta được $u + v = -b, uv = c$.
Vì $|P(9)|$ là số nguyên tố nên $|(9 - u)(9 - v)|$ là số nguyên tố, do đó $|9 - u| = 1$ hoặc $|9 - v| = 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $|9 - u| = 1$, khi đó tìm được $u = 8$ hoặc $u = 10$.

- **Trường hợp 1:** $u = 10$, khi đó vì $|uv| = |c| \leq 16$ nên $|v| \in \{0, 1\}$. Từ đó $v \in \{-1; 0; 1\}$. Mặt khác, $9 - 1 = 8, 9 - 0 = 9, 9 + 1 = 10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.
- **Trường hợp 2:** $u = 9$, khi đó vì $|uv| = |c| \leq 16$ nên $|v| \leq 2$. Thử các trường hợp ta nhận $v = 2$ hoặc $v = -2$, khi đó ta có tương ứng $(b, c) = (-10, 16)$ hoặc $(b, c) = (-6, -16)$.

Vậy $P(x) = x^2 - 10x + 16$ hoặc $P(x) = x^2 - 6x - 16$. ■

Ví dụ 5.26 (Trích THTT số 543). Cho hai đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = (c - b)x^2 + (c - a)x + a + b$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $b \neq c$. Biết rằng $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung. Chứng minh rằng $a + b + 2009c$ chia hết cho 3.

Lời giải: Ta có

$$f(x) - g(x) = (a + b - c)x^2 + (a + b - c)x - (a + b - c) = (a + b - c)(x^2 + x - 1).$$

Xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: $a + b - c = 0$, khi đó $a + b + 2009c = 2010c$ chia hết cho 3.

Trường hợp 2: $a + b - c \neq 0$, khi đó nghiệm chung x_0 của $f(x)$ và $g(x)$ là nghiệm của phương trình $x^2 + x - 1 = 0$, Phương trình này có hai nghiệm vô tỷ, do đó x_0 là số vô tỷ. Chia $f(x)$ cho đa thức $x^2 + x - 1$, ta được

$$f(x) = (x^2 + x - 1)q + mx + n, \quad \text{với } m, n, q \in \mathbb{Z}.$$

Thay $x = x_0$ vào ta được $0 = mx_0 + n$, do x_0 là số vô tỷ nên suy ra $m = n = 0$, từ đó $f(x) = q(x^2 + x - 1) = ax^2 + bx + c$, từ đó suy ra $a = b = -c$, do đó $a + b + 2009c = 2007c$ chia hết cho 3.
Từ các trường hợp trên ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.27. Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x) = f(x) + 12$ có ít nhất 6 nghiệm nguyên phân biệt thì $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải: Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_6$ là 6 nghiệm nguyên phân biệt của $Q(x)$, khi đó

$$Q(x) = f(x) + 12 = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_6) \cdot g(x),$$

trong đó $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{Z}$ để $f(x_0) = 0$, khi đó

$$12 = Q(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_6) \cdot g(x_0).$$

Từ đó suy ra $12 = |x_0 - x_1|\,|x_0 - x_2| \ldots |x_0 - x_6|\,|g(x_0)|$.
Ta có nhận xét sau: do $x_1, x_2, \ldots, x_6$ đôi một phân biệt nên các số $|x_0 - x_1|, \ldots, |x_0 - x_6|$ nhận ít nhất ba giá trị khác nhau, hơn nữa $|g(x_0)| \geq 1$. Do đó

$$12 = |f(x_0)| \geq 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 1 = 24 \ \text{(vô lí)}.$$

Vậy $f(x)$ không thể có nghiệm nguyên. ■

G Nghiệm đa thức với yếu tố giải tích

Ta xét đa thức trên phương diện giải tích, tức là liên quan đến giới hạn, đạo hàm, ... Đa thức là một lớp hàm liên tục, có nghĩa là với đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bất kì thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa, đa thức cũng là một lớp hàm khả vi trên $\mathbb{R}$, tức là có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Thật vậy, xét đa thức

$$P(x) - a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Khi đó, ta có $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.
Từ đó ta có thể áp dụng một số định lý cho các hàm liên tục hay khả vi. Dưới đây tác giả trình bày (không chứng minh) một số kết quả quan trọng được áp dụng cho đa thức hệ số thực.

Định lí 5.13 (Định lý Lagrange). Với mọi số thực $a < b$ và một đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$P'(c) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}.$$

Định lí 5.14 (Định lý Rolle). Nếu đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có hai nghiệm phân biệt là $a < b$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ thỏa mãn $P'(c) = 0$.

Hệ quả 1.5. Nếu đạo hàm cấp k của đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ vô nghiệm thì đa thức $P(x)$ có không quá k nghiệm.

Định lí 5.15 (Quy tắc dấu Decartes). Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$). Gọi D là số nghiệm dương của đa thức và L là số lần đổi dấu của các hệ số của đa thức từ a_n đến a_0, bỏ qua các hệ số bằng 0. Khi đó: $D \leq L$ và $L - D$ là số chẵn. Có thể diễn đạt bằng lời như sau:

- Số nghiệm dương của phương trình $P(x) = 0$ bằng số lần đổi dấu của các hệ số hoặc nhỏ hơn một đơn vị chẵn.
- Số nghiệm âm của đa thức $P(x)$ bằng số lần đổi dấu của các hệ số trong $P(-x)$ hoặc nhỏ hơn một đơn vị chẵn.

Định lí 5.16 (Định lý về số nghiệm của đa thức).

Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Khi đó

- Nếu với hai số thực $a < b$ mà $P(a)P(b) < 0$ thì đa thức $P(x)$ có một số lẻ nghiệm trên khoảng (a, b), kể cả nghiệm bội.
- Nếu với hai số thực $a < b$ mà $P(a)P(b) > 0$ thì đa thức có một số chẵn nghiệm trên khoảng (a, b), kể cả bội.

Ta xét một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 5.28. Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\frac{a_n}{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1} + \ldots + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m} = 0$$

thì đa thức $P(x)$ luôn có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Lời giải: Xét hàm số $y = F(x)$ được cho bởi công thức

$$F(x) = \frac{a_n}{n+m}x^{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1}x^{n+m-1} + \ldots + \frac{a_1}{m+1}x^{m+1} + \frac{a_0}{m}x^m, \ x \in [0, 1].$$

Hàm số $y = F(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 1]$. Hơn nữa từ giả thiết đề bài, ta có

$$F'(x) = x^{m-1}P(x), \ \forall x \in (0; 1); \ F(0) = 0, F(1) = 0.$$

Từ đó theo *Định lý Lagrange*, tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho

$$F'(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0 \Rightarrow x_0^{m-1} f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0. \text{ (do } x_0 \neq 0\text{)}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 5.29. Cho dãy các đa thức $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ xác định như sau

$$P_1(x) = x^2 - 2, \ P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x)), \ \forall k \geq 2.$$

Giải phương trình $P_n(x) = x$ theo n.

Lời giải: Xét $x \in [-2; 2]$, khi đó đặt $x = 2\cos t$ ($t \in [0; \pi]$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$P_n(x) = 2\cos 2^n t, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

hơn nữa $P_n(x)$ là đa thức có bậc 2^n. Từ đó phương trình $P_n(x) = x$ cho ta

$$2\cos 2^n t = 2\cos t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^n t = t + 2k\pi \\ 2^n t = -t + 2k\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2k\pi}{2^n - 1} \\ t = \dfrac{2k\pi}{2^n + 1} \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$$

Từ đó phương trình ban đầu có tập nghiệm là $S = S_1 \cup S_2$, trong đó

$$S_1 = \left\{ x_k = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right), \ k = \overline{0, \ldots, 2^{n-1} - 1} \right\}, \ S_2 = \left\{ x_j = 2\cos\left(\frac{2j\pi}{2^n + 1}\right), \ j = \overline{1, \ldots, 2^{n-1}} \right\}.$$

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $[0;\pi]$ nên các nghiệm của mỗi tập S_1, S_2 là đôi một khác nhau. Do $2^n - 1$ và $2^n + 1$ là các số nguyên tố cùng nhau nên các nghiệm thuộc hai tập khác nhau cũng đôi một khác nhau. Tóm lại, phương trình $P_n(x) = x$ có $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ nghiệm hực phân biệt, mà $P_n(x)$ là đa thức có bậc không vượt quá 2^n nên đây chính là tất cả nghiệm thực của phương trình ban đầu. ■

> ***Nhận xét:***
> Ví dụ trên đây là một trường hợp đặc biệt của đa thức $P(x)$. Bài toán tổng quát hơn về việc chỉ ra sự tồn tại của một đa thức $P(x)$ để phương trình $P_n(x) = x$ có 2^n nghiệm thực đã được nhắc lại ở **Bài 5, Ngày 2** đề thi HSG quốc gia 2024.

Ví dụ 5.30 (VMO 2024). Với mỗi đa thức $P(x)$, ta đặt

$$\begin{aligned} &P_1(x) = P(x),\ \forall x \in \mathbb{R};\\ &P_2(x) = P(P_1(x)),\ \forall x \in \mathbb{R};\\ &\quad\ldots\\ &P_{2024}(x) = P(P_{2023}(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cho a là số thực lớn hơn 2. Tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện: với mỗi $t \in (-a;a)$, phương trình $P_{2024}(x) = t$ có đúng 2^{2024} nghiệm thực phân biệt?

Lời giải: Câu trả lời là tồn tại.

Đặt $P(x) = \dfrac{2x^2}{a} - a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Với $u \in [0,\pi]$, ta có

$$P_1(a\cos u) = \frac{2 \cdot a^2 \cos^2 u}{a} - a = 2a\cos^2 u - a = a\cos 2u.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $P_n(a\cos u) = a\cos 2^n u$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh phương trình $P_n(x) = t$ có đúng 2^n nghiệm thực phân biệt với mỗi $t \in (-a,a)$. Thật vậy,

$$P_n(\cos u) = t \Leftrightarrow a\cos 2^n u = t \Leftrightarrow \cos 2^n u = \frac{t}{a}.$$

Mà $t \in (-a,a)$ nên $\dfrac{t}{a} \in (-1,1)$. Đặt $\alpha = \arccos\dfrac{t}{a} \in (0,\pi)$, phương trình trên tương đương

$$\left[\begin{array}{l} 2^n u = \alpha + k2\pi \\ \\ 2^n u = -\alpha + l2\pi \end{array}\right. (k,l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{\alpha + k2\pi}{2^n} \\ u = \dfrac{-\alpha + l2\pi}{2^n} \end{array}\right. (k,l \in \mathbb{Z}).$$

Vì k,l là các số nguyên và $u \in [0,\pi]$ nên suy ra $k = 0,1,2,...,2^n - 1$ và $l = 1,2,3,...,2^n$. Vậy tập hợp các nghiệm của phương trình $P_n(\cos u) = t$ là

$$S = \left\{\frac{\alpha + k2\pi}{2^n} : k = 0,1,2,...,2^n - 1\right\} \cup \left\{\frac{-\alpha + l2\pi}{2^n} : k = 1,2,...,2^n\right\}.$$

Giả sử tồn tại $k_0 \in \{0,1,...,2^n - 1\}$ và $l_0 \in \{1,2,...,2^n\}$, sao cho $\dfrac{\alpha + k_0 2\pi}{2^n} = \dfrac{-\alpha + l_0 2\pi}{2^n}$, suy ra $\alpha = (l_0 - k_0)\pi$, vô lý với $\alpha \in (0,\pi)$. Vậy nên S có 2^n phần tử. Lại có $S \subset (0,\pi)$ và hàm $u \mapsto \cos u$ là song ánh từ $(0,\pi)$ vào $(-1,1)$ nên tập $T = \{\cos u : u \in S\}$ cũng có 2^n phần tử.

Chú ý rằng $\deg P_n(x) = 2^n$ nên T cũng là tập hợp tất cả các nghiệm thực của phương trình $P_n(x) = t$.

Tóm lại, với mỗi $t \in (-a, a)$, phương trình $P_n(x) = t$ có đúng 2^n nghiệm thực phân biệt với mọi số nguyên dương n. Cho $n = 2024$ thì có ngay $P(x)$ là đa thức thỏa mãn đề bài.

Cách khác: Khẳng định là tồn tại đa thức. Xét đa thức $P(x) = x^2 - a$. Ta chứng minh đa thức này thỏa mãn điều kiện. Trước hết ta có nhận xét rằng

- Điều kiện cần và đủ để phương trình $P(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt là $m > -a$.
- Với $m \in (-a, a)$ khi đó phương trình $P(x) = m$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \in (-a, a)$.

Nhận xét đầu tiên dễ dàng chứng minh được, ta chứng minh nhận xét thứ 2 . Thật vậy, ta có

$$P(x) = m \Leftrightarrow x^2 - a = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{a+m} \\ \\ x = -\sqrt{a+m} \end{array}\right. .$$

Ta có $a^2 > 2a > a + m$, điều này dẫn đến $\sqrt{a+m} < a$ và $-\sqrt{a+m} > -a$. Như vậy cả hai nghiệm đều thuộc $(-a, a)$.

Lấy $t \in (-a, a)$ tùy ý. Xét phương trình $P(x) = t$, khi đó theo nhận xét trên, phương trình này có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (-a, a)$.

Xét tiếp phương trình

$$P(P(x)) = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(x) = x_1 \\ \\ P(x) = x_2 \end{array}\right. .$$

Chú ý rằng $x_1, x_2 \in (-a, a)$ nên mỗi phương trình $P(x) = x_1$ và $P(x) = x_2$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(-a, a)$, chú ý rằng nghiệm của 2 phương trình này không trùng nhau, dẫn đến phương trình $P_2(x) = t$ có 2^2 nghiệm, hơn thế nữa, các nghiệm này đều thuộc khoảng $(-a, a)$.

Ta chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, phương trình $P_n(x) = t$ có 2^n nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-a, a)$ bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với $n = 1, n = 2$ mệnh đề đúng theo chứng minh trên. Giả sử mệnh đúng với $n \geq 2$, ta chứng minh mệnh đề đúng với $n + 1$. Giả sử phương trình $P_n(x) = t$ có 2^n nghiệm phân biệt $X_1, X_2, \ldots, X_{2^n} \in (-a, a)$ khi đó

$$P_{n+1}(x) = t \Leftrightarrow P_n(P(x)) = t \Leftrightarrow P(x) = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Vì $X_i \in (-a, a)$ nên phương trình $P(x) = X_i$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-a, a)$. Dẫn đến phương trình $P_{n+1}(x) = t$ có 2^{n+1} nghiệm thuộc $(-a, a)$. Chứng minh hoàn tất.

Nói riêng với $n = 2024$ ta có phương trình $P_{2024}(x) = t$ có 2^{2024} nghiệm thực phân biệt. Chú ý rằng $\deg P_{2024}(x) = 2^{2024}$ nên đây cũng là tất cả các nghiệm của phương trình $P_{2024}(x) = t$. ■

Ví dụ 5.31. Cho đa thức $P(x) = x^3 - 6x^2 - 9x$. Tính theo k số nghiệm của phương trình $P_k(x) = 0$, trong đó

$$P_k(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

với k lần lấy hàm hợp P.

Lời giải: Nhận xét rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = 0$ và $x = 3$. Giả sử phương trình $P_k(x) = 0$ có a_k nghiệm và $P_k(x) = 3$ có b_k nghiệm. Ta có

$$P_k(x) = 0 \Leftrightarrow P_{k-1}(x) = 0 \text{ hoặc } P_{k-1}(x) = 3,\ \forall k \geq 2.$$

Từ đó ta có hệ thức truy hồi $a_k = a_{k-1} + b_{k-1},\ \forall k \geq 2$.
Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, có $P'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$. Từ bảng biến thiên ta có được khi $x \in [0;4]$ thì $P(x) \in [0;4]$, và với $a \in [0;4]$ thì phương trình $P(x) = a$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Từ đó $b_k = 3b_{k-1}$, hơn nữa từ bảng biến thiên cũng có $b_1 = 3$, do đó xác định được $b_k = 3^k,\ \forall k \geq 1$. Từ đó, với lưu ý rằng $a_1 = 2$, ta có

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-2} + b_{k-2} + b_{k-1} = a_{k-1} + b_{k-1} + b_{k-2} + b_{k-1} \\ &= \ldots \\ &= a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1} = 2 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{k-1} \\ &= 2 + \frac{3^k - 3}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình $P_k(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ có $\dfrac{3^k + 1}{2}$ nghiệm, các nghiệm này đôi một phân biệt. ■

> ***Nhận xét:***
> Qua hai bài toán trên, ta có thể nhận thấy sự tương đồng như sau: để tìm đa thức thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta cần tìm một đa thức bậc hai $P(x)$ bảo toàn tập giá trị của nó trên một đoạn, có nghĩa là tồn tại một đoạn $D \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn
>
> $$P(x) \in D,\ \forall x \in D.$$
>
> Hơn nữa phương trình $P(x) = D$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt. Từ tính chất trên, mỗi nghiệm tiếp theo đều sinh ra 2 nghiệm nữa, do đó theo quy nạp phương trình ban đầu sẽ đủ 2^n nghiệm.
> Từ nhận xét trên, bạn đọc hãy thử giải quyết bài toán sau (với các hệ thức biểu diễn tương tự như trên): Tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ bậc ba để phương trình $P_n(x) = x$ có đúng 3^n nghiệm phân biệt (với $n \in \mathbb{N}^*$)?

H Một số bài toán khác khai thác tính chất nghiệm của đa thức

Ví dụ 5.32. Tìm tất cả các đa thức có dạng

$$x^n \pm x^{n-1} \pm \ldots \pm x \pm 1,$$

trong đó n là số nguyên dương, sao cho đa thức đó có tất cả các nghiệm đều là số thực.

Lời giải: Trường hợp $n = 1$ ta dễ dàng có các đa thức $x + 1$ và $x - 1$. Xét $n > 1$, gọi $x_1, \ldots, x_n$ là n nghiệm (không nhất thiết phân biệt) của đa thức trên. Từ Định lý Viete, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 1 \pm 2.$$

Từ đó suy ra $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3$ và $\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = -1$. Hơn nữa, ta có $x_1^2 \dots x_n^2 = (\pm 1)^2 = 1$. Do đó, theo bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\frac{3}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \ge \sqrt[n]{x_1^2 \dots x_n^2} = 1.$$

Từ đó suy ra $n \le 3$. Với $n = 3$, dấu bằng của bất đẳng thức AM-GM xảy ra nên khi đó $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$. Từ đó ta có các đa thức $(x^2-1)(x \pm 1)$. Với $n = 2$, bằng cách thử trực tiếp ta có các đa thức thỏa mãn là $x^2 \pm x - 1$.
Tóm lại, tất cả các đa thức có dạng như đề bài thỏa mãn điều kiện là

$$x^3 + x^2 - x - 1,\ x^3 - x^2 - x + 1,\ x^2 + x - 1,\ x^2 - x - 1,\ x + 1,\ x - 1.$$

■

Ví dụ 5.33 (Russian Mathematical Olympiad 2014).
Một phương trình $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ được viết trên bảng. Pete và Bazil lần lượt thay các dấu "*" trong phương trình trên bởi các số hữu tỉ. Đầu tiên, Pete chọn dấu "*" bất kì để thay, sau đó Bazil chọn một trong hai dấu "*" còn lại để thay rồi Pete thay số vào dấu "*" cuối cùng. Liệu có đúng hay không việc Pete có chiến thuật sao cho phương trình bậc ba thu được sau ba lần thay có hai nghiệm hơn kém nhau 2014 đơn vị?

Lời giải: **Cách 1.** Ta sẽ điều khiển chiến thuật của Pete để phương trình thu được có hai nghiệm là 0 và 2014. Đầu tiên, Pete chọn hệ số tự do bằng 0, khi đó nếu gọi a là số mà Bazil điền vào tiếp theo thì phương trình thu được sẽ có hai dạng dưới đây

$$x^3 + ax^2 + *x = 0,\ x^3 + *x^2 + ax = 0 = 0.$$

Ta chỉ cần chọn theo a một số vô tỷ để phương trình có thêm nghiệm 2014. Với trường hợp thứ nhất, chọn $*$ bởi $-2014(a + 2014)$, khi đó nếu không tính nghiệm $x = 0$ thì ta được phương trình bậc hai

$$x^2 + ax - 2014(a + 2014) = 0.$$

Từ đó dễ dàng suy ra phương trình có hai nghiệm $x = 2014$ và $x = -a - 2014$ dựa vào Định lý Viete đảo.
Với trường hợp thứ hai, thay $*$ bởi $-\dfrac{a + 2014^2}{2014}$. Khi đó ngoại trừ nghiệm $x = 0$, ta có phương trình bậc hai

$$x^2 - \frac{a + 2014^2}{2014}x + a = 0.$$

Bằng cách thay trực tiếp ta dễ suy ra phương trình bậc hai trên nhận $x = 2014$ làm nghiệm. Vậy Pete luôn có chiến thuật để thu được hai nghiệm 0 và 2014.
Cách 2. Với cách thứ hai này, ta sẽ chỉ ra một kết quả tổng quát hơn như sau: Pete có chiến thuật để thu được một đa thức chia hết cho đa thức $x^2 - s^2$, với s là một số hữu tỉ bất kì. Thật vậy, với số hữu tỉ s cho trước, đầu tiên cho Pete chọn hệ số trước x là $-s^2$. Sau khi Bazil chọn hệ số, đa thức bậc ba tương ứng sẽ có dạng

$$x^3 + ax^2 - s^2x + * \text{ hoặc } x^3 + *x^2 - s^2x + c.$$

Với trường hợp thứ nhất, cho Pete thay $*$ bởi $-as^2$, khi đó ta có

$$x^3 + ax^2 - s^2x - as^2 = (x+a)(x^2 - s^2) = 0.$$

Với trường hợp thứ hai, cho Pete thay $*$ bởi $-\frac{c}{s^2}$, khi đó ta có

$$x^3 - \frac{c}{s^2}x^2 - s^2x + c = \left(x - \frac{c}{s^2}\right)(x^2 - c) = 0.$$

Vậy ta luôn thu được một đa thức chia hết cho $x^2 - s^2$. Chọn $s = 1007$, khi đó phương trình ban đầu có hai nghiệm là $x = -1007$ và $x = 1007$, có hiệu bằng 2014. ■

Nhận xét:
Từ lời giải thứ hai của bài toán, ta có thể tổng quát kết quả rằng hai nghiệm thu được có hiệu là một số hữu tỉ α bất kì, bằng cách chọn $s = \frac{\alpha}{2}$. Hơn nữa, từ cách chọn sao cho phương trình có hai nghiệm s và $-s$, ta có thể biến tấu để điều kiện "hiệu bằng 2014" hoặc "hiệu là một số hữu tỉ cho trước" thành các điều kiện khác phức tạp hơn, chẳng hạn như "tổng bình phương bằng $\frac{1}{8}$" hay một biểu thức khác liên quan đến nghiệm. Khi đó nhìn lại bài toán vừa tạo ra và thử xem với bài toán mới được tạo thành ấy, liệu có cách giải nào thú vị khác hay không? Bài toán mở này xin nhường cho bạn đọc.

Ví dụ 5.34 (Belarusan Mathematical Olympiad 2016).

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức có bậc bằng nhau. Ta xác định đa thức $P_Q(x)$ sao cho các hạng tử bậc chẵn được lấy từ $P(x)$ và các hạng tử bậc lẻ được lấy từ $Q(x)$. Tương tự, ta xác định đa thức $Q_P(x)$ sao cho các hạng tử bậc chẵn được lấy từ $Q(x)$ và các hạng tử bậc lẻ được lấy từ $P(x)$. Chẳng hạn, nếu

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \text{ và } Q(x) = 3x^3 + x^2 + 2$$

thì

$$P_Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1 \text{ và } Q_P(x) = x^3 + x^2 + 4x + 2.$$

a) Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức $P(x), Q(x)$ không có nghiệm thực nhưng $P_Q(x)$ và $Q_P(x)$ đều có ít nhất một nghiệm thực.
b) Tìm bậc nhỏ nhất của $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện ở câu a.

Lời giải:

a) Giả sử $P(x) = 4x^4 + 4x^3 + 1$ và $Q(x) = x^4 + 4x + 4$. Dễ dàng chỉ ra được $P(x) > 0$ và $Q(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, do đó chúng không có nghiệm thực. Tuy nhiên, ta có

$$P_Q(x) = 4x^4 + 4x + 1,\ Q_P(x) = x^4 + 4x^3 + 4$$

là các đa thức có nghiệm thực. Thật vậy, ta có $P_Q\left(-\frac{1}{2}\right) < 0, P_Q(0) > 0$ và $Q_P(-2) < 0, Q_P(0) > 0$ nên cả hai đa thức $P_Q(x)$ và $Q_P(x)$ đều có ít nhất một nghiệm thực theo Định lý giá trị trung gian.

b) Do $P(x)$ và $Q(x)$ không có nghiệm thực nên chúng phải có bậc là chẵn, đồng thời ở câu a ta đã chỉ ra hai đa thức bậc 4 thỏa mãn. Do đó để chỉ ra bậc nhỏ nhất của P và Q là 4, ta cần chỉ ra chúng không thể có bậc là 2. Thật vậy, giả sử tồn tại hai đa thức

$$P(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \text{ và } Q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2,$$

trong đó $a_1, a_2 \neq 0$ và chúng vô nghiệm nên có biệt thức âm. Ta có

$$P_Q(x) = a_1x^2 + b_2x + c_1 \text{ và } Q_P(x) = a_2x^2 + b_1x + c_2.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $|b_2| \geq |b_1|$. Ta có

$$\Delta_{P_Q} = b_2^2 - 4a_1c_1,\ \Delta_{Q_P} = b_1^2 - 4a_2c_2.$$

Từ đó ta có

$$0 > \Delta_Q = b_2^2 - 4a_2c_2 \geq b_1^2 - 4a_2c_2 = \Delta_{Q_P}.$$

Từ đó $\Delta_{Q_P} < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $Q_P(x)$ có nghiệm thực. Vậy không tồn tại các đa thức P, Q bậc hai thỏa mãn, do đó bậc nhỏ nhất của P, Q thỏa mãn yêu cầu bài toán là 4.

■

Ví dụ 5.35 (VMO 2024). Tìm tất cả đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ hệ số thực sao cho với mọi số thực a thì $P(a)$ là nghiệm của phương trình $x^{2023} + Q(a)x^2 + (a^{2024} + a)x + a^3 + 2025a = 0$.

Lời giải: Giả sử P và Q là các đa thức cần tìm. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$[P(x)]^{2023} + Q(x) \cdot [P(x)]^2 + (x^{2024} + x)P(x) + x^3 + 2025x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Từ (1.3), ta suy ra $x^3 + 2025x \,\vdots\, P(x)$, hay $x(x^2 + 2025) \,\vdots\, P(x)$.

Nếu $P(x) \,\vdots\, x$, khi đó $[P(x)]^{2023} \,\vdots\, x^2$, $Q(x)[P(x)]^2 \,\vdots\, x^2$ và $(x^{2024} + x)P(x) \,\vdots\, x^2$. Do đó từ (1.3), ta suy ra $2025x \,\vdots\, x^2$ (Vô lí). Như vậy $P(x) \not\vdots\, x$, kết hợp với $x(x^2 + 2025) \,\vdots\, P(x)$ nên $x^2 + 2025 \,\vdots\, P(x)$. Suy ra $P(x) \equiv c$ hoặc $P(x) = a(x^2 + 2025)$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $P(x) \equiv c$ (c là hằng số), thay vào (1.3), ta được

$$c^{2023} + Q(x)c^2 + (x^{2024} + x)c + x^3 + 2025x = 0. \tag{1.4}$$

Nếu $c = 0$ thì $x^3 + 2025x = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (Vô lí). Như vậy $c \neq 0$ và từ (1.5), ta được

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{1}{c^2}\left(x^3 + 2025x + cx^{2024} + cx + c^{2023}\right) \\ &= -\frac{1}{c}x^{2024} - \frac{1}{c^2}x^3 - \frac{2025 + c}{c^2}x - c^{2021}. \end{aligned}$$

- Nếu $P(x) = a(x^2 + 2025)$ $(a \neq 0)$. Từ (1.3), ta được

$$[P(x)]^{2023} + Q(x)[P(x)]^2 + (x^{2024} + x)P(x) + \frac{1}{a}xP(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $[P(x)]^{2022} + Q(x)P(x) + (x^{2024} + x) + \dfrac{1}{a}x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$x^{2024} + \frac{a+1}{a}x \,\vdots\, P(x) \quad \text{hay} \quad x^{2024} + \frac{a+1}{a}x \,\vdots\, x^2 + 2025. \tag{1.5}$$

Lại có $x^{2024} - 2025^{1012} = (x^4)^{506} - \left(2025^2\right)^{506} \,\vdots\, x^4 - 2025^2 \,\vdots\, x^2 + 2025$ nên từ (1.5), ta suy ra

$$\frac{a+1}{a}x + 2025^{1012} \,\vdots\, x^2 + 2025 \qquad \text{(Vô lí).}$$

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) \equiv c$ và $Q(x) = -\frac{1}{c}x^{2024} - \frac{1}{c^2}x^3 - \frac{2025+c}{c^2}x - c^{2021}$, trong đó c là hằng số khác 0. ■

Ví dụ 5.36 (Olympic sinh viên 2025 - Bảng THPT).

a) Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 1$. Chứng minh rằng có vô số đa thức $P(x)$ bậc 2 hệ số bậc cao nhất bằng 1 sao cho đa thức $P(Q(x))$ có 4 nghiệm phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

b) Xét đa thức $T(x) = x^3 - 3x$. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $S(x)$ bậc 3 sao cho đa thức $S(T(x))$ có 9 nghiệm thực phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải:

a) Đặt $P(x) = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{R})$, khi đó

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= (x^2-1)^2 + b(x^2-1) + c \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + bx^2 - b + c \\ &= x^4 + (b-2)x^2 - b + c + 1. \end{aligned}$$

Xét phương trình $x^4 + (b-2)x^2 - b + c + 1 = 0$ là một phương trình trùng phương, do đó nếu phương trình này có 4 nghiệm thì sẽ có 2 cặp nghiệm là số đối của nhau. Đặt bốn nghiệm này là $\pm x_1, \pm x_2$ $(x_2 > x_1 > 0)$. Khi đó $-x_2, -x_1, x_1, x_2$ lập thành một cấp số cộng, hay $x_2 - x_2 = 2x_1$, từ đó $x_2 = 3x_1$. Vậy bốn nghiệm của phương trình nói trên là $-3x_1, -x_1, x_1, 3x_1$.
Theo Đĩnh lý Viete, ta có

$$\begin{aligned} &(-3x-1)(-x_1)\cdot x_1 \cdot 3x_1 = 1 + c - b \Rightarrow x_1^4 = \frac{1+c-b}{9}, \\ &(-3x_1)(-x_1) + (-3x_1)x_1 + (-3x_1)3x_1 + (-x_1)x_1 + (-x_1)3x_1 + x_1 \cdot 3x_1 = b - 2 \\ &\Rightarrow x_1^2 = \frac{2-b}{10}. \end{aligned}$$

Từ đó ta được phương trình $\left(\frac{2-b}{10}\right)^2 = \frac{1+c-b}{9}$. Phương trình trên là phương trình bậc hai theo b và ta luôn có thể chọn vố số c một cách hợp lý để tìm được b, từ đó dẫn đến có vô số đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

b) Không mất tính tổng quát, giả sử $S(x)$ monic hay $S(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Khi đó

$$S(T(x)) = (x^3 - 3x)^3 + b(x^3 - 3x)^2 + c(c^3 - 3x) + d.$$

Giả sử đa thức trên có 9 nghiệm lập thành cấp số cộng, ta gọi các nghiệm đó là $a - 4m, a - 3m, \ldots, a + 3m, a + 4m$. Khi đó để ý rằng hệ số trước x^8 của $S(T(x))$ bằng 0 nên từ Định lý Viete ta suy ra tổng các nghiệm bằng 0 hay $a = 0$. Do đó trong 9 nghiệm, có nghiệm là $a = 0$ nên $d = 0$.
Xét hệ số trước x^7, ta có hệ số đó bằng -9 từ khai triển ban đầu, kết hợp với Định lý Viete ta có (kí hiệu $a_1, \ldots, a_9$ là các nghiệm)

$$-9 = \sum_{1 \le i < j \le 9} a_i a_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=-4}^{4}(im)\right)^2 - \sum_{i=-4}^{4}(im)^2\right] = \frac{0 - 60m^2}{2} = -30m^2.$$

Từ đó $m^2 = \dfrac{3}{10}$, do đó ta có 9 nghiệm của đa thức $S(T(x))$ là

$$-4\sqrt{\frac{3}{10}}, -3\sqrt{\frac{3}{10}}, \ldots, 3\sqrt{\frac{3}{10}}, 4\sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Đến đây, bằng cách thay các nghiệm $\sqrt{\dfrac{3}{10}}, 2\sqrt{\dfrac{3}{10}}, 3\sqrt{\dfrac{3}{10}}$ vào và lập hệ phương trình hai ẩn b, c ta sẽ có ngay điều vô lý. Từ đó không tồn tại đa thức $S(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. ■

Ví dụ 5.37 (G.Zhukov - Kvant M2427).

Với số nguyên dương N, ta viết N số thực phân biệt lên bảng. Ở mỗi bước, ta xây dựng đa thức với các hệ số được chọn tùy ý bởi các số trên bảng (có thể không chọn tất cả các số) và viết lên bảng tất cả nghiệm thực của đa thức thu được (nếu có) lên bảng. Biết rằng sau một số lần hữu hạn bước, tất cả các số nguyên từ -2016 đến 2016 xuất hiện trên bảng. Hỏi giá trị nhỏ nhất có thể đạt được của N là bao nhiêu?

Lời giải: Dễ thấy rằng ban đầu trên bảng phải có số 0, vì nếu không trên bảng sẽ không bao giờ có số 0. Hơn nữa hiển nhiên ta phải có ít nhất hai số phân biệt trên bảng ở bước đầu tiên, như vậy $N \geq 2$. Ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của N là 2.

Thật vậy, xét hai số ban đầu được chọn là 0 và $a = 2016!$. Trước hết ta viết được lên bảng số -1 bằng cách tạo ra đa thức $ax + a$. Tiếp theo, từ đa thức $ax^2 - 1$ ta xây dựng được các số $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ và $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, từ đó với đa thức $\dfrac{1}{\sqrt{a}}x - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ta thu được số 1.

Ta có nhận xét sau: nếu đã viết được số $b \neq 0$ lên bảng thì cũng sẽ viết được số $-b$ trên bảng bằng cách xây dựng đa thức $x + b$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh rằng có thể viết được các số nguyên dương từ 1 đến 2016.

Do đã viết được hai số 0 và 1 nên ta sẽ quy nạp rằng nếu viết được các số $0, 1, \ldots, M - 1$ với $M \leq 2016$ thì có thể viết được số M, tức là có thể xây dựng được đa thức nhận $x = M$ là nghiệm. Thật vậy, ta viết số $a = 2016!$ dưới cơ số M

$$2016! = a_k M^k + a_{k-1} M^k + \ldots + a_1 M + a_0,$$

trong đó $a_i \in \{0, 1, \ldots, M-1\}, \forall i = \overline{0,k}$. Do $M \mid 2016!$ và $M \mid (a_k M^k + \ldots + a_1 M + a_0)$ nên $M \mid a_0$, từ đó $a_0 = 0$ do $a_0 \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$ Từ đó suy ra đa thức

$$a_k x^k + \ldots + a_1 x - 2016! = 0$$

nhận $x = M$ làm nghiệm và có các hệ số đã được viết trên bảng (số $-2016! = -a$ được viết từ đa thức $x + a$). Từ đó theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh. Do đó giá trị nhỏ nhất của N là 2. ■

I Kết luận

Các vấn đề về đa thức, đặc biệt là nghiệm của đa thức khá rộng và thú vị. Các tính chất về nghiệm của đa thức có thể được khai thác qua con mắt đại số (biến đổi đại số) hay số học (sử dụng tính chất số học như chia hết, đồng dư ...) hay giải tích (định lý giá trị trung gian, Lagrange, khảo sát hàm số ...). Từ đó các tính chất về nghiệm của đa thức được nghiên cứu nhiều và các bài toán liên quan đến đa thức nói riêng hay nghiệm của đa thức nói chung chưa bao giờ là quá cũ. Hi vọng qua bài viết này, bạn đọc có thêm một góc nhìn về chủ đề đa thức trong các kì thi học sinh giỏi các cấp.

J Bài tập tự luyện

Bài tập 5.1. Cho hai phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$.

a) Chứng minh rằng nếu $ac \geq 2(b + d)$ thì ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.
b) Chứng minh rằng nếu $(a + c)^2 > 8(b + d)$ thì ít nhất một trong hai phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 5.2. Cho đa thức $f(x) = x^2 + 2x + 2025 := x^2 + ax + b$. Được phép thêm vào hoặc bớt đi ở các hệ số a, b một đơn vị (nhưng không đồng thời). Cứ như vậy cho đến khi thu được đa thức $g(x) = x^2 + 2025x + 2$. Chứng minh rằng trong số các đa thức thu được có ít nhất một đa thức có các nghiệm nguyên.

Bài tập 5.3. Biết rằng phương trình $x^3 + ax^2 + b + c = 0$ có ba nghiệm thực. Chứng minh rằng nếu $a^2 = 2(b + 1)$ thì $|a - c| \leq 2$.

Bài tập 5.4 (Trích THTT số 414). Chứng minh rằng với mọi số nguyên k thì phương trình $x^4 - 2010x^3 + (2009 + k)x^2 - 2007x + k = 0$ không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt.

Bài tập 5.5. Gọi γ là nghiệm lớn nhất của phương trình $x^3 - 3x^2 = 1 = 0$. Hãy xác định 336 chữ số liên tiếp đầu tiên sau dấu phẩy của số γ^{2018} trong biểu diễn thập phân của nó.

Bài tập 5.6. Cho đa thức bậc hai $f(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng nếu

$$f(x) \geq -\frac{2025}{2026},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

thì ta có $f(x) \geq -\dfrac{1}{4},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 5.7 (Ukrainian Mathematical Olympiad).

Cho hai đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Biết rằng đa thức $S(x) = P(x)Q(x)$ có tất cả các hệ số đều dương. Chứng minh rằng nếu $P(0) > 0$ thì với mọi $x > 0$, ta có

$$S\left(x^2\right) - (S(x))^2 \leq \frac{1}{4}\left((P(x^3))^2 + Q(x^3)\right).$$

Bài tập 5.8 (Russian Mathematical Olympiad 2012).

Cho một đa thức $P(x)$ hệ số thực và các số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ thỏa mãn $a_1a_2a_3 \neq 0$. Giả sử rằng với mọi số thực x, ta có

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có ít nhất một nghiệm thực.

Bài tập 5.9 (Polish Mathematical Olympiad 2013).

Cho b, c là các số nguyên và xét đa thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Xét các số nguyên k_1, k_2, k_3 thỏa mãn $n \mid f(k_1), n \mid f(k_2), n \mid f(k_3)$. Chứng minh rằng $n \mid (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1)$.

Bài tập 5.10. Cho a_1, b_1 là hai số thực thỏa mãn $a_1 < b_1$. Với mỗi số nguyên dương n, gọi a_{n+1}, b_{n+1} là hai số thực thỏa mãn $a_{n+1} < b_{n+1}$ và chúng là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 + a_nx + b_n = 0$.

a) Giả sử a_1, b_1 là các số nguyên và quy trình ở đề bài dừng lại nếu tồn tại n_0 nguyên dương để phương trình $x^2 + a_{n_0}x + b_{n_0} = 0$ không có nghiệm nguyên. Tìm a_1, b_1 để quy trình nói trên không dừng lại.

b) Giả sử $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ và $a_1 < 0 < b_1$. Chứng minh rằng hai dãy (a_n) và (b_n) hội tụ. Khi đó, tính $\lim a_n$ và $\lim b_n$.

Bài tập 5.11. Cho đa thức $P(x)$ có bậc bằng 2025 sao cho phương trình $P(P(P(x)) = P(x)$ có 2025^3 nghiệm thực phân biệt. Tồn tại hay không một cách chia 2025^3 nghiệm này thành hai nhóm với trung bình cộng mỗi nhóm bằng nhau?

Bài tập 5.12. Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ phân biệt. Trên bàn cờ $n \times n$, ta điền số có giá trị bằng $a_i + b_j$ vào ô vuông đơn vị nằm ở hàng i và cột j. Chứng minh rằng nếu tích các số trên mỗi hàng của bảng đều bằng nhau thì tích các số trên mỗi cột cũng như thế.

Bài tập 5.13. Gọi α là nghiệm dương của phương trình $x^2 - 2025x - 1 = 0$.

a) Đặt $\beta = -\dfrac{1}{\alpha}$ và $a_n = \alpha^n + \beta^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Xác định công thức tổng quát của (a_n).

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n thỏa mãn đẳng thức

$$[\alpha n + 2025\alpha[\alpha n]] = 2025n + (2025^2 + 1)[\alpha n].$$

Bài tập 5.14. Giả sử α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Đặt

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b với $a < b$ sao cho b là ước của $a_n - 2n \cdot a^n$ với mọi n nguyên dương.

Bài tập 5.15. Cho $a_i > 0$ với mọi $j = \overline{0, n}$. Chứng minh rằng với mọi $k = \overline{1, n}$, phương trình

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k = a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_n x^n$$

luôn có nghiệm dương duy nhất.

Bài tập 5.16. Cho $f(x)$ là một đa thức có hệ số hữu tỉ, α là số thực thỏa mãn

$$\alpha^3 - \alpha = f^3(\alpha) - f(\alpha) = 30^4.$$

Kí hiệu $f_n(x) := f(f(\ldots f(f(x))\ldots))$ (n lần lấy hàm hợp f). Chứng minh rằng

$$(f_n(\alpha))^3 - f_n(\alpha) = 30^4.$$

Tài liệu tham khả

[1] Lê Hoành Phò, Nguyễn Văn Nho, Nguyễn Tài Chung, *Chuyên khảo đa thức*, Nhà xuất bản DHQG Hà Nội, 2021.

[2] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến, *Một số chuyên đề đại số bồi dưỡng học sinh giỏi*, Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam, 2010.

[3] Phạm Thị Thu Thủy, *Đại số đại cương*, Nhà xuất bản DhSP Thành phố Hồ Chí Minh, 2021.

[4] Titu Andreescu, Navid Safaei, Alessandro Ventullo, *117 Polynomial Problems*, XYZ Press, 2019.

[5] Lê Phúc Lữ, *Các bài toán về nghiệm của đa thức*, 2010.

[6] Đàm Văn Nhỉ (chủ biên), *Đa thức - chuỗi và chuyên đề nâng cao*, Nhà xuất bản thông tin và truyền thông, 2017.

§6. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM BẰNG ÁNH XẠ

NGUYỄN THỦY TIÊN - Giáo viên STAR EDUCATION

Các bài toán đếm tổ hợp xuất hiện rất thường xuyên trong các kỳ thi HSG Toán. Có nhiều phương pháp đếm khác nhau, từ những kỹ thuật cơ bản như liệt kê, quy tắc cộng, quy tắc nhân, phương pháp loại trừ, đến những công cụ mạnh hơn như ánh xạ, truy hồi,.... Việc lựa chọn phương pháp phù hợp không chỉ giúp bài toán được giải quyết ngắn gọn và hiệu quả, mà còn góp phần làm sáng tỏ cấu trúc tổ hợp ẩn chứa bên trong bài toán.

Trong chương này, chúng ta sẽ tiếp cận và tìm hiểu phương pháp đếm bằng ánh xạ cùng với một số ví dụ minh họa tiêu biểu.

A Các khái niệm cơ bản

I. Ánh xạ

- **Định nghĩa ánh xạ:** Cho hai tập hợp X và Y . Một quy tắc f đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$ được gọi là *"ánh xạ"* f từ X vào Y. Ta kí hiệu $f : X \to Y$ với $y = f(x)$.
  Tập X được gọi là tập xác định của f. Tập hợp Y được gọi là tập giá trị của f.
- **Đơn ánh:** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *"đơn ánh"* nếu với $a \in X, b \in X$ mà $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$, tức là hai phần tử phân biệt sẽ có hai ảnh phân biệt.
  Từ định nghĩa ta suy ra ánh xạ f là đơn ánh khi và chỉ khi với $a \in X, b \in X$ mà $f(a) = f(b)$, ta phải có $a = b$.
- **Toàn ánh:** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *"toàn ánh"* nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy f là toàn ánh khi và chỉ khi $Y = f(X)$.
- **Song ánh:** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *"song ánh"* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Như vậy ánh xạ $f : X \to Y$ là song ánh khi và chỉ khi với mỗi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ để $y = f(x)$.

Lưu ý: Khi f là một song ánh từ X đến Y thì tương ứng ta có *"ánh xạ ngược"* f^{-1} của f. f^{-1} là ánh xạ từ Y đến X gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ với một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Nếu f không phải là song ánh thì f không có ánh xạ ngược.

II. Lực lượng trong tập hợp

- **Tập hữu hạn:** Tập hợp X được gọi là tập hữu hạn nếu tồn tại $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ sao cho

  $$|X| = |\{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}|$$

  Chú ý: $|\varnothing| = 0$.
- **Tập vô hạn đếm được:** Tập vô hạn đếm được là tập hợp mà ta có thể sắp xếp tất cả các phần tử của tập đó thành một dãy.
  Ví dụ: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$...
- **Tập không đếm được:**
  Kí hiệu: $|[0, 1]| = c$.
  Tập X gọi là tập không đếm được nếu

  $$|X| = c$$

B Phương pháp đếm bằng ánh xạ

Phương pháp đếm bằng ánh xạ dựa trên việc so sánh số phần tử của các tập hợp thông qua các ánh xạ.

Định lí 6.1. Cho $f : A \to B$ là một ánh xạ từ tập hữu hạn A sang tập hữu hạn B. Ký hiệu $|A|$ và $|B|$ lần lượt là số phần tử của M và N. Khi đó

1. Nếu f là đơn ánh thì $|A| \le |B|$;
2. Nếu f là toàn ánh thì $|A| \ge |B|$;
3. Nếu f là song ánh thì $|A| = |B|$;

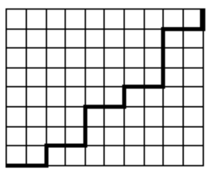
Khi việc đếm số phần tử của một tập hữu hạn A gặp khó khăn, ta có thể cố gắng xây dựng một song ánh từ A đến một tập hữu hạn khác là B mà việc đếm số phần tử của B thì dễ dàng hơn. Khi đó, từ hệ thức $|A| = |B|$, ta suy ra được số phần tử của tập A. Đây chính là phương pháp ánh xạ được áp dụng trong các bài toán đếm.

Trong một số bài toán liên quan đến bất đẳng thức tổ hợp, ta có thể xem xét đến việc xây dựng đơn ánh hoặc toàn ánh giữa các tập hợp một cách phù hợp để chứng minh kết quả của các bất đẳng thức trong bài làm.

Mặc dù ý tưởng của phương pháp khá đơn giản, nhưng trong thực tế việc tìm được ánh xạ phù hợp không hề dễ dàng. Do đó, kỹ năng cốt lõi của phương pháp này là xác định đúng tập đích và xây dựng ánh xạ hợp lý.

C Một số các ví dụ

Ví dụ 6.1. Xác định số đường đi từ $(0,0)$ đến (m,n) với các bước đi đơn vị là đi lên hoặc đi sang phải.



Lời giải: Ý tưởng dùng song ánh là ta biến đổi bài toán đang xét thành một bài toán khác mà ta biết cách đếm dễ hơn.

Trong trường hợp này, ta mã hóa mỗi đường đi bằng một dãy các chữ cái L và P, tương ứng với:

- L : bước đơn vị đi lên
- P : bước đơn vị sang phải

Ví dụ, đường đi minh họa ở hình trên được mã hóa thành:

$$PPLPPLLPPLPPLLLPPL$$

Các dãy chữ cái thu được luôn có đúng m chữ P và n chữ L, vì để đi từ $(0,0)$ đến (m,n) ta cần chính xác m bước sang phải và n bước đi lên.

Và ngược lại, với bất kỳ dãy nào gồm m chữ P và n chữ L, ta đều có thể dựng lại một đường đi tương ứng từ $(0,0)$ đến (m,n).

Do đó, ta đã xây dựng được một song ánh giữa hai tập hợp sau:

- Tập hợp các đường đi từ $(0,0)$ đến (m,n) với các bước đi lên hoặc đi sang phải;

- Tập hợp các dãy gồm m chữ P và n chữ L.

Ta biết cách đếm tập thứ hai. Nó có đúng C_{m+n}^{m} phần tử, vì ta chỉ cần chọn m vị trí trong tổng $m+n$ vị trí để đặt chữ L.

Vì tồn tại một song ánh giữa hai tập hợp trên nên số đường đi từ $(0,0)$ đến (m,n) cũng chính bằng C_{m+n}^{m}. ■

> ***Nhận xét:***
> Ví dụ trên minh họa kỹ thuật chứng minh bằng song ánh. Thông thường, việc chứng minh tồn tại song ánh giữa hai tập $\mathscr{A}$ và $\mathscr{B}$ cần giải thích rõ:
> **1.** Cách biến mỗi phần tử của $\mathscr{A}$ thành một phần tử của $\mathscr{B}$.
> **2.** Cách khôi phục lại các phần tử của $\mathscr{A}$ từ các phần tử của $\mathscr{B}$.
> **3.** Vì sao hai phép biến đổi trên là nghịch đảo của nhau ?
> Trong ví dụ này, sau khi xây dựng ánh xạ $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, việc tìm ánh xạ ngược rất dễ. Nhưng cũng có những trường hợp, việc xây dựng ánh xạ ngược phức tạp hơn rất nhiều.

Ví dụ 6.2. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng số cách biễu diễn n thành tổng các số lẻ bằng số cách biễu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một phân biệt.

Lời giải: Ta sẽ xây dựng một song ánh giữa hai tập hợp:

- Tập A gồm các cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một phân biệt;
- Tập B gồm các cách biểu diễn n thành tổng các số lẻ.

Bắt đầu với một cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một phân biệt. Mỗi số hạng của tổng có thể được viết dưới dạng $a \cdot 2^b$, trong đó a là số lẻ. Sau đó, ta tách số hạng này thành 2^b số hạng nhỏ hơn, mỗi số hạng đều bằng a. Cách làm này cho ta một biễu diễn n thành tổng các số lẻ. Chẳng hạn, với một cách biểu diễn số 45 dưới dạng tổng của các số phân biệt $(20,9,6,5,4,1)$

$$\begin{aligned}
45 &= 20+9+6+5+4+1 \\
&= 5\cdot 2^2+9\cdot 2^0+3\cdot 2^1+5\cdot 2^0+1\cdot 2^2+1\cdot 2^0 \\
&= (5+5+5+5)+9+(3+3)+5+(1+1+1+1)+1 \\
&= 9+5+5+5+5+5+3+3+1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

Như vậy ta thu được cách biễu diễn số 45 dưới dạng tổng các số lẻ
$(9,5,5,5,5,5,3,3,1,1,1,1,1)$.

Đối với chiều ngược lại, với một cách biểu diễn n thành tổng các số lẻ. Giả sử trong đó có k số hạng bằng a. Viết k dưới dạng tổng các lũy thừa khác nhau của 2 ,

$$k = 2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_r},$$

trong đó $k_1, k_2 \ldots k_r$ đôi một phân biệt, đây cũng chính là biểu diễn nhị phân của k. Với mỗi số hạng 2^{k_i}, ta tạo ra một số hạng mới có giá trị $a \cdot 2^{k_i}$. Các số hạng thu được đôi một phân biệt, vì mỗi số nguyên dương có duy nhất một cách biểu diễn dưới dạng $a \cdot 2^b$ với a lẻ. Ví dụ, với một cách biểu diễn số 45 dưới dạng tổng của các số lẻ $(9,5,5,5,5,5,3,3,1,1,1,1,1)$

$$\begin{aligned}45 &= 9+5+5+5+5+5+3+3+1+1+1+1+1\\&= 9\cdot 1+5\cdot 5+3\cdot 2+1\cdot 5\\&= 9\cdot 2^0+5\cdot\left(2^2+2^0\right)+3\cdot 2^1+1\cdot\left(2^2+2^0\right)\\&= 9\cdot 2^0+5\cdot 2^2+5\cdot 2^0+3\cdot 2^1+1\cdot 2^2+1\cdot 2^0\\&= 9+20+5+6+4+1\\&= 20+9+6+5+4+1\end{aligned}$$

Như vậy ta thu lại được cách biểu diễn $(12,7,6,4,1)$ ban đầu của số 45.

Hai quy trình ta vừa mô tả là nghịch đảo nhau, do đó ta thiết lập được một song ánh giữa hai tập hợp A và B. Vậy số cách biểu diễn n thành tổng các số lẻ bằng số cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một phân biệt. ■

Ví dụ 6.3. (Russian MO 1995) Trên một bàn cờ vua 8×8, hai người chơi A và B lần lượt đặt lên các quân cờ theo quy luật. Ở mỗi lượt, một người chơi có thể đặt một hoặc nhiều quân cờ vào các ô trống trên cùng một hàng hoặc cùng một cột (mỗi ô chỉ được đặt tối đa một quân). Giả sử người chơi A đi trước, sau đó hai người chơi luân phiên. Người chơi thắng là người khiến đối phương không thể đặt thêm quân cờ nào nữa. Hỏi ai là người có chiến lược thắng?

Lời giải: Ta chứng minh rằng B có chiến lược thắng.

Giả sử ở bước thứ $2k+1$, người chơi A đặt m quân cờ vào m ô trống

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

trên cùng một hàng hoặc cùng một cột.

Khi đó, ở bước thứ $2k+2$ người chơi B chỉ cần đặt m quân cờ vào m ô trống

$$b_1, b_2, \ldots, b_m$$

sao cho mỗi cặp b_i và a_i đối xứng nhau qua tâm của bàn cờ $(i=1,2,\ldots,m)$.

Cứ thực hiện như vậy cho đến khi bàn cờ được lấp đầy và B là người giành chiến thắng. ■

> ***Nhận xét:***
> Với bàn cờ $n\times n$, trong đó n chẵn thì B luôn là người có chiến lược thắng. Trong trường hợp n lẻ thì A là người có chiến lược thắng, khi đó ở bước đầu tiên A chỉ cần chọn ô nằm ở tâm đối xứng của bàn cờ và sau đó thực hiện các thao tác như người chơi thứ hai trong trường hợp n chẵn.

Ví dụ 6.4. Xét một màn hình gồm 2000×2002 ô vuông đơn vị. Ban đầu, có hơn 1999×2001 ô đơn vị đang bật sáng. Trong bất kỳ hình vuông con 2×2 nào, ngay khi có 3 ô tắt, thì ô còn lại tự động tắt theo. Chứng minh rằng cả màn hình không bao giờ có thể tắt hết.

Lời giải: Gọi A là tập hợp tất cả các ô vuông đơn vị trên màn hình ban đầu đang bật nhưng cuối cùng bị tắt. Với mỗi ô vuông thuộc A, tồn tại một hình vuông con 2×2 đã "gây ra" việc nó bị tắt (khi ba ô vuông trong một hình vuông con 2×2 đều tắt thì ô vuông còn lại sẽ tắt theo).

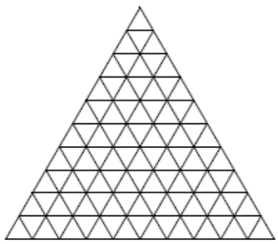
Gọi B là tập hợp tất cả các hình vuông con 2×2, số phần tử của B là 1999×2001. Ta xét một quy tắc $f : A \to B$, với mỗi ô vuông trong A thì f gán nó với một hình vuông con 2×2 đã khiến nó bị tắt (nếu có nhiều hơn 1 hình vuông con 2×2 khiến nó bị tắt thì ta cho f gán với một hình tùy ý trong số chúng). Rõ ràng f là một ánh xạ. Hơn nữa f còn là đơn ánh vì một hình vuông con 2×2 không thể "gây ra" việc làm cho 2 ô vuông bị tắt.

Giả sử ngược lại, tồn tại một hình vuông con 2×2 là $\mathcal{H}$ "gây ra" việc tắt cho 2 ô A và B. Do $\mathcal{H}$ "gây ra" việc tắt cho ô A nên ô B phải được tắt trước ô A, và ngược lại ô A phải được tắt trước ô B. Điều này mâu thuẫn. Do đó f là đơn ánh.

Suy ra $|A| \leq |B| = 1999 \times 2000$.

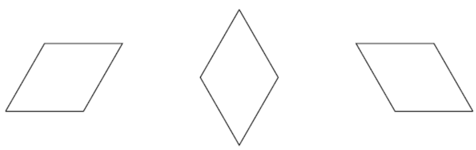
Vậy cả màn hình không bao giờ có thể tắt hết. ■

Ví dụ 6.5. Một lưới tam giác được tạo ra bằng cách phủ kín một tam giác đều cạnh n bằng n^2 tam giác đều cạnh 1 (như hình vẽ). Hỏi có bao nhiêu hình bình hành mà các cạnh của nó nằm trên các đoạn thẳng của lưới?



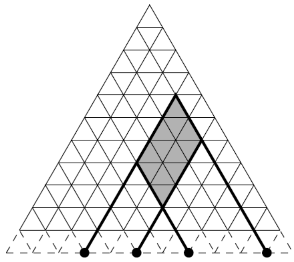
Lời giải: Một cách tiếp cận tự nhiên là đếm trực tiếp tất cả các hình bình hành. Tuy nhiên, cách này đòi hỏi phải hết sức cẩn thận để tránh sai sót và thường dẫn tới các tổng cần xử lý khá phức tạp. Ở đây, chúng ta trình bày một lời giải khác tinh tế hơn bằng cách sử dụng phương pháp song ánh.

Nhận thấy rằng các hình bình hành xuất hiện theo ba hướng khác nhau.



Do tính đối xứng, số hình bình hành ở mỗi hướng là như nhau, vì vậy ta chỉ cần đếm các hình bình hành có hướng "ở giữa" (tức là không có cạnh nằm ngang).

Mở rộng lưới tam giác ban đầu bằng cách thêm một hàng nữa ở phía dưới. Quan sát khéo léo, ta nhận thấy xuất phát từ bất kỳ hình bình hành nào như vậy trong lưới ban đầu, ta có thể kéo dài các cạnh của nó cho đến khi chúng cắt cạnh đáy của hàng mới trong lưới tam giác lớn hơn, và ta sẽ thu được bốn điểm giao khác nhau, như hình dưới.



Ngược lại, nếu bắt đầu từ bốn điểm lưới phân biệt trên cạnh đáy mới này, ta có thể kẻ các đường tạo với phương ngang các góc 60° từ hai điểm đầu tiên và các đường tạo góc 120° từ hai điểm còn lại để thu được một hình bình hành trong lưới ban đầu. Điều này thiết lập một song ánh giữa tập các hình bình hành trong lưới ban đầu không có cạnh ngang và tập các bộ bốn điểm phân biệt trên cạnh đáy mới. Do đó, số hình bình hành loại này là C_{n+2}^4.

Xét cả ba hướng khác nhau, ta suy ra tổng số hình bình hành trong lưới ban đầu là $3C_{n+2}^4$. ■

> ***Nhận xét:***
> Trong ví dụ này, nếu ta không mở rộng lưới tam giác thêm một hàng nữa ở phía dưới, thì với một hình bình hành bất kỳ không có cạnh nằm ngang, khi kéo dài các cạnh của nó cho đến khi chúng cắt đáy tam giác sẽ có 2 trường hợp: hoặc ta sẽ thu được ba điểm giao khác nhau (trường hợp hình bình hành có 1 đỉnh trên đáy tam giác), hoặc ta sẽ thu được bốn điểm giao khác nhau.
> Ta tìm ánh xạ ngược, với trường hợp 4 điểm giao ta thực hiện tương tự lời giải trên. Với trường hợp 3 điểm giao thì từ điểm đầu và điểm giữa, ta kẻ các đường tạo với phương ngang các góc 60°, từ điểm giữa và điểm cuối ta kẻ các đường tạo góc 120°, các giao điểm của 4 đường thẳng này tạo một hình bình hành trong lưới (có 1 đỉnh nằm trên đáy tam giác) . Như vậy ta thiết lập được một song ánh giữa tập các hình bình hành không có cạnh ngang trong lưới và tập bao gồm các bô 3 điểm phân biệt và các bộ 4 điểm phân biệt trên cạnh đáy tam giác. Suy ra, số hình bình hành không có cạnh ngang trong lưới là $C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4$.
> Và rõ ràng $C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 = C_{n+2}^4$.

Ví dụ 6.6. (Moscow MO 1986) Cho tập M gồm 48 số nguyên dương đôi một phân biệt, trong đó mọi ước nguyên tố của chúng đều không vượt quá 30. Chứng minh rằng tồn tại bốn số nguyên dương đôi một phân biệt trong M sao cho tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải: Có đúng 10 số nguyên tố không vượt quá 30:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29.$$

Xét tập

$$Y = \left\{ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{10}^{\alpha_{10}} \mid \alpha_i = 0 \text{ hoặc } 1, i = 1, 2, \ldots, 10 \right\}.$$

Rõ ràng $|Y| = 2^{10} = 1024$.

Gọi X là họ tất cả các tập con gồm 2 phần tử của M (các cặp không xét thứ tự).

Với mỗi $\{a, b\} \in X$, tích ab có thể viết duy nhất dưới dạng

$$ab = K_{ab}^2 \cdot m_{ab}$$

trong đó $K_{ab} \in \mathbb{N}$ và $m_{ab} \in Y$.

Gán mỗi cặp $\{a, b\}$ với số m_{ab}, ta thu được một ánh xạ

$$f : X \to Y$$

Vì

$$|X| = C_{48}^2 = 1128 > 1024 = |Y|,$$

nên f không thể là đơn ánh. Do đó tồn tại hai cặp phân biệt

$$\{a, b\}, \{c, d\} \in X$$

sao cho

$$m_{ab} = m_{cd}$$

Suy ra

$$abcd = K_{ab}^2 m_{ab} \cdot K_{cd}^2 m_{cd} = (K_{ab} K_{cd} m_{ab})^2,$$

là một số chính phương.

Nếu a, b, c, d đôi một phân biệt thì bài toán đã hoàn tất. Nếu không, thì giữa hai cặp chỉ có một phần tử trùng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $b = d, a \neq c$. Khi đó

$$abcd = acb^2$$

là số chính phương, suy ra ac cũng là số chính phương.

Xét tập $M \backslash \{a, b\}$ gồm 46 phần tử. Khi đó

$$C_{46}^2 = 1035 > 1024 = |Y|.$$

Lập luận tương tự, tồn tại hai cặp phân biệt $\{a', b'\}, \{c', d'\}$ sao cho

$$a'b'c'd'$$

là số chính phương.

Nếu bốn số này đôi một phân biệt thì xong. Nếu không, ta lại suy ra tồn tại hai số phân biệt a', c' sao cho $a'c'$ là chính phương. Khi đó kết hợp lại, ta thu được bốn số đôi một phân biệt

$$a, c, a', c' \in M$$

sao cho

$$aca'c'$$

là một số chính phương. Hoàn tất chứng minh. ■

Ví dụ 6.7. (USAMO 1996) Một dãy n phần tử $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, trong đó mỗi phần tử là 0 hoặc 1 , được gọi là dãy nhị phân có độ dài n. Kí hiệu a_n là số các dãy nhị phân độ dài n mà không chứa ba phần tử liên tiếp bằng $0, 1, 0$ theo đúng thứ tự đó. Kí hiệu b_n là số các dãy nhị phân độ dài n mà không chứa bốn phần tử liên tiếp bằng $0, 0, 1, 1$ hoặc $1, 1, 0, 0$ theo đúng thứ tự đó. Chứng minh rằng: $b_{n+1} = 2a_n$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải: Xét ánh xạ f từ tập các dãy nhị phân có độ dài $n+1$ vào tập các dãy nhị phân có độ dài n.

$$(y_1, \ldots, y_{n+1}) \mapsto (y_1 + y_2, y_2 + y_3, \ldots, y_n + y_{n+1}).$$

các phần tử đều được xét theo $\bmod 2$. Đây là một ánh xạ $2-1$

Dưới phép biến đổi này thì

$$\ldots, 1, 1, 0, 0, \ldots \mapsto \ldots, 0, 1, 0, \ldots \quad \text{và} \quad \ldots, 0, 0, 1, 1, \ldots \mapsto \ldots, 0, 1, 0, \ldots,$$

và đây cũng là hai trường hợp duy nhất cho kết quả như vậy.

Do đó, mọi dãy không có bốn phần tử liên tiếp nào là $1, 1, 0, 0$ hoặc $0, 0, 1, 1$ thì khi ánh xạ qua f dãy thu được luôn không có ba phần tử liên tiếp nào là $0, 1, 0$.

Gọi A là tập các dãy nhị phân độ dài $n+1$ có phần tử đầu tiên $y_1 = 0$ và không có bốn phần tử liên tiếp nào là $1, 1, 0, 0$ hoặc $0, 0, 1, 1$. Gọi B là tập các dãy nhị phân độ dài n không có ba phần tử liên tiếp nào là $0, 1, 0$.

Ta có $|B| = a_n$. Xét ánh xạ f thu hẹp trên A là ánh xạ $f' : A \longrightarrow B$. Ta chứng minh f' là một song ánh.

Theo lập luận trên, mỗi dãy trong A khi ánh xạ qua f' thì thu được một dãy trong B. Với chiều ngược lại, mỗi dãy $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ trong B ứng với đúng một dãy $(0, x_1 - 0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$ trong A, tất cả các phần tử trong dãy đều xét theo $\bmod 2$.

$$f'^{-1} : (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n) \mapsto (0, x_1 - 0, x_2 - x_1, x_3 - x_2 \ldots, x_n - x_{n-1}).$$

Do đó f' là song ánh. Suy ra $|A| = |B| = a_n$.

Gọi C là tập các dãy nhị phân độ dài $n+1$ có phần tử đầu tiên $y_1 = 1$ và không có bốn phần tử liên tiếp nào là $1, 1, 0, 0$ hoặc $0, 0, 1, 1$. Lập luận tương tự ta có $|C| = |B| = a_n$.

Ta có: $b_{n+1} = |A| + |C| = 2a_n$.

Hoàn tất chứng minh. ■

Nhận xét:

1. Ta có thể xây dựng một song ánh giữa hai tập A và C

$$(y_1, y_2 \ldots, y_{n+1}) \mapsto (1 - y_1, 1 - y_2, \ldots, 1 - y_{n+1}).$$

2. Một ý tưởng khá tự nhiên của bài toán này là ta thử xây dựng một ánh xạ f từ các dãy nhị phân có độ dài $n+1$ không chứa bốn phần tử liên tiếp nào bằng $0, 0, 1, 1$ hoặc $1, 1, 0, 0$ theo thứ tự đó vào các dãy nhị phân có độ dài n không chứa ba phần tử liên tiếp nào bằng $0, 1, 0$ theo thứ tự. Như vậy ta có thể nghĩ đến việc xây dựng f sao cho các bộ $(0, 0, 1, 1)$ và $(1, 1, 0, 0)$ khi bắn qua f thu được bộ $(0, 1, 0)$.

D Bài tập rèn luyện

Bài tập 6.1. Cho $S = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ và A là một tập con của S gồm 201 phần tử. Nếu tổng các phần tử của A chia hết cho 5 thì tập con A được gọi là một tập con "tốt". Hãy tìm số các tập con "tốt" của S.

Bài tập 6.2. Giả sử n là số chẵn. Có bao nhiêu cách để chọn 4 số phân biệt a, b, c, d (không xét thứ tự) từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho

$$a + c = b + d?$$

Bài tập 6.3. **(Putman 2002)** Cho $n > 1$ là một số nguyên dương và S_n là số các tập con khác rỗng của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho trung bình cộng tất cả các phần tử của nó là một số nguyên. Chứng minh rằng $S_n - n$ là một số chẵn.

Bài tập 6.4. Cho n và k là các số nguyên dương thoả mãn $k < n - k + 1$. Giả sử $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Có bao nhiêu tập con của X có k phần tử mà không có hai số tự nhiên liên tiếp nào.

Bài tập 6.5. Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung nào. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.

Bài tập 6.6. Cho tập $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Mỗi tập con không rỗng của A ta xác định duy nhất một tổng đan dấu theo quy tắc: sắp xếp các phần tử của A theo thứ tự tăng dần sau đó gán luân phiên các dấu $+$ và $-$ sao cho phần tử lớn nhất mang dấu cộng. Hãy tính tổng của tất cả các tổng đan dấu trên.

Bài tập 6.7. Có 40 người tham dự một hội nghị. Cứ mỗi nhóm gồm 19 người thì họ có chung đúng một thần tượng trong hội nghị. (Lưu ý: nếu A là thần tượng của B thì B không nhất thiết là thần tượng của A; ngoài ra, A không thể là thần tượng của chính mình). Hãy chứng minh rằng tại hội nghị này, tồn tại một tập T_0 gồm 20 người sao cho với mọi $P \in T_0$, thì P không phải là thần tượng chung của 19 người còn lại trong T_0.

Bài tập 6.8. **(APMO 1998)** Giả sử F là tập hợp tất cả các bộ gồm n tập $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, trong đó A_i là tập con của tập $\{1, 2, \ldots, 1998\}$. Tính $\displaystyle\sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$.

Bài tập 6.9. Giả sử A là họ các tập con gồm một số các tập con có đúng 3 phần tử của $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, sao cho bất kỳ hai phần tử của A (tức là hai tập con 3 phần tử của I) có tối đa một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một tập con $X \subset I$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Không có phần tử nào của A là tập con của X;
2. $|X| \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$.

Bài tập 6.10. **(Romania MO 1994)** Cho 11 tập hợp $M_1, M_2, \ldots, M_{11}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $|M_i| = 5, \quad i = 1, 2, \ldots, 11;$
2. $|M_i \cap M_j| \neq 0, \quad 1 \leq i < j \leq 11.$

Ký hiệu $T = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{11}$, và với mỗi $x \in T$, đặt

$$n(x) = |\{M_i \mid x \in M_i, 1 \leq i \leq 11\}|,$$

tức $n(x)$ là số tập M_i chứa phần tử x. Đặt $n = \max\{n(x) \mid x \in T\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

Bài tập 6.11. Giả sử rằng không có ba đường chéo nào của một đa giác lồi n cạnh cùng đi qua một điểm nằm trong phần bên trong của đa giác. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm giao nhau của các đường chéo bên trong đa giác đó?

Bài tập 6.12. Giả sử có n điểm $(n \geq 6)$ nằm trên một đường tròn. Mỗi cặp điểm được nối với nhau bằng một đoạn thẳng, và không có ba đoạn thẳng nào cùng đi qua một điểm bên trong đường tròn. Do đó, bất kỳ ba đoạn thẳng nào cắt nhau tại ba điểm sẽ xác định một tam giác. Hãy tìm số tam giác được xác định bởi các đoạn thẳng đó.

Bài tập 6.13. (China TST 1990) Trong một trại toán, bất kỳ m học sinh nào cũng có đúng một người bạn chung, với $m \geq 3$. (Quan hệ bạn bè là đối xứng: nếu A là bạn của B thì B cũng là bạn của A. Ngoài ra, không ai là bạn của chính mình.) Giả sử có P là người có nhiều bạn nhất. Hãy xác định số bạn của P.

Bài tập 6.14. (VMO 2012) Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1. Mỗi ghế có đúng một người ngồi;
2. Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5;
3. Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;
4. Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Bài tập 6.15. (IMO 2002) Cho n là một số nguyên dương. Mỗi điểm (x, y) trên mặt phẳng, trong đó x và y là các số nguyên không âm và $x + y < n$, được tô màu đỏ hoặc xanh, thỏa mãn điều kiện sau: nếu một điểm (x, y) được tô đỏ thì mọi điểm (x', y') với $x' \leq x$ và $y' \leq y$ cũng đều được tô đỏ. Gọi A là số cách chọn n điểm màu xanh sao cho các hoành độ (tọa độ x) của chúng đều khác nhau, và B là số cách chọn n điểm màu xanh sao cho các tung độ (tọa độ y) của chúng đều khác nhau. Hãy chứng minh rằng $A = B$.

PHẦN 2 ĐỀ KIỂM TRA CÁC LỚP CHUYÊN ĐỀ

Trong phần này trình bày một số đề thi của các lớp chuyên đề ở STAR EDUCATION.

§1. ĐỀ KIỂM TRA LỚP 8 CHUYÊN ĐỀ

A Chuyên đề tổ hợp

KIỂM TRA TỔ HỢP 8 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 120 phút

1 Phần 1 - Viết đáp số (2 điểm)

Câu 1. Trả lời đáp số các bài toán sau:

1) Thành rất thích số 1 nên em muốn biểu diễn bất cứ số gặp được nào thành tổng hoặc hiệu của các số gồm toàn chữ số 1. Chẳng hạn để có số 19 hoặc 100, Thành sẽ viết
   - $19 = 11 + 11 - 1 - 1 - 1$ cần 7 chữ số 1;
   - $100 = 111 - 11$ và cần 5 chữ số 1.

   Hỏi số 2024 cần dùng ít nhất bao nhiêu chữ số 1 để biểu diễn?
2) Người ta tính giá trị của các phép nhân

$$1 \times 2 \times 3, 2 \times 3 \times 4, \cdots, 97 \times 98 \times 99$$

   Hỏi có mấy kết quả có tận cùng là 0?
3) Bạn Lượng ghi lần lượt vào bốn thẻ các chữ số $1, 2, 3, 4$. Hỏi Lượng có thể ghép được từ bốn thẻ đó bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 2222.
4) Các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ được dùng để viết thành một số có 5 chữ số và một số có 4 chữ số, mỗi chữ số được dùng 1 lần. Hỏi tổng lớn nhất của hai số đó có thể thu được là mấy?

2 Phần 2 - Trình bày lời giải (8 điểm)

Câu 2 (3 điểm). Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số mà các chữ số thuộc A thỏa:

a) Số chẵn có 5 chữ số khác nhau.
b) Số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 9. (số chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng các số chia hết cho 9).
c) Số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 25.
d) Số có 5 chữ số có chữ số 1 hoặc có chữ số 2.

Câu 3 (1,5 điểm). An viết lên bảng 3 số có một chữ số khác nhau. Bình nhân các số đó theo từng cặp rồi viết kết quả lên bảng. An nhận xét: "Ồ, thật thú vị là các số của bạn viết đều là số có hai chữ số!". Bình tiếp lời: "Đáng ngạc nhiên hơn là tất cả các chữ số từ 1 đến 9 đều có mặt trên bảng, mỗi số đúng một lần!". Tìm tích của 3 số An đã viết.

Câu 4 (2 điểm). Trong một thị trấn có 21 người thật thà luôn nói sự thật và 2000 người dối trá luôn nói dối. Một thầy phù thủy đã chia 2020 người trong số 2021 người này thành 1010 cặp. Mỗi người trong một cặp mô tả người kia là thật thà hoặc nối dối. Kết quả là 2000 người được mô tả là thật thà và 20 người bị gọi là dối trá. Hỏi có bao nhiêu cặp mà có hai người là người dối trá?

Câu 5 (1,5 điểm). Ta gọi một số nguyên dương là ***đẹp*** nếu nó thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- Tất cả các chữ số của nó đều khác không.
- Số đó chia hết cho 11.
- Số đó chia hết cho 12 và nếu thay đổi vị trí giữa các chữ số của nó cho nhau một cách tùy ý, thì số nhận được cũng chia hết cho 12.

Hỏi có bao nhiêu số ***đẹp*** có 10 chữ số.

KIỂM TRA TỔ HỢP 8 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (2,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $2^n \geq n + 1$.

Câu 2 (1,0 điểm). Một người có một cái chai, một cái can, một cái hộp và một cái bình, và mỗi loại đựng trong đó hoặc sữa, hoặc nước chanh, hoặc nước cam, hoặc rượu. Biết rằng rượu và sữa thì không đựng trong chai, còn trong can thì không phải là nước chanh và rượu. Nước chanh thì để giữa chiếc hộp và nước cam, còn chiếc can thì lại để cạnh cái bình và sữa. Hãy cho biết vật dụng nào đựng nước gì ?

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các cặp (X, Y) là các tập con của tập các số nguyên thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) Mỗi tập X, Y có 3 phần tử.

(2) $3 \in X$ và $5 \in Y$.

(3) Tập $X \cap Y$ có đúng một phần tử.

(4) Nếu a, b là hai phần tử phân biệt của X thì $a + b \in Y$.

Câu 4 (2,0 điểm). Bạn An có 12 tấm thẻ, trên mỗi thẻ được ghi một số nguyên từ 1 đến 12, các số trên các thẻ đều phân biệt.

a) Chứng minh rằng bạn An có thể chia 12 tấm thẻ đó thành một số nhóm thỏa mãn tính chất (P) như sau: trong mỗi nhóm có nhiều hơn một tấm thẻ đồng thời số lớn nhất ghi trên một tấm thẻ nào đó bằng tổng các số ghi trên các tấm thẻ còn lại.

b) Nếu bạn An cho bạn Bình n tấm thẻ mang các số từ 1 đến n ($1 \leq n < 12$) thì với những tấm thẻ còn lại bạn An có thể chia thành một số nhóm thỏa mãn tính chất (P) được nữa hay không?

Câu 5 (2,0 điểm). Tập hợp M chứa 4 số nguyên phân biệt được gọi là tập *liên kết* nếu với mỗi $x \in M$ thì ít nhất một trong hai số $x - 1, x + 1$ thuộc M. Gọi U_n là số tập con liên kết của tập $\{1, 2, ..., n\}$.

a) Tìm tất cả các tập liên kết chứa số 1 và 2025.

b) Tính U_7.

c) Xác định giá trị nhỏ nhất của n sao cho $U_n \geq 2025$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho các số a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa $\dfrac{-1}{2} \leq a_i \leq \dfrac{1}{2}$ với $i = 1, 2, 3, 4$. Chứng minh rằng nếu tổng của 3 số bất kì trong bốn số là một số nguyên thì $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

§2. ĐỀ KIỂM TRA LỚP 9 CHUYÊN ĐỀ

A Chuyên đề số học

KIỂM TRA SỐ HỌC 9 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 - 2q^2 = 1$.

b) Tìm các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^2 + 3pq + q^2$ là số chính phương.

Câu 2 (2,0 điểm). Tìm cặp số tự nhiên a, b sao cho $(a, b) = 15$ và $[a, b] = 2835$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $3a^2 + a = 4b^2 + b$. Chứng minh rằng $3a + 3b + 1$ là số chính phương.

Câu 4 (1,5 điểm). Cho số nguyên tố p và số nguyên a không chia hết cho p.

a) Chứng minh trong các số $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho p.

b) Chứng minh rằng $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Câu 5 (1,5 điểm). Kí hiệu $p(a)$ là ước nguyên tố nhỏ nhất của số nguyên dương $a > 1$. Xét m, n là các số nguyên lớn hơn 1.

a) Với mọi số nguyên $a > 1$, chứng minh rằng $p(a) \leq \sqrt{a}$ khi và chỉ khi a là hợp số.

b) Giả sử $m^2 + n = p(m) + [p(n)]^2$, chứng minh rằng $m = n$.

c) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp số $(m; n)$ thỏa mãn

$$m + n = [p(m)]^2 - [p(n)]^2.$$

Câu 6 (1,5 điểm). Kí hiệu $\tau(n)$ là số ước nguyên dương của số nguyên dương n.

a) Chứng minh rằng nếu $n > 1$ và $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ($p_1, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố phân biệt và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các số nguyên dương) là dạng phân tích thành thừa số nguyên tố của n thì

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

b) Chứng minh rằng $\tau(a) + \tau(b) \leq \tau(\gcd(a, b)) + \tau(\operatorname{lcm}(a, b))$ với mọi số nguyên dương a, b.

KIỂM TRA SỐ HỌC 9 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (2,0 điểm). Cho các số nguyên x, y. Chứng minh rằng nếu $5x^2 + 15xy - y^2$ chia hết cho 7 thì $5x^2 + 15xy - y^2$ chia hết cho 49.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$. Chứng minh rằng $(x+y+z)$ chia hết cho 27.

Câu 3 (2,0 điểm). Hãy tìm tất cả bộ ba số nguyên dương phân biệt (p, q, r) khác 1 sao cho $(pqr-1)$ chia hết cho $(p-1)(q-1)(r-1)$.

Câu 4 (1,0 điểm). Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 71.$$

Câu 5 (2,0 điểm). Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 2xy + 3y - 5x + 7 = 0.$$

Câu 6 (2,0 điểm). Cho phương trình

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!, \qquad (1)$$

trong đó x, y, z là ẩn và 9! là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9.

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4.

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1).

KIỂM TRA HÌNH HỌC 9 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (6,0 điểm). Cho đường tròn đường kính AB bán kính bằng 2 và C là một điểm thay đổi trên đường tròn này. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, các đường phân giác trong của tam giác AHC cắt nhau tại E, các đường phân giác trong của tam giác BHC cắt nhau tại F. Hai đường thẳng CE, CF lần lượt cắt AB tại M, N. Hai đường thẳng AE, BF cắt nhau tại I.

a) Chứng minh rằng AI vuông góc với CN.

b) Chứng minh rằng khi độ dài đoạn MN đạt giá trị nhỏ nhất thì tam giác ABC cân.

c) Chứng minh $\sin\widehat{CAI} \le \dfrac{BC}{AC+AB}$. Từ đó suy ra $\sin\alpha \cdot \sin(45^\circ - \alpha) \le \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ với góc nhọn $\alpha < 45^\circ$.

d) Chứng minh rằng $\widehat{MIN} = 90^\circ$ và năm điểm M, N, E, F, I cùng thuộc một đường tròn.

e) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác HEF khi C thay đổi trên đường tròn đường kính AB.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC $(AC > BC)$ có phân giác trong CN $(N \in AB)$ và M là trung điểm AC.

a) Gọi D là giao điểm của BM và CN, E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng NE song song với AC.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{DC}{DN} - \dfrac{AC}{BC} = 1$.

c) Đường thẳng qua E song song với BM cắt AC tại K. Lấy G thuộc AC sao cho tứ giác $ANEG$ là hình bình hành. Chứng minh rằng K là trung điểm của GC.

d) Gọi T là giao điểm của EK và NG. Chứng minh rằng CT là phân giác ngoài của $\widehat{ACB}$.

C Chuyên đề tổ hợp

KIỂM TRA TỔ HỢP 9 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 120 phút

D Phần 1 - Viết đáp số (2 điểm)

Câu 1. Bạn Lượng ghi lần lượt vào bốn thẻ các chữ số $1, 2, 3, 4$. Hỏi Lượng có thể ghép được từ bốn thẻ đó bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 2222.

Câu 2. Hỏi có bao nhiêu hoán vị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 của $1, 2, 3, 4, 5$ sao cho tổng $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2$ chia hết cho 3?

Câu 3. Cho bảng ô vuông 4×4, mỗi ô vuông của bảng đều được điền số 1 hoặc -1. Hỏi có bao nhiêu cách điền thỏa mãn sao cho tích các số trên mỗi hàng và trên mỗi cột đều dương?

Câu 4. Cho số tự nhiên $n = 1!2!3! \cdots 6!7!$. Hỏi n có bao nhiêu ước là số chính phương?

E Phần 2 - Trình bày lời giải (8 điểm)

Câu 5 (3 điểm). Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số mà các chữ số thuộc A thỏa:

a) Số chẵn có 5 chữ số khác nhau.
b) Số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 9. (số chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng các số chia hết cho 9).
c) Số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 25.
d) Số có 5 chữ số có chữ số 1 hoặc có chữ số 2.

Câu 6 (2 điểm). Với mỗi số nguyên dương n, xét phát biểu sau: Trong $2n - 1$ số nguyên bất kỳ, luôn chọn được từ đó n số mà tổng là bội của n. Chứng minh rằng phát biểu này đúng với:

a) $n = 3$ và $n = 5$.
b) $n = 15$.

Câu 7 (2 điểm). Ta gọi một số nguyên dương là ***đẹp*** nếu nó thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- Tất cả các chữ số của nó đều khác không.
- Số đó chia hết cho 11.
- Số đó chia hết cho 12 và nếu thay đổi vị trí giữa các chữ số của nó cho nhau một cách tùy ý, thì số nhận được cũng chia hết cho 12.

Hỏi có bao nhiêu số ***đẹp*** có 10 chữ số.

Câu 8 (1 điểm). Chứng minh rằng trong 20 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 37 luôn tồn tại ba số $a < b < c$ mà $a + b = c$.
Hỏi kết luận bài toán trên còn đúng không nếu thay 20 bằng một số nhỏ hơn?

F Chuyên đề đại số

KIỂM TRA ĐẠI SỐ 9 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (2 điểm).

a) Cho biểu thức $s = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2025} - \frac{1}{\sqrt[3]{2025}}\right)$. Chứng minh rằng biểu thức $\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)^3$ có giá trị là số chính phương.

b) Tìm một đa thức có hệ số nguyên nhận $x = s$ làm nghiệm.

Câu 2 (1.5 điểm). Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một thỏa mãn $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^3 - b^3 - c^3$.

b) $B = (a+b+1)(b+c+1)(c+a+1)$.

Câu 3 (2 điểm). Xét đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện: Nếu chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ thì được dư là $2x$, còn nếu chia $P(x)$ cho $x - 2$ thì được dư là 1.

a) Tính $P(-1) + P(1) + P(2)$.

b) Tìm đa thức dư có được khi thực hiện phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $(x^2-1)(x-2)$.

c) Tìm **một** đa thức $P(x)$ thoả mãn các điều kiện đề cho, đồng thời đa thức $P(x) - 2$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x + 1$.

Câu 4 (2 điểm). Cho các biểu thức $A = (x+y)(y+z)(z+x)$ và $B = (x+y+z)(xy+yz+zx)$, trong đó x, y, z là các số không âm. Chứng minh rằng

a) $B - A = xyz$;

b) $A \geq \frac{8}{9}B$;

c) $B \geq 9xyz$.

Câu 5 (1 điểm). Cho a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a < b < c < d$ và

$$(d-a)\left(\frac{a^2}{b-a} + \frac{b^2}{c-b} + \frac{c^2}{d-c}\right) = (a+b+c)^2.$$

Chứng minh rằng $ad = bc$.

Câu 6 (1,5 điểm). Đặt $a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$, $b = \sqrt[3]{2}$.

a) Chứng minh rằng $a = \frac{\sqrt[3]{3}}{b+1}$.

b) Chứng minh rằng a có thể được viết dưới dạng tổng ba căn bậc ba của các số hữu tỉ, tức là tồn tại các số m, n, p hữu tỉ sao cho

$$a = \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}.$$

KIỂM TRA ĐẠI SỐ 9 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (3 điểm).

a) Chứng minh

$$\left(\frac{2}{\sqrt{6}-1}+\frac{3}{\sqrt{6}-2}+\frac{3}{\sqrt{6}-3}\right)\cdot\frac{5}{9\sqrt{6}+4}=\frac{1}{2};$$

b) Chứng minh rằng nếu $a, b > 0$ thì ta luôn có

$$\frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}}-2\sqrt{b}=\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2.$$

Câu 2 (2 điểm). Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=x+2.$$

Câu 3 (2 điểm). Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2+1}=\sqrt[3]{3x^2-x-2}-\sqrt[3]{2x^2-x-3}.$$

Câu 4 (2 điểm). Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x^2+x+2}+x=2+\sqrt{4x^2-x-2}.$$

Câu 5 (1 điểm). Giải phương trình sau:

$$2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10=\frac{5(x^2+4x+9)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x+1}}.$$

§3. ĐỀ KIỂM TRA LỚP 10 CHUYÊN ĐỀ

A Chuyên đề hình học

KIỂM TRA HÌNH HỌC 10 CHUYÊN ĐỀ - 2025-2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có D là trung điểm của BC. Gọi T là giao điểm khác A của AD và (O). Một đường tròn qua B, T tiếp xúc với cạnh AC tại E, một đường tròn qua C, T tiếp xúc với cạnh AB tại F.

a) Gọi K là giao điểm của CT và AB, L là giao điểm của BT và AC. Chứng minh rằng $KL \| BC$.

b) Chứng minh rằng $EF \| BC$.

Câu 2 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, điểm A thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ đường kính AD của (O), đường thẳng CD cắt AB tại E, BD cắt AC tại F. Đường thẳng đối xứng với BC qua phân giác $\angle ACD$ cắt EO tại M, đường thẳng đối xứng với BC qua phân giác $\angle ABD$ cắt FO tại N. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O).

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường thẳng qua I vuông góc với AI cắt AB, AC lần lượt tại S, R. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BSI và CRI cắt nhau tại điểm M khác I.

a) Chứng minh rằng RS tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC và $M \in (O)$.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MSR tiếp xúc với (O).

c) Gọi K là điểm thuộc (O) khác A sao cho $\angle AKI = 90^\circ$, L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (IBC). Chứng minh rằng các đường thẳng AK, SR, BC, ML đồng quy.

d) Chứng minh rằng KL, AM, OI đồng quy tại một điểm T.

e) Gọi X là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC và BC. Chứng minh rằng hai đường thẳng AX đẳng giác với đường thẳng AT trong $\angle BAC$.

§4. ĐỀ KIỂM TRA LỚP 11 ĐỘI TUYỂN

A Chuyên đề hình học

KIỂM TRA HÌNH HỌC 11 ĐỘI TUYỂN - 2025-2026

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. Cho dãy (u_n) định nghĩa bởi $u_{n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{4}u_n\right)$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng (u_n) hội tụ.

b) Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ hội tụ.

Câu 2. Cho tam giác nhọn ABC không cân, I là tâm nội tiếp và ω là đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. AD cắt ω tại $J \neq D$, và đường tròn ngoại tiếp tam giác BCJ cắt ω tại $K \neq J$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và CEK cắt nhau tại $L \neq K$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh M, I, L thẳng hàng.

Câu 3. Cho một số nguyên $n \geq 2$. Gọi một số nguyên dương T là số P, nếu tồn tại các tập con $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \geq 3)$ khác nhau và khác rỗng của $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, thỏa mãn $T = \sum\limits_{i=1}^{m} |A_i|$, và với mọi $p, q, r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p \neq q, q \neq r, r \neq p$, ta có $A_p \cap (A_q \triangle A_r) = \varnothing$ hoặc $A_p \subseteq (A_q \triangle A_r)$. Tìm số P lớn nhất.

Lưu ý: $|A|$ là số phần tử trong tập A.

$$X \triangle Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

KIỂM TRA HÌNH HỌC 11 ĐỘI TUYỂN - 2025-2026

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho dãy số (u_n) có $u_1 > 0$ và

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}^2 + u_{n-2}^3 + \cdots + u_1^n \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng nếu (u_n) bị chặn trên, thì ta có thể chọn 1 là chặn trên.

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Câu 2. Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots$ là dãy tất cả các hợp số theo thứ tự tăng dần. Định nghĩa dãy $b_1, b_2, b_3, \ldots$ cho bởi

$$b_n = na_1^2 + (n-1)a_2^2 + \cdots + 2a_{n-1}^2 + a_n^2.$$

Có nhiều nhất bao nhiêu số liên tiếp trong dãy (b_n) mà cùng chia hết cho 3?

Câu 3. Trong tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$, gọi Z là điểm bất kì nằm trên đoạn BC. Lấy các điểm E, F tương ứng nằm trên AC, AB thỏa $BF = BZ$, $CE = CZ$. Gọi I_B, I_C tương ứng là tâm bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. EI_C cắt FI_B tại T, và gọi K là trung điểm cung BAC. Cho KT, KZ cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại điểm thứ 2 tương ứng P, Q.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{KQ}{KI_B} = \dfrac{BQ}{BF}$.

b) Chứng minh rằng T, F, P, Q, E đồng viên.

Câu 4. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{2x^2+xy} + \sqrt{2y^2+yz} + \sqrt{2z^2+zx}.$$

PHẦN 3 ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN

Trong phần này trình bày một số đề thi trong các kì thi chọn đội tuyển, dự tuyển Thành phố Hồ Chí Minh và Phổ thông năng khiếu, đề thi Học sinh giỏi quốc gia năm học 2025-2026.

§1. ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU 2025-2026

A Ngày 1

Câu 1. Cho đa thức $P(x) = a_0x^{2025} + a_1x^{2024} + \cdots + a_{2025}$ nhận $\alpha = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$ làm nghiệm. Chứng minh $A = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2024} - a_{2025}$ chia hết cho 7.

Lời giải: Đặt $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{7}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = -\cos\frac{4\pi}{7}\\
&\Rightarrow 4\cos^3\frac{\pi}{7} - 3\cos\frac{\pi}{7} = -\left(2\cos^2\frac{2\pi}{7} - 1\right)\\
&\Rightarrow 4\alpha^3 - 3\alpha = 1 - 2\left(2\alpha^2 - 1\right)^2\\
&\Rightarrow 8\alpha^4 + 4\alpha^3 - 8\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0\\
&\Rightarrow (\alpha+1)(8\alpha^3 - 4\alpha^2 - 4\alpha + 1) = 0\\
&\Rightarrow 8\alpha^3 - 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \text{ (do } \alpha + 1 \neq 0).\\
&\Rightarrow 8 - \frac{4}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} = 0 \text{ (do } \alpha \neq 0)\\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{\alpha} + 8 = 0.
\end{aligned}$$

Vậy đa thức $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 8$ là một đa thức hệ số nguyên nhận $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$ làm nghiệm.

Giả sử $P(x)$ có nghiệm hữu tỉ. Do $P(x)$ đơn khởi nên nghiệm hữu tỉ này là số nguyên và là ước của hệ số tự do, do đó nghiệm này chỉ có thể là $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$. Các giá trị này thử lại không thoả mãn, do đó $P(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Nói riêng, $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$ là số vô tỉ.

Ta có nhận xét: không tồn tại đa thức bậc nhất hệ số hữu tỉ nhận $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$ làm nghiệm $(*)$. Thật vậy, giả sử có đa thức $ax+b$ nhận $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}$ làm nghiệm ($a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$), khi đó

$$a \cdot \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}} + b = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}} = -\frac{b}{a},$$

vô lí do $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}$ là số vô tỉ.

Giả sử tồn tại đa thức bậc hai $Q(x)$ hệ số nguyên nhận $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}$ làm nghiệm. Lấy $P(x)$ chia cho $Q(x)$

$$P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x),$$

với $R(x)$ là đa thức với hệ số hữu tỉ, có bậc nhỏ hơn 2 nhận $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}$ làm nghiệm. Xét các trường hợp:

Trường hợp 1. $R(x)$ là hằng số, khi đó $R(x) \equiv 0$ và $P(x) = Q(x) \cdot H(x)$. Hơn nữa do $\deg P = 3, \deg Q = 2$ nên $\deg H = 1$. Đặt $H(x) = a'x + b'$ ($a', b' \in \mathbb{Q}, a' \neq 0$), khi đó

$$P(x) = (a'x + b') \cdot Q(x) \Rightarrow P\left(-\frac{b'}{a'}\right) = 0.$$

Vô lý do $P(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

Trường hợp 2. $R(x)$ là đa thức bậc nhất, khi đó

$$P\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\right) = Q\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\right) \cdot H\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\right) + R\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\right) \Leftrightarrow R\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}\right) = 0.$$

Tuy nhiên theo nhận xét ở $(*)$ ta có ngay điều mâu thuẫn.

Tóm lại, $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}$ làm nghiệm. Khi đó nếu đa thức $P_0(x) = a_0x^{2025} + a_1x^{2024} + \ldots + a_{2024}x + a_{2025}$ cũng nhận $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{7}}$ làm nghiệm thì

$$P_0(x) = P(x) \cdot S(x),$$

trong đó $S(x)$ là đa thức hệ số nguyên (do $P(x)$ đơn khởi). Do đó

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{2024} - a_{2025} &= P_0(-1) \\ &= P(-1) \cdot S(-1) \\ &= 7S(-1) \,\vdots\, 7 \ (S(-1) \in \mathbb{Z} \text{ do } S(x) \in \mathbb{Z}[x]). \end{aligned}$$

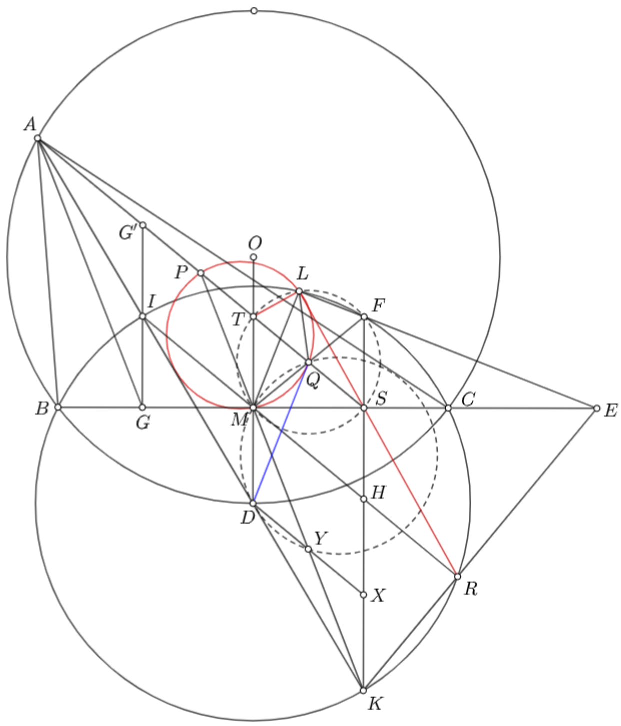
Vậy $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{2024} - a_{2025} \,\vdots\, 7$. ■

Câu 2. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Điểm M là trung điểm BC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua A song song với IM cắt BC tại S, OM cắt SA tại T. Đường tròn (ω) ngoại tiếp tam giác BIC. IM cắt (ω) tại R. RS cắt (ω) tại L.

(a) Chứng minh: $\widehat{TLS} = 90^\circ$.

(b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AS, TS. Chứng minh khi A thay đổi thì tiếp tuyến tại Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQL đi qua một điểm cố định.

Lời giải: Xét các điểm như hình vẽ bên dưới, trường hợp khác chứng minh tương tự.



a) **Cách 1.** Gọi D là trung điểm cung BC nhỏ của đường tròn (O) thì D là tâm của (BIC). Gọi K là điểm đối xứng của I qua D, kẻ $KS' \perp BC$ (S' thuộc BC) thì M là trung điểm của GS', với G là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BC. Do $S'(ABIK) = -1$ và $KS' \parallel IG$ nên nếu G' là điểm đối xứng của G qua I thì A, G', S' thẳng hàng; dẫn đến $IM \parallel G'S'$. Vậy nên S trùng S'.

Gọi H là giao điểm của IM và KS thì H là trực tâm của tam giác KBC. Gọi F là điểm đối xứng của H qua BC thì $F \in (BIC)$. KR cắt BC tại E thì $(BCSE) = -1$, chiếu hàng điểm này qua tâm R thì $(KL, BC) = -1$, suy ra L, F, E thẳng hàng. Từ đây thu được $EF \cdot EL = EB \cdot EC = ES \cdot EM$, nên là tứ giác $LFSM$ nội tiếp.

Tứ giác $TMHS$ là hình bình hành nên tứ giác $TMSF$ là hình chữ nhật. Vậy nên L, T, M, S, F cùng thuộc đường tròn đường kính TS. Nói riêng, $\widehat{TLS} = 90^\circ$.

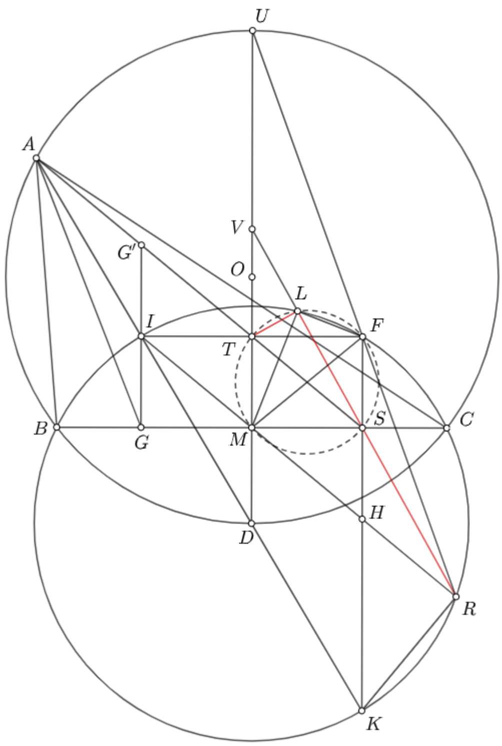
Cách 2. Ta có $KS \perp BC$. Định nghĩa lại điểm F trong hình vẽ trên: F là giao điểm thứ hai của IT và (BIC). Khi đó do $IFSG$ là hình chữ nhật nên F, S, K thẳng hàng.

Gọi U là điểm đối xứng của D qua O. Ta chứng minh R, F, U thẳng hàng. Do $I(BCMF) = -1$ nên $(BC, RF) = -1$, hay tứ giác $BRCF$ điều hòa. Lại có UB, UC là tiếp tuyến của (BIC) nên suy ra R, F, U thẳng hàng. Do S là trung điểm của FH nên theo bổ đề hình thang, gọi

V là giao điểm của RS và DU thì V là trung điểm của MU. Ta có:

$DC^2 = DM \cdot DU = (VD - VM)(VD + VM) = VD^2 - VM^2 \Rightarrow VM^2 = VD^2 - DC^2 = VL \cdot VR.$

Dẫn đến $\widehat{VML} = \widehat{VRM} = \widehat{VST}$, do đó tứ giác $TLSM$ nội tiếp, thành ra $\widehat{TLS} = 90^\circ$.



b) Do $IH \parallel AS$ và M là trung điểm IH nên theo bổ đề hình thang, ta có K, M, P thẳng hàng. Suy ra

$$\widehat{MPQ} = \widehat{KMH} = \widehat{KSR} = \widehat{LSF} = \widehat{LMF} = \widehat{MLQ}.$$

Dẫn đến M, Q, L, P đồng viên. Ta chứng minh tiếp tuyến tại Q của (LPQ) đi qua D. Gọi X là trung điểm KH, Y là trung điểm DX thì $DX \parallel MH \parallel PS$ và tứ giác $MFXD$ là hình thang cân, dẫn đến $MQYD$ cũng là hình thang cân. Ta có: $\widehat{MQD} = \widehat{MYD} = \widehat{MPQ}$; tức là DQ tiếp xúc với (MPQ), hay DQ tiếp xúc với (LPQ). Rõ ràng D cố định nên ta có điều phải chứng minh.

■

Câu 3. Xét số $n = 31^x - 5^y$ với x, y là các số nguyên dương.

(a) Tìm cặp số $(x; y)$ sao cho $n = 2p$ với p là số nguyên tố không quá 13.
(b) Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ sao cho $|n|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Xét modulo 5 hai vế, ta được $2p \equiv 1 \pmod 5$ nên $p \equiv 3 \pmod 5$, mà $p \leq 13$ nên $p \in \{3; 13\}$.
- Với $p = 3$, ta được $31^x - 5^y = 6$. Ta được $(x; y) = (1; 2)$ là một cặp số thỏa mãn.
- Với $p = 13$, ta được $31^x - 5^y = 26$. Ta được $(x; y) = (1; 1)$ là một cặp số thỏa mãn.

b) Giả sử $|n| = |31^x - 5^y| < 6$, vì $31^x - 5^y$ chẵn và $31^x - 5^y \equiv 1 \pmod 5$ nên $31^x - 5^y = -4$.
- Nếu $y = 3k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, ta được

$$31^x = 5^y - 4 = 125^k - 4 \equiv -3 \equiv 28 \pmod{31} \quad \text{(Vô lý)}.$$

- Nếu $y = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, ta được

$$31^x = 5^y - 4 = 125^k \cdot 5 - 4 \equiv 1 \pmod{31} \quad \text{(Vô lý)}.$$

- Nếu $y = 3k+2$ $(k \in \mathbb{N})$, ta được

$$31^x = 5^y - 4 = 125^k \cdot 5^2 - 4 \equiv 21 \pmod{31} \quad \text{(Vô lý)}.$$

Vì vậy, $|31^x - 5^y| \geq 6$, chú ý rằng $31^x - 5^y \equiv 1 \pmod 5$ nên ta chỉ xét phương trình $31^x - 5^y = 6$. Xét modulo 3 hai vế, ta được $1 - (-1)^y \equiv 0 \pmod 3$, suy ra y chẵn.

Giả sử $y \geq 4$, khi đó $31^x - 6 \,\vdots\, 5^3$ hay $31^x \equiv 6 \pmod{5^3}$, giải phương trình đồng dư này ta được $x = 25k + 21$ $(k \in \mathbb{N})$. Lấy modulo 11 hai vế, với chú ý $31^{25k+21} \equiv 31 \equiv 9 \pmod{11}$, ta được

$$9 - 5^y \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow 5^y \equiv 3 \pmod{11}.$$

Từ đây ta suy ra $y \equiv 2 \pmod 5$. Tiếp tục lấy modulo 101 hai vế, với chú ý $31^{25k+21} \equiv 79 \pmod{101}$, ta được

$$79 - 5^y \equiv 6 \pmod{101} \Rightarrow 5^y \equiv 73 \pmod{101}. \tag{3.1}$$

Chú ý rằng $5^{25} \equiv 1 \pmod{101}$ và $y \equiv 2 \pmod 5$ nên ta xét $y = 25l + r$ với $l \in \mathbb{N}$ và $r \in \{2; 7; 12; 17; 22\}$, ta thấy rằng không có giá trị nào của r thỏa mãn (3.1).
Vậy $y = 2$ và từ đó $x = 1$. Tóm lại, $|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $(x; y) = (1; 2)$. ■

B Ngày 2

Câu 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = xy + yz + zx$. Chứng minh rằng

$$\frac{x - yz}{x + 2yz} + \frac{y - zx}{y + 2zx} + \frac{z - xy}{z + 2xy} \geq 0.$$

Lời giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{x}{x + 2yz} + \frac{y}{y + 2zx} + \frac{z}{z + 2xy} \geq 1.$$

Ta có:

$$\frac{x}{x + 2yz} + \frac{y}{y + 2zx} + \frac{z}{z + 2xy} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 6xyz}.$$

Do đó cần chứng minh:

$$(x+y+z)^2 \geq x^2+y^2+z^2+6xyz \Leftrightarrow xy+yz+zx \geq 3xyz \Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z).$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. ■

Câu 5. Cho đường tròn (O) với cung BC cố định và điểm A di động sao cho $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Gọi I, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc B, C của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác II_bI_c cắt đường tròn (O) tại E và F. Đường thẳng EF cắt BC tại D.

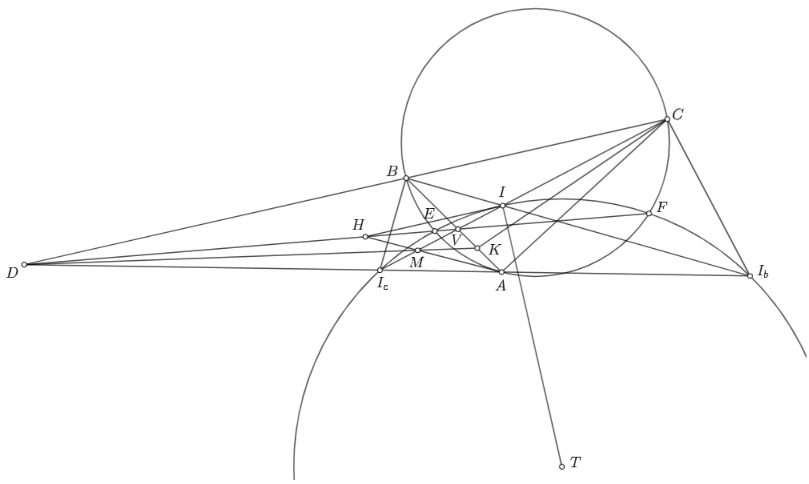
a) Chứng minh rằng đường thẳng AD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Lấy H trên EF sao cho $IH \parallel BC$. Lấy K trên đoạn AB sao cho CK, CH đẳng giác trong $\widehat{ACB}$, L trên đường thẳng AC sao cho BL, BH đẳng giác trong $\widehat{ABC}$. Đường thẳng DK cắt CI tại M, đường thẳng DL cắt BI tại N. Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với (O).

Lời giải:

a) Gọi D' là giao điểm I_bI_c và BC. Ta có tứ giác I_cBCI_b nội tiếp nên $\overline{D'B} \cdot \overline{D'C} = \overline{D'I_b} \cdot \overline{D'I_c}$, suy ra D' thuộc trục đẳng phương của (O) và (II_bI_c). Kéo theo D', E, F thẳng hàng, hay D' trùng D. Lúc này D, I_b, I_c, A thẳng hàng, hay AD là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ nên đi qua điểm J là trung điểm cung BAC cố định.

b) Gọi BU, CV là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Tứ giác $AIBI_c$ nội tiếp nên $\overline{VI} \cdot \overline{VI_c} = \overline{VA} \cdot \overline{VB}$, do đó V, E, F thẳng hàng. Tương tự, ta có U, V, E, F thẳng hàng.



Bài toán phụ. Cho tam giác ABC có AP, AQ đẳng giác trong $\widehat{BAC}$. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của BP và CQ, BQ và CP. Khi đó AX, AY đẳng giác trong $\widehat{BAC}$.

Trở lại bài toán, xét tam giác ADC có CH, CK đẳng giác trong $\widehat{ACD}$ có DH cắt AK tại V nên nếu gọi M' là giao điểm của DK và AH thì theo bài toán phụ, CV và CM' đẳng giác trong $\widehat{ACD}$. Mà CV là phân giác của $\widehat{ACD}$ nên phải có M trùng M', hay A, H, M thẳng hàng. Tương tự, ta có A, H, N thẳng hàng. Vậy nên yêu cầu đề bài tương đương với cần chứng minh AH tiếp xúc với (O).

Gọi T là tâm của (II_bI_c) thì IT vuông góc với BC, thành ra $IT \perp IH$, hay HI là tiếp tuyến của (II_bI_c). Gọi H' là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O) và IH. Ta có:

$$\widehat{H'AI} = \widehat{H'AB} + \widehat{BAI} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{BCI} + \widehat{ACI} + \widehat{IAC} = \widehat{H'IV} + \widehat{VIA} = \widehat{H'IA}.$$

Do đó tam giác $H'IA$ cân tại H', suy ra $H'I^2 = H'A^2$ nên H' thuộc trục đẳng phương của (O) và (II_bI_c), tức là H', E, F thẳng hàng. Điều này đồng nghĩa với H trùng H'. Hoàn tất chứng minh.

■

Câu 6. Cho một bảng gồm $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$). Tọa độ của một ô sẽ được biểu thị là $(a; b)$ với a là số thứ tự của cột từ trái qua phải, b là số thứ tự của hàng từ dưới lên trên. Xét một dãy ô $C = (a_1; b_1), (a_2; b_2), \ldots, (a_m; b_m)$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là dãy ô tăng dần nếu thỏa mãn

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_m \quad \text{và} \quad b_1 < b_2 < \ldots < b_m.$$

a) Gọi $A_i = \{(i; j) : 1 \leq i \leq j \leq n\} \cup \{(j; i) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$. Chứng minh rằng với mọi dãy tăng dần bất kỳ luôn giao với nhiều nhất một phần tử của A_i.

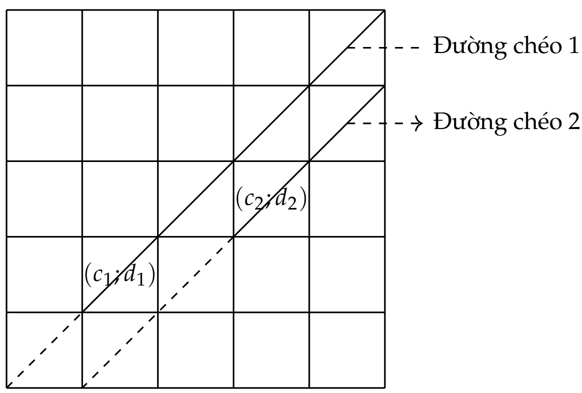
b) Cho k là số nguyên dương không lớn hơn $2n-1$ và $C_1, C_2, \ldots, C_k$ là các dãy ô tăng dần. Chứng minh rằng:
$$|C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k| \leq kn - \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor.$$

c) Tìm một cấu hình thỏa mãn dấu bằng của bất đẳng thức trên.

Lời giải:

a) Xét dãy $C = (a_1; b_1), (a_2; b_2), \ldots, (a_m; b_m)$ là một dãy ô tăng tùy ý. Giả sử tồn tại A_i sao cho $C \cap A_i$ có chứa hai phần tử phân biệt $(a_x; b_x), (a_y; b_y)$ với $a_x < a_y, b_x < b_y$. Đặt $D_i = \{(i; j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}, E_i = \{(j; i) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$. Rõ ràng $(a_x; b_x), (a_y; b_y)$ không thể cùng thuộc D_i hoặc E_i. Xét trường hợp $(a_x; b_x) \in D_i, (a_y; b_y) \in E_i$. Khi đó $a_x = i = b_y$ và $a_x \leq b_x, a_y \geq b_y$. Điều này là mâu thuẫn với $b_x < b_y$. Trường hợp $(a_x; b_x) \in E_i, (a_y; b_y) \in D_i$ được chứng minh tương tự cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $C \cap A_i$ có không quá một phần tử.

b) Với dãy tăng dần $C = (a_1; b_1), (a_2; b_2), \ldots, (a_m; b_m)$ bất kỳ, Ta nói ô $(a_x; b_x)$ *bé hơn* $(a_y; b_y)$ nếu $a_x < a_y$ và $b_x < b_y$.



- Xét trong C_1, chọn phần tử bé nhất trong C_1, gọi là $(c_1; d_1)$. Kẻ đường chéo từ trái sang phải, từ dưới lên trên đi qua ô $(c_1; d_1)$, gọi đây là *đường chéo* 1. Ta có số phần tử của C_1 sẽ không quá số ô trong đường chéo 1.
- Xét trong C_2, chọn phần tử $(c_2; d_2)$ bé nhất mà không thuộc đường chéo 1. Kẻ *đường chéo* 2 đi qua $(c_2; d_2)$. Khi đó $|C_1 \cup C_2|$ không quá tổng số ô trong hai đường chéo 1 và 2.
- ...

Lập luận tương tự, ta có $|C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k|$ không quá tổng số ô trong các đường chéo $1, 2, \ldots, k$. Gọi tổng số ô trong các đường chéo $1, 2, \ldots, k$ là S, xét hai trường hợp:

1. Với k lẻ, đặt $k = 2l + 1$.

$$\begin{aligned} S &\leq n + 2(n-1) + \ldots + 2(n-l) = n(2l+1) - 2(1 + 2 + \ldots + l) \\ &= nk - l(l+1) = nk - \frac{k^2 - 1}{4} \leq nk - \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

2. Với k chẵn, đặt $k = 2m$, ta có:

$$\begin{aligned} S &\leq n + 2(n-1) + \ldots + 2(n-m+1) + n - m \\ &= n(2m-2+2) - 2(1+2+\ldots+(m-1)) - m \\ &= nk - (m-1)m - m = nk - m^2 = nk - \frac{k^2}{4} = nk - \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có điều phải chứng minh.

c) Chọn $k = 1, C_1 = (1;1), (2;2), \ldots, (n;n)$. Khi đó $|C_1| = n$ và

$$kn - \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor = n.$$

Vậy $|C_1| = kn - \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor$.

■

§2. ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH 2025-2026

A Ngày 1

Câu 1. Cho các dãy số thực $(a_n), (b_n), (c_n)$ thoả mãn $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 4$ và với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có

$$a_n = a_{n-1} + \frac{c_{n-1}}{n},\ b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n},\ c_n = c_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n}.$$

Xét dãy số (d_n) xác định bởi: $d_n = (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - a_n)^2,\ n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_n}{d_{n-1}}$.

Lời giải: Đặt $x_n = a_n - b_n, y_n = b_n - c_n, z_n = c_n - a_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, ta có

$$x_n = a_n - b_n = \left(a_{n-1} + \frac{c_{n-1}}{n}\right) - \left(\frac{b_{n-1}}{n} + \frac{a_{n-1}}{n}\right) = a_{n-1} - b_{n-1} + \frac{c_{n-1} - a_{n-1}}{n} = x_{n-1} + \frac{z_{n-1}}{n}.$$

■ Tương tự với $(y_n), (z_n)$, ta thu được

$$x_n = x_{n-1} + \frac{z_{n-1}}{n},\ y_n = y_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{n},\ z_n = z_{n-1} + \frac{y_{n-1}}{n},\ \forall n \geq 2.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} d_n &= \left(x_{n-1} + \frac{z_{n-1}}{n}\right)^2 + \left(y_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{n}\right)^2 + \left(z_{n-1} + \frac{y_{n-1}}{n}\right)^2 \\ &= x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + z_{n-1}^2 + \frac{2}{n}\left(x_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}z_{n-1} + z_{n-1}x_{n-1}\right) + \frac{1}{n^2}\left(x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + z_{n-1}^2\right),\ \forall n \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} = (a_{n-1} - b_{n-1}) + (b_{n-1} - c_{n-1}) + (c_{n-1} - a_{n-1}) = 0,\ \forall n \geq 2$ nên

$$\begin{aligned} &(x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1})^2 = 0,\ \forall n \geq 2 \\ &\Leftrightarrow 2\left(x_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}z_{n-1} + z_{n-1}x_{n-1}\right) = -\left(x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + z_{n-1}^2\right) = -d_{n-1},\ \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$d_n = d_{n-1} - \frac{1}{n}d_{n-1} + \frac{1}{n^2}d_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)d_{n-1},\ \forall n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{d_n}{d_{n-1}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},\ \forall n \geq 2.$$

Đến đây cho $n \to +\infty$, kết hợp với $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$ ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_n}{d_{n-1}} = 1$.

Câu 2. Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực có bậc không vượt quá 2025. Biết rằng $P(k^2) = k$ với mọi $k \in \overline{0, 2025}$. Đặt $f(x) = \begin{cases} \dfrac{P(x^2) - x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ -1, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x+1) - f(x) = 0$ có đúng 4048 nghiệm thực phân biệt.

b) Chứng minh rằng $P(2026^2) = C_{4050}^{2025} + 2026$.

Lời giải:

a) Với $x \neq 0, -1$, ta có

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \frac{P\big((x+1)^2\big) - (x+1)}{x+1} - \frac{P(x^2) - x}{x} \\ &= \frac{xP\big((x+1)^2\big) - (x+1)P(x^2)}{x(x+1)} = \frac{S(x)}{x(x+1)}, \end{aligned}$$

trong đó
$$S(x) = xP\big((x+1)^2\big) - (x+1)P(x^2).$$

Với mỗi $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2024\}$, ta có $P(m^2) = m$ và $P((m+1)^2) = m+1$. Do đó

$$S(m) = mP\big((m+1)^2\big) - (m+1)P(m^2) = m(m+1) - (m+1)m = 0.$$

Do đó đa thức $S(x)$ nhận $0, 1, 2, \ldots, 2024$ làm nghiệm.
Ta cũng có

$$S(-m-1) = (-m-1)P((-m-1)^2) + (m)P(m^2) = (-m-1)m + m(m+1) = 0.$$

Do đó đa thức $S(x)$ nhận $-1, -2, \ldots, -2025$ làm nghiệm.
Cuối cùng, chú ý rằng $S(x)$ có bậc không vượt quá 4050 (do hệ số bậc 4051 bị triệt tiêu) nên $S(x)$ có tối đa 4050 nghiệm thực phân biệt. Do đó $S(x)$ có đúng 4050 nghiệm phân biệt là $-2025, -2024, \ldots, 2023, 2024$. Dễ dàng kiểm tra được -1 và 0 không là nghiệm của phương trình
$$f(x+1) - f(x) = 0.$$
Vậy phương trình $f(x+1) - f(x) = 0$ có đúng $4050 - 2 = 4048$ nghiệm thực phân biệt.

b) Theo giả thiết thì đa thức $P(x)$ có bậc không vượt quá 2025 và $P(k^2) = k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, 2025$. Sử dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x)$ với các mốc nội suy $0^2, 1^2, \ldots, 2025^2$, ta được

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2025} P(i^2) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} \frac{x - j^2}{i^2 - j^2}.$$

Do đó
$$P(2026^2) = \sum_{i=0}^{2025} P(i^2) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} \frac{2026^2 - j^2}{i^2 - j^2}. \tag{1}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} (2026^2 - j^2) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} (2026 - j)(2026 + j) \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} (2026 - j) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} (2026 + j) \\ &= \frac{2026!}{(2026 - i)} \cdot \frac{4051!}{(2026 + i)2025!} = \frac{2026 \cdot 4051!}{2026^2 - i^2}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i^2-j^2) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i-j)(i+j)\\
&= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i-j)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i+j)\\
&= i!(2025-i)!(-1)^{2025-i}\frac{(i+2025)!}{(i-1)!2i}\\
&= i!(2025-i)!(-1)^{i+1}\frac{(i+2025)!}{2i!}\\
&= \frac{(2025-i)!(i+2025)!(-1)^{i+1}}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned}
VP(1) &= \sum_{i=0}^{2025} P(i^2)\frac{2026\cdot 4051!}{2026^2-i^2}\cdot\frac{2}{(2025-i)!(i+2025)!(-1)^{i+1}}\\
&= \sum_{i=0}^{2025}\frac{i(-1)^{i+1}4052!}{(2026-i)!(2026+i)!} = \sum_{i=0}^{2025} i(-1)^{i+1}C_{4052}^{i+2026}.
\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta chứng minh $\sum\limits_{i=0}^{2025} i(-1)^{i+1}C_{4052}^{i+2026} = 2026 + C_{4050}^{2025}$.

Do $C_n^i + C_n^{i+1} = C_{n+1}^{i+1}$, $\forall 0\le i<n$ nên

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2025} i(-1)^{i+1}C_{4052}^{i+2026} &= \sum_{i=0}^{2025} i(-1)^{i+1}C_{4052}^{2026-i}\\
&= C_{4052}^{2025} - 2C_{4052}^{2024} + 3C_{4052}^{2023} + \cdots - 2024C_{4052}^{2} + 2025C_{4052}^{1}\\
&= (C_{4051}^{2025}+C_{4051}^{2024}) - 2(C_{4051}^{2024}+C_{4051}^{2023}) + 3(C_{4051}^{2023}+C_{4051}^{2022}) + \cdots\\
&\quad - 2024(C_{4051}^{2}+C_{4051}^{1}) + 2025(C_{4051}^{1}+C_{4051}^{0})\\
&= C_{4051}^{2025} - C_{4051}^{2024} + C_{4051}^{2023} + \cdots + C_{4051}^{1} + 2025\\
&= (C_{2024}^{4050}+C_{4050}^{2025}) - (C_{4050}^{2024}+C_{4050}^{2023}) + (C_{4050}^{2022}+C_{4050}^{2023}) + \cdots\\
&\quad + (C_{4050}^{0}+C_{4050}^{1}) + 2025\\
&= 2026 + C_{4050}^{2025}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

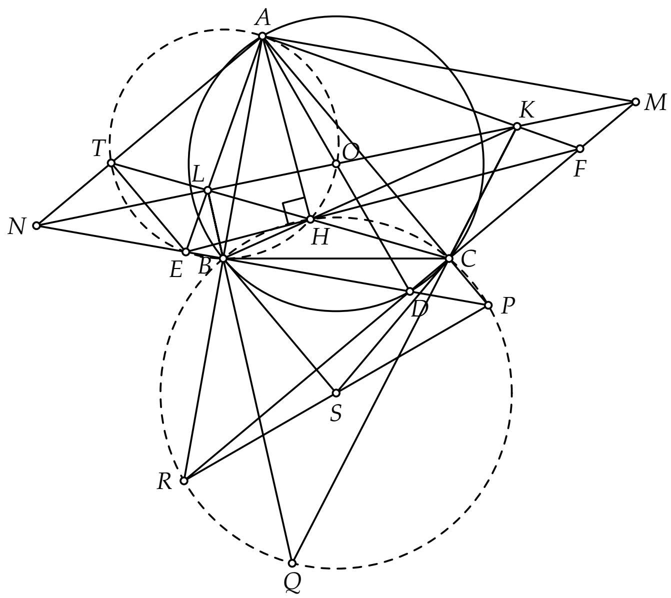
■

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường kính AD. Trên tia DB, DC lần lượt lấy các điểm E, F di động sao cho $\widehat{EAF} = 90^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A lên EF, K là giao điểm của BH và AF, L là giao điểm của CH và AE.

a) Chứng minh rằng đường thẳng LK cố định khi E, F đi động.

b) Chứng minh rằng giao điểm của BL và CK thuộc một đường tròn cố định khi E, F di động.

Lời giải:



a) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AB, AC lần lượt cắt DC, DB tại M, N. Ta chứng minh M, N, L, K thẳng hàng.
Thật vậy, gọi T là giao điểm của CL và AN. Ta có $\widehat{AHE} = \widehat{ABE} = 90^\circ$ nên A, H, B, E đồng viên (1).
Tương tự, ta được A, H, C, F đồng viên. Mặt khác, do $\widehat{NAC} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ nên

$$\widehat{NAE} = \widehat{CAF} = \widehat{CHF} = \widehat{THE}.$$

Do đó A, E, T, H đồng viên (2). Từ (1) và (2) suy ra A, E, H, T, B đồng viên.

Áp dụng *Định lý Pascal* cho bộ điểm $\begin{pmatrix} E & A & H \\ \\ T & B & A \end{pmatrix}$ suy ra N, L, K thẳng hàng.

Tương tự, ta được M, L, K thẳng hàng. Vậy M, N, L, K thẳng hàng, do M, N cố định nên đường thẳng LK cố định.

b) Gọi P, R, Q lần lượt là giao điểm của DB và AC, DC và AB, BL và CK. Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{BHC} &= 180^\circ - \widehat{EHB} - \widehat{FHC} \\ &= 180 - \widehat{EAB} - \widehat{FAC} = 180^\circ - (90^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \widehat{BAC}. \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{BHC}$ không đổi, mà B, C cố định nên đường tròn (BHC) cố định. Hơn nữa, ta có

$$\widehat{BHC} + \widehat{BPC} = 90^\circ + \widehat{BAC} + 90^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ.$$

Do đó , H, C, P đồng viên hay $P \in (BHC)$. Tương tự, ta có $R \in (BHC)$. Từ đó chứng minh được OB, OC là các tiếp tuyến của (BHC).

Chứng minh được $AMDN$ là hình bình hành, suy ra M, O, N thẳng hàng (O là trung điểm AD) hay L, O, K thẳng hàng. Do L là giao điểm của BQ và CH, O là giao điểm của các tiếp tuyến tại B, C của (BHC), N là giao điểm của BH và CQ nên áp dụng *Định lý Pascal đảo* cho bộ điểm $\begin{pmatrix} B & C & H \\ C & B & Q \end{pmatrix}$ ta được $Q \in (BHC)$. Vậy giao điểm của LB và KC thuộc đường tròn (BHC) cố định.

■

Câu 4. Tập hợp A gồm các số nguyên được gọi là *đẹp* nếu A có ít nhất một phần tử khác 0 và với $x, y \in A$ (có thể trùng nhau) thì $x - y \in A$. Hỏi có bao nhiêu dãy các tập hợp *đẹp* $(A_1, A_2, \ldots, A_9)$ thoả mãn $2025 \in A_1$ và $A_k \subset A_{k+1}$ với mọi $k = \overline{1,8}$?

Lời giải: Xét A là tập hợp đẹp và $a \in A \setminus \{0\}$. Khi đó $0 = a - a \in A$, $-a = 0 - a \in A$, $2a = a - (-a) \in A$. Bằng quy nạp, ta có $ka \in A$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó nếu chọn số nguyên dương $b \in A$ nhỏ nhất thì A là tập hợp tất cả các bội số của b. Thật vậy, với mọi $c \in A$, ta viết $c = bq + r$ với $q \in \mathbb{Z}, 0 \le r < b$. Do $b \in A$ nên $bq \in A$, dẫn đến $r = c - bq \in A$, vậy nên $r = 0$ (vì nếu $r > 0$ thì từ $r < b$ sẽ vô lý với cách chọn b). Từ chứng minh trên, với mỗi tập A đẹp ta có một tương ứng $1 - 1$ với một số nguyên dương b, đặt $b = f(A)$. Hơn nữa, nếu A, B là các tập hợp đẹp và $A \subset B$ thì $f(A) \vdots f(B)$.

Đặt $f(A_i) = a_i$. Theo chứng minh trên, ta có: $2025 \vdots a_1 \vdots a_2 \vdots \ldots \vdots a_9$. Số dãy các tập hợp đẹp $(A_1, A_2, ..., A_9)$ thỏa mãn đề bài bằng với số dãy không tăng $(a_1, \ldots, a_9)$ sao cho a_i đều là ước dương của 2025.

Do $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ nên $a_i = 3^{x_i} \cdot 5^{y_i}$ với x_i, y_i là các số nguyên thỏa mãn $0 \le x_i \le 4$ và $0 \le y_i \le 2$. Mỗi dãy $(a_1, \ldots, a_9)$ thỏa mãn điều kiện trên ứng với duy nhất một dãy các cặp số $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_9, y_9)$ sao cho $x_i \ge x_j, y_i \ge y_j$ với mọi $i < j$. Gọi số số k trong dãy $(x_1, ..., x_9)$ là t_k, $k = 0; 1; 2; 3; 4$. Khi đó:

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 9.$$

Theo bài toán chia kẹo của Euler, số dãy $(x_1, ..., x_9)$ là C_{13}^4. Tương tự, số dãy $(y_1, ..., y_9)$ là C_{11}^2. Tóm lại, tổng số dãy tập hợp đẹp $(A_1, A_2, ..., A_9)$ thỏa mãn đề bài là $C_{13}^4 \cdot C_{11}^2$. ■

B Ngày 2

Câu 5. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(2x - yf(x)) = f(2f(x)) - xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải: Nếu f là hàm hằng thì ta dễ dàng chỉ ra được $f \equiv 0$.

Xét trường hợp f không là hàm hằng. Thay $x = 0$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(-yf(0)) = f(2f(0)), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ đẳng thức trên, ta thay y bởi $-\dfrac{y}{f(0)}$ thì được

$$f(y) = f(2f(0)), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

hay f là hàm hằng, mâu thuẫn. Do đó $f(0) = 0$. Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$, khi đó $0 \in A$, ta chứng minh $A = \{0\}$. Giả sử tồn tại $u \neq 0$ sao cho $f(u) = 0$. Thay $x = u$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(2u) = f(0) - uf(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(y) = \dfrac{f(0) - f(2u)}{u}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$ hay f là hàm hằng, mâu thuẫn. Vậy $A = \{0\}$.

Xét $x \neq 0$ tùy ý, khi đó $f(x) \neq 0$. Thay $y = \dfrac{2x - 2f(x)}{f(x)}$ vào phương trình ban đầu ta được

$$xf\left(\frac{2x - 2f(x)}{x}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{2x - 2f(x)}{x}\right) = 0,$$

hay

$$\frac{2x - 2f(x)}{x} \in A.$$

Vì $A = \{0\}$ nên ta suy ra

$$\frac{2x - 2f(x)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x.$$

Do $x \neq 0$ xét tùy ý nên ta suy ra $f(x) = x, \forall x \neq 0$. Kết hợp với $f(0) = 0$ ta kết luận $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. ■

Câu 6. Trên hệ trục toạ độ Oxy, ta đánh dấu k điểm phân biệt tuỳ ý có hoành độ và tung độ đều là các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$.

a) Chứng minh rằng nếu $k = 100$ thì luôn tồn tại 4 điểm tạo thành các đỉnh của hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ.

b) Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách đánh dấu k điểm phân biệt như trên, luôn tồn tại 3 điểm là các đỉnh của một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông song song với các trục toạ độ.

Lời giải:

a) Gọi S là tập hợp các điểm trên hệ trục toạ độ Oxy có hoành độ và tung độ đều là các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$..
Xét trên một đường thẳng bất kì trong 20 đường thẳng $y = i, i = \overline{1, 20}$, do mỗi đường thẳng chứa đúng 20 điểm thuộc S nên có tất cả $C_{20}^2 = 190$ cặp điểm phân biệt thuộc S mà mỗi cặp nằm trên cùng một hàng.
Gọi $n_i, i = \overline{1, 20}$ là số điểm trên đường thẳng $y = i, i = \overline{1, 20}$ được đánh dấu, khi đó $\sum\limits_{i=1}^{20} n_i = k = 100$.
Ta có trên mỗi đường thẳng $y = i, i = \overline{1, 20}$ có n_i điểm được đánh dấu, do đó có $C_{n_i}^2$ cặp điểm phân biệt được đánh dấu trên đường thẳng này. Do đó số cặp điểm được đánh dấu trong S, trong đó mỗi cặp điểm nằm chung hàng, là

$$\sum_{i=1}^{20} C_{n_i}^2 = \sum_{i=1}^{20} \frac{n_i(n_i - 1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} n_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} n_i.$$

Mặt khác, ta có $\sum_{i=1}^{20} n_i^2 \geq \frac{1}{20}\left(\sum_{i=1}^{20} n_i\right)^2$. Do đó

$$\sum_{i=1}^{20} C_{n_i}^2 \geq \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{20} n_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} n_i = \frac{1}{40}\cdot 100^2 - \frac{1}{2}\cdot 100 = 200.$$

Từ đó do có 190 cặp điểm phân biệt thuộc S mà mỗi cặp nằm trên cùng một hàng nên theo *Nguyên lý Dirichlet*, tồn tại hai cặp không cùng hàng nhưng có cùng hoành độ, bốn điểm này tạo thành hình chữ nhật.

b) Với $k \leq 38$, xét 38 điểm có toạ độ $(1,2), (1,3), \ldots, (1,20), (2,1), (3,1), \ldots, (20,1)$ (các điểm nằm trên hàng 1, cột 1 bỏ đi điểm $(1,1)$). Xét cách đánh dấu k điểm bất kì trong 38 điểm trên, khi đó dễ thấy không thể tồn tại ba điểm được đánh dấu tạo thành tam giác vuông có các cạnh góc vuông song song với các trục toạ độ.
Giả sử phản chứng rằng tồn tại một cách đánh dấu 39 điểm mà không có tam giác vuông nào thỏa mãn. Gọi T là tập hợp các điểm nằm trên những hàng có ít nhất 2 điểm được đánh dấu, t là số điểm nằm trên những hàng có nhiều nhất 1 điểm. Khi đó ta có $|T| + t = 39$.
Ta có nhận xét sau: Nếu một hàng có ít nhất 2 điểm, thì trên mỗi cột chứa một điểm thuộc hàng đó, không thể có điểm nào khác (vì nếu có, sẽ tạo thành tam giác vuông). Nên vì thế các điểm trong T phải nằm trên các cột khác nhau, do đó $|S| \geq 20$. Do vậy còn tối đa 19 hàng được đánh dấu không quá 1 ô, khi đó $39 = |T| + t \leq 39$. Dấu bằng xảy ra khi có 1 hàng có 20 ô được đánh dấu. Ta dễ hàng thấy rằng điều này dẫn đến sẽ có 1 tam giác vuông thỏa.
Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của số điểm được đánh dấu k là 39.

■

Câu 7. Cho dãy số (F_n) xác định bởi $F_0 = 0, F_1 = 1$ và $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geq 2$. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $F_n + 1$ là bình phương của một số nguyên tố.

Lời giải: Trước hết ta trình bày và chứng minh các tính chất sau đối với dãy (F_n).

1) $F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = F_n^4 - 1,\ \forall n \geq 2.$ (*)
Chứng minh. Ta có

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{F_n - F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1,\ \forall n \geq 2.$$

Thay n bởi $n+1$ trong đẳng thức trên rồi so sánh, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{F_n - F_{n-2}}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_n},\ \forall n \geq 2 \\
&\Leftrightarrow F_n^2 - F_{n-2}F_n = F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}^2,\ \forall n \geq 2 \\
&\Leftrightarrow F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)(F_{n-2}F_n - F_{n-1}^2),\ \forall n \geq 2 \\
&\Leftrightarrow F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}(F_0F_2 - F_1^2),\ \forall n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}\cdot(0\cdot 1 - 1^2) = (-1)^n \text{ (do } F_2 = F_1 + F_0 = 1).
\end{aligned}$$

Vậy $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,\ \forall n \geq 1$ hay $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n,\ \forall n \geq 1$ (1). Kết hợp với công thức truy hồi của (F_n), ta được:

$$\begin{aligned} F_{n-2}F_{n+2} &= (F_n - F_{n-1})(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} + F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2 \\ &= F_n^2 - (-1)^n,\ \forall n \geq 2. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = \left(F_n^2 + (-1)^n\right)\left(F_n^2 - (-1)^n\right) = F_n^4 - 1,\ \forall n \geq 2.$$

2) $F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1},\ \forall n \geq m \geq 1.$ (**)
Chứng minh. Cố định $m \geq 1$. Với $n = m$, ta có $F_m = F_1F_m + F_0F_{m-1}$ (đúng do $F_0 = 0, F_1 = 1$); với $n = m+1$, ta có $F_{m+1} = F_2F_m + F_1F_{m-1} \Leftrightarrow F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ (đúng).
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ và $n = k+1$ ($k \geq m$), tức là

$$F_k = F_{k-m+1}F_m + F_{k-m}F_{m-1} \text{ và } F_{k+1} = F_{k-m+2}F_m + F_{k-m+1}F_{m-1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k &= F_{k-m+2}F_m + F_{k-m+1}F_{m-1} + F_{k-m+1}F_m + F_{k-m}F_{m-1} \\ &= (F_{k-m+2} + F_{k-m+1})F_m + (F_{k-m+1} + F_{k-m})F_{m-1} \\ &= F_{k-m+3}F_m + F_{k-m+2}F_{m-1}. \end{aligned}$$

Từ đó theo Nguyên lí quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

c) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)},\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$ (***)
Chứng minh. Nhận xét hiển nhiên đúng với $m = n$. Xét $m \neq n$ và không mất tính tổng quát, giả sử $n > m$. Đặt $n = qm + r$ ($q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < m$), khi đó áp dụng liên tiếp (**) ta được

$$(F_m, F_n) = (F_m, F_{n-m}) = (F_m, F_{n-2m}) = \ldots = (F_m, F_{n-qm}) = (F_m, F_r).$$

Tiếp tục đặt $m = q_1r + r_1$ ($q_1, r_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq r_1 < r$) rồi tiếp tục áp dụng (**) ta được $(F_m, F_r) = (F_{r_1}, F_r)$. Cứ tiếp tục quá trình tương tự như thuật toán Euclide, cuối cùng ta thu được $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, chính là điều cần chứng minh.

Trở lại bài toán, xét phương trình $F_n + 1 = p^2$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, p là số nguyên tố. Từ (*) kết hợp với $F_n^4 - 1 = (F_n - 1)(F_n + 1)(F_n^2 + 1)$ suy ra $F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}$ chia hết cho p^2.

Giả sử trong các số $F_{n-2}, F_{n-1}, F_{n+1}, F_{n+2}$ có một trong bốn số $F_{n-2}, F_{n-1}, F_{n+1}, F_{n+2}$ chia hết cho $p^2 = F_n + 1$. Từ

$$F_n + 1 = F_{n-1} + F_{n-2} + 1 \Rightarrow \begin{cases} F_n + 1 > F_{n-1} \\ F_n + 1 > F_{n-2} \end{cases}.$$

suy ra các trường hợp:

- $F_n + 1 \mid F_{n+1} \Leftrightarrow F_n + 1 \mid F_n + F_{n-1} \Leftrightarrow F_n + 1 \mid F_{n-1} - 1$ (vô lí do $F_{n-1} - 1 < F_n + 1$).
- $F_n + 1 \mid F_{n+2} \Leftrightarrow F_n + 1 \mid 2(F_n + 1) + F_{n-1} - 2 \Leftrightarrow F_n + 1 \mid F_{n-1} - 2$ (vô lí do $F_{n-1} - 2 < F_n + 1$).

Vậy trong bốn số $F_{n-2}, F_{n-1}, F_{n+1}, F_{n+2}$ có hai số cùng chia hết cho p, giả sử là F_k và F_{k+x} ($k \in \mathbb{N}^*, x \leq (n+2)-(n-2)=4$). Khi đó áp dụng (***), ta được

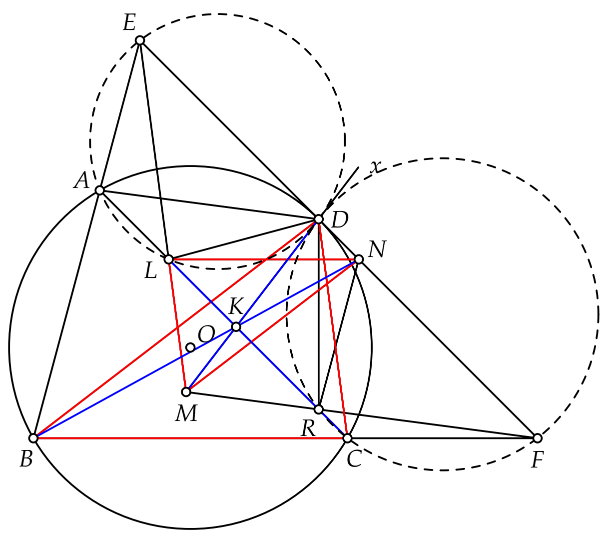
$$p \leq (F_k, F_{k+x}) = F_{(k,k+x)} = F_{(x,k)} \leq F_x \leq F_4 = 3.$$

Do p nguyên tố nên $p=2$ hoặc $p=3$. Kiểm tra trực tiếp, kết hợp với (F_n) tăng ta được tất cả các giá trị của n thoả yêu cầu đề bài là $n=4$ và $n=6$. ■

Câu 8. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm D trên cung nhỏ AC sao cho tam giác BCD nhọn. Tiếp tuyến của (O) tại D cắt các tia BA, BC lần lượt tại E, F. Giả sử có điểm M bên trong tam giác ABC sao cho $ME \parallel CD$ và $MF \parallel AD$. Lấy điểm N trên EF (khác D) sao cho $MD = MN$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADE và CDF tiếp xúc nhau.
b) Chứng minh rằng AC, BN, MD đồng quy.

Lời giải:



a) Trước hết, ta có (ADE) và (CDF) có điểm chung là D. Kẻ tia Dx là tiếp tuyến của (ADE) (Dx nằm ngoài (O)). Ta chứng minh Ox cũng là tiếp tuyến của (CDF).
Thật vậy, ta có

$$\widehat{xDF} = 180^\circ = \widehat{xDE} = 180^\circ - \widehat{EAD} = \widehat{BAD} = \widehat{DCF}.$$

Vậy Dx tiếp xúc với (CDF) tại D. Vậy Dx là tiếp tuyến chung của (ADE) và (CDF).

b) Gọi L, R lần lượt là giao điểm của AC với ME, MF. Ta có $\widehat{ALE} = \widehat{ACD} = \widehat{EDA}$ nên $L \in (ADE)$. Tương tự, $R \in (CDF)$.
Mặt khác, ta có

$$\widehat{MLR} = \widehat{ALE} = \widehat{ADE} = \widehat{RCD} = \widehat{RFE}.$$

Do đó $ELRF$ nội tiếp, suy ra $\overline{ML} \cdot \overline{ME} = \overline{MR} \cdot \overline{MF}$.
Vậy M thuộc trục đẳng phương của (ADE) và (CDF), kết hợp với (ADE), (CDF) tiếp

xúc nhau tại D suy ra MD là tiếp tuyến chung của (ADE) và (CDF).
Ta có

$$\widehat{FDB} = 180^\circ - \widehat{BCD} = \widehat{DCF} = 180^\circ - \widehat{MDN} = 180^\circ - \widehat{MND} = \widehat{MNF}.$$

Vậy $MN \parallel BD$. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EMN} = \widehat{EMD} + \widehat{DMN} &= \widehat{MDC} + 180^\circ - 2\widehat{MDN}\\ &= \widehat{DFC} + 180^\circ - 2(180^\circ - \widehat{DCF})\\ &= \widehat{BDC} = \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

Do đó tứ giác $LDMN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{LND} = \widehat{LMD} = \widehat{MDC} = \widehat{DFC}$. Do đó $LN \parallel BC$.
Từ đó hai tam giác MLN và DBC có các cặp cạnh tương ứng song song, do đó MD, LC, BN đồng quy hay MD, AC, BN đồng quy. Kết thúc chứng minh.

■

§3. ĐỀ CHỌN DỰ TUYỂN PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU 2025-2026

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+2abc=1$. Chứng minh rằng

$$2(ab+bc+ca)+2(a^2+b^2+c^2) \leq 3 \leq ab+bc+ca+3(a^2+b^2+c^2).$$

Lời giải: Trước tiên ta chứng minh $ab+bc+ca+3(a^2+b^2+c^2) \geq 3$. (1)
Thật vậy, ta có

$$(1) \Leftrightarrow ab+bc+ca+3(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2+b^2+c^2+2abc) \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 6abc.$$

Theo Bất đẳng thức Cauchy cho ab, bc, ca dương, ta có $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Từ đó ta cần chứng minh

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 6abc \Leftrightarrow a^2b^2c^2 \geq (2abc)^3 \Leftrightarrow abc \geq \frac{1}{8}.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do áp dụng Bất đẳng thức Cauchy cho giả thiết đề bài

$$1 = a^2+b^2+c^2+2abc \geq 4\sqrt[4]{2a^3b^3c^3} \Leftrightarrow 2a^3b^3c^3 \geq \frac{1}{4^3} \Leftrightarrow abc \geq \frac{1}{8}.$$

Vậy (1) được chứng minh. Tiếp theo ta chứng minh $2(ab+bc+ca)+2(a^2+b^2+c^2) \leq 3$. (2)
Thật vậy, trước tiên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử a, b cùng dấu so với $\frac{1}{2}$, tức là

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)(2b-1) \geq 0 \Leftrightarrow a+b-2ab \geq \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} 1 = a^2+b^2+c^2+2abc \geq 2ab+c^2+2abc \quad &\Leftrightarrow 2ab(1+c) \leq 1-c^2 \\ &\Leftrightarrow 2ab \leq 1-c \text{ (do } 1+c>0) \\ &\Leftrightarrow c \leq 1-2ab. \end{aligned}$$

Do đó

$$ac+bc-2abc = c(a+b-2ab) \leq \frac{1}{2}(1-2ab) = \frac{1}{2}-ab \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq \frac{1}{2}+2abc.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 2(ab+bc+ca)+2(a^2+b^2+c^2) \quad &\leq 2\left(\frac{1}{2}+2abc\right)+2(a^2+b^2+c^2) \\ &\leq 2(a^2+b^2+c^2+2abc)+1 = 2\cdot 1+1 = 3. \end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh. Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh. ■

Câu 2. Gọi số nguyên dương n là *số đẹp* nếu với mọi ước nguyên dương d của n, luôn tồn tại một ước nguyên dương d' của n sao cho $d \neq d'$ và $d+d'$ là một số chính phương.

a) Tìm tất cả các số đẹp n thỏa mãn n chỉ có đúng một ước nguyên tố.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số đẹp chỉ có đúng hai ước nguyên tố.

Lời giải:

a) Đặt $n = p^k$ với p là số nguyên tố, k là số nguyên dương.
Xét $k = 1$, tức là $n = p$. Khi đó tất cả ước nguyên dương của n là 1 và p. Khi đó với $d \neq d'$ là các ước của n thì tổng $d + d'$ chỉ có thể là $1 + p$. Giả sử $1 + p$ là số chính phương, đặt $1 + p = m^2$ với m nguyên dương thì ta được

$$p = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$$

Do p là số nguyên tố nên buộc phải có $m - 1 = 1$ hay $m = 2$, dẫn đến $p = 3$. Thử lại ta có $1 + p = 4 = 2^2$ là số nguyên tố.
Vậy trong trường hợp này chỉ có một số đẹp là $n = 3$.
Xét trường hợp $k \geq 2$. Khi đó các ước nguyên dương của n là

$$1, p, p^2, \ldots, p^k.$$

Xét $d = p$, khi đó nếu n là số đẹp thì tồn tại $1 \leq j \leq k$ sao cho $p + p^j$ là số chính phương. Tuy nhiên

$$p + p^j = p(1 + p^{j-1}).$$

Nếu $j - 1 \geq 1$ hay $j \geq 2$ thì $1 + p^{j-1}$ không chia hết cho p, dẫn đến số mũ của p khi phân tích $p + p^j$ ra thừa số nguyên tố là 1 nên không thể là số chính phương.
Nếu $j - 1 = 0$ hay $j = 1$ thì $d = d' = p$, vô lí với giả thiết đề bài.
Tóm lại, tất cả số nguyên dương n là số đẹp là 2 và 3.

b) Với $m \geq 7$, xét $n = 17 \cdot 2^m$. Khi đó n có đúng hai ước nguyên tố là 2 và 17. Ta sẽ chứng minh n là số đẹp với mọi $m \geq 7$.
Thật vậy, các ước nguyên dương của n có hai dạng là $d = 2^i$ hoặc $d = 17 \cdot 2^i$ $(0 \leq i \leq m)$.
Xét các trường hợp:

- $d = 2^i$ $(1 \leq i \leq m)$.
  - Nếu i lẻ, chọn $d' = 17 \cdot 2^i$. Khi đó d' cũng là ước của n và

    $$d + d' = 2^i(1 + 17) = 18 \cdot 2^i = \left(3 \cdot 2^{\frac{i+1}{2}}\right)^2,$$

    là một số chính phương.
  - Nếu i chẵn và $i \geq 6$, chọn $d' = 17 \cdot 2^{i-6}$. Khi đó d' cũng là ước của n và

    $$d + d' = 2^i + 17 \cdot 2^{i-6} = 81 \cdot 2^{i-6} = \left(9 \cdot 2^{\frac{i-6}{2}}\right)^2,$$

    là một số chính phương.
  - Với $i = 0$ hay $d = 2$, chọn $d' = 2^3 = 8$ là ước của n thì $d + d' = 9 = 3^2$ là một số chính phương.
  - Với $i = 2$ hay $d = 4$, chọn $d' = 2^5 = 32$ là ước của n thì $d + d' = 36 = 6^2$ là một số chính phương.
  - Với $i = 4$ hay $d = 16$, chọn $d' = 2^7 = 128$ là ước của n thì $d + d' = 144 = 12^2$ là một số chính phương.

  Vậy mọi ước $d = 2^i$ đều tồn tại $d' \neq d$ sao cho $d + d'$ là số chính phương.
- $d = 17 \cdot 2^i$ $(1 \leq i \leq m)$.

– Nếu i lẻ, chọn $d' = 2^i$. Khi đó d' cũng là ước của n và

$$d + d' = 18 \cdot 2^i = \left(3 \cdot 2^{\frac{i+1}{2}}\right)^2,$$

là một số chính phương.

– Nếu i chẵn và $i \geq 6$, chọn $d' = 2^{i-6}$. Khi đó

$$d + d' = 17 \cdot 2^i + 2^{i-6} = 2^{i-6}(17 \cdot 64 + 1) = \left(33 \cdot 2^{\frac{i-6}{2}}\right)^2,$$

là một số chính phương.

– Với $i = 0$ hay $d = 17$, chọn $d' = 2^3 = 8$ là ước của n thì $d + d' = 25 = 5^2$ là một số chính phương.

– Với $i = 2$ hay $d = 68$, chọn $d' = 2^5 = 32$ là ước của n thì $d + d' = 100 = 10^2$ là một số chính phương.

– Với $i = 4$ hay $d = 272$, chọn $d' = 2^7 = 1288$ là ước của n thì $d + d' = 400 = 20^2$ là một số chính phương.

Vậy mọi ước $d = 17 \cdot 2^i$ đều tồn tại $d' \neq d$ sao cho $d + d'$ là số chính phương.

Tòm lại, mọi số $n = 17 \cdot 2^m$ với $n \geq 7$ đều là số đẹp, dẫn đến có vô hạn số đẹp có đúng hai ước nguyên tố.

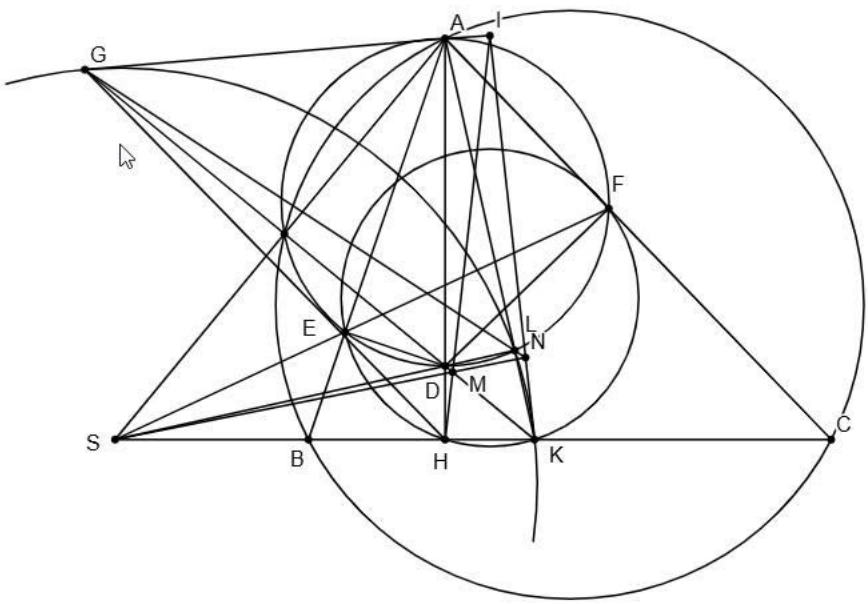
■

Câu 3. Cho tam giác ABC có AH là đường cao. Điểm D thuộc đoạn AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cắt BC tại K. Lấy điểm G thuộc đoạn thẳng DK sao cho $\angle AGH = \angle HDK$. Đường tròn đi qua K và tiếp xúc với AG tại G cắt AK tại L.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng LD, BC, EF đồng quy tại một điểm S.

b) Gọi I là tâm đường tròn (GHK). Đường thẳng IH cắt GD tại M, đường thẳng IK cắt GL tại N. Chứng minh rằng ba điểm M, N, S thẳng hàng.

Lời giải:



a) Ta có $\angle AGH = \angle HDK = \angle ADG$, suy ra $\triangle AGD \backsim \triangle AHD$. Suy ra $AD \cdot AH = AG^2$.
Mặt khác, $AG^2 = AL \cdot AK$ nên suy ra $AD \cdot AH = AL \cdot AK$.
Do đó tứ giác $HDLK$ nội tiếp, dẫn tới $\angle DLK = 90^\circ$. Do đó $L \in (AEF)$.
Khi đó, EF là trục đẳng phương của (AEF) và (HEF), DL là trục đẳng phương của (AEF) và (DHK), HK là trục đẳng phương của (DHK) và (HEF).
Do đó, EF, DL, HK đồng quy.

b) Ta có $\angle HGA = \angle ADG$ và

$$\angle HGI = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle HIG = 90^\circ - \angle HKG = \angle ADG.$$

Suy ra $\angle HGA = \angle HGI$, suy ra G, A, I thẳng hàng.
Áp dụng Định lý Desargue cho hai tam giác HMA và KNL, ta có DL, MN, HK đồng quy hay S, M, N thẳng hàng.

■

Câu 4. Cho M là một tập con của tập $\{1, 2, \ldots, 2026\}$. Ta nói M thỏa mãn *tính chất T* nếu với mọi $a < b < c$ thuộc M thì

$$c - a \geq 9.$$

a) Chứng minh rằng nếu M là một cấp số cộng và M có ít nhất 3 phần tử thì công sai $d \geq 5$.
b) Tìm số phần tử lớn nhất có thể của tập M.
c) Tìm số tập M thỏa mãn $|M|$ lớn nhất tìm được ở câu b.

Lời giải:

a) Giả sử M là cấp số cộng có ít nhất 3 phần tử và có công sai là d

$$M = \{a, a+d, a+2d, \ldots\}$$

Chọn ba phần tử trong M là $a < a+d < a+2d$
Theo tính chất T thì $(a+2d) - a \geq 9 \Rightarrow 2d \geq 9$
Suy ra $d \geq \frac{9}{2}$. Mà d là số nguyên nên $d \geq 5$.

b) Sắp các phần tử của M theo thứ tự tăng dần

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_t.$$

Điều kiện T tương đương với

$$a_{i+2} - a_i \geq 9 \quad \forall i.$$

Chia thành hai dãy con

$$a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < a_t$$
$$a_2 < a_4 < a_6 < \ldots < a_k$$

Xét dãy $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < a_t$. Ta có

$$2026 \geq a_t \geq a_1 + 9\frac{n-1}{2} \geq 1 + 9\frac{n-1}{2} \Rightarrow t \leq 451$$

Do đó $|M| \leq 452$. Nếu $|M| = 452$ thì $a_{452} \geq a_2 + 225 \cdot 9 \geq 2 + 225 \cdot 9 = 2027$, mâu thuẫn.
Suy ra $|M| \leq 451$.
Ta có thể chọn tập $M = \{1, 2, 10, 11, 19, 20, \ldots 2017, 2018, 2026\}$ thỏa tính chất T có 451 phần tử.
Vậy số phần tử lớn nhất có thể của tập M là 451.

c) Tập M có 451 phần tử thì $a_1 = 1, a_3 = 10, \dots a_{451} = 2026$.
Như vậy số tập M thỏa $|M|$ lớn nhất bằng số bộ $(a_2, a_4, \dots a_450)$.
Đặt

$$\begin{cases} s_1 = a_2 - 2 \geq 0 \\ s_k = a_{2k} - a_{2k-2} \geq 9,\ 2 \leq k \leq 225 \\ s_{226} = 2025 - a_{450} \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó

$$\sum_{k=1}^{226} s_k = 2023$$

Đặt

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_k = s_k - 9,\ 2 \leq k \leq 225 \\ t_{226} = s_{226} \end{cases}$$

Suy ra $2016 + \sum\limits_{k=1}^{226} t_k = 2023$ hay $\sum\limits_{k=1}^{226} t_k = 7$
Mà vì $s_k = a_{2k} - a_{2k-2} \leq (a_{2k+1} - 1) - (a_{2k-3} + 1) = 16$ $(2 \leq k \leq 225)$, nên $0 \leq t_k \leq 7$ $(2 \leq k \leq 225)$.
Với 2 trường hợp $t \in \{1, 226\}$ dễ thấy $0 \leq t_k \leq 7$.
Do đó số bộ $(t_1, t_2, \dots t_{226})$ là $C_{232}^{225} = C_{232}^{7}$.

■

§4. ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN 2025-2026

A Ngày 1

Câu 1 (5 điểm). Với mỗi số nguyên dương n, xét đa thức $P_n(x) = x^{3n} - 3 \cdot 4^{n-1}x^n - 2^{3n-3}$.

a) Chứng minh $P_n(x)$ có đúng một nghiệm thực dương, kí hiệu là a_n.

b) Đặt $b_n = \dfrac{2-a_n}{n}$ và $c_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Chứng minh dãy số $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn.

Lời giải:

a) Xét $P_n'(x) = 3nx^{3n-1} - 3 \cdot 4^{n-1} \cdot nx^{n-1} = 3nx^{n-1}(x^{2n} - 4^{n-1})$: để ý x^{2n} và x^{n-1} đều tăng trên $\mathbb{R}^+$ nên $P_n'(x) > 0$ khi $x > \sqrt[2n]{4^{n-1}} = 2^{1-1/n}$ và $P_n'(x) < 0$ khi $0 < x < 2^{1-1/n}$, suy ra $P_n(x)$ giảm trên $(0, 2^{1-1/n})$ và tăng trên $(2^{1-1/n}, +\infty)$. Mà

$$P_n(2^{1-1/n}) = 2^{3n-3} - 3 \cdot 4^{n-1} \cdot 2^{n-1} - 2^{2n-3} = -2^{2n-3}(2^{n+1}+1) < 0$$

nên $P_n(x)$ không có nghiệm trên $(0, 2^{1-1/n})$, và chỉ có nghiệm duy nhất trên $(2^{1-1/n}, +\infty)$. Kết hợp với $P_n(2) = 2^{3n-3} > 0$ ở trên, ta có $a_n \in (2^{1-1/n}, 2)$.

b) Từ $a_n \in (2^{1-1/n}, 2)$, ta có

$$c_n < 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2^{1/k}}\right) \tag{3.2}$$

Khi $k \to +\infty$ thì ta có giới hạn $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^{1/k}-1}{1/k} = \ln 2$ (theo luật L'Hopital). Ta chứng minh bổ đề sau: nếu (x_n) là dãy số thực dương sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{1/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 x_n = L < +\infty$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N sao cho $|n^2 x_n - L| < \varepsilon$ với mọi $n \geq N$ (theo định nghĩa giới hạn). Khi đó $x_n < \dfrac{L+\varepsilon}{n^2}$, suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \sum_{n=1}^{N-1} x_n + (L+\varepsilon)\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

do $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 2$. Áp dụng bổ đề trước vào (3.2), ta có

$$c_n < 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2^{1/k}}\right) < 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2^{1/k}}\right) < +\infty, \text{ với mọi } n \geq 1$$

do $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 \cdot \dfrac{1}{k}\left(1 - \dfrac{1}{2^{1/k}}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^{1/k}} \cdot \dfrac{2^{1/k}-1}{1/k} = \ln 2$. Nói cách khác, (c_n) bị chặn. Lại có (c_n) tăng do $a_n < 2$ nên $b_n > 0$ với mọi $n \geq 1$, suy ra (c_n) hội tụ theo định lý Weierstrass.

■

Câu 2 (5 điểm). Để khám phá không gian, các nhà khoa học thường phải quan sát những vật thể xa xôi như sao chổi, tiểu hành tinh và các hiện tượng thiên văn khác. Nhằm mục đích đó, các nhà khoa học thiết kế và phóng các vệ tinh quan sát lên quỹ đạo quanh Trái Đất. Hầu hết các vệ tinh không chuyển động theo vòng tròn hoàn hảo mà có quỹ đạo là một đường elip, với Trái Đất nằm ở một trong hai tiêu điểm của elip. Khi một vệ tinh chuyển động trên quỹ đạo elip, khoảng cách giữa nó và vật thể cần quan sát liên tục thay đổi. Thông thường, nếu khoảng cách từ vệ tinh đến vật thể cần quan sát là ngắn nhất thì các thiết bị cảm biến trên vệ tinh sẽ nhận được tính hiệu tốt nhất.

Cho một vệ tinh (được xem như là một chất điểm) chuyển động xung quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip. Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục Ox, Oy, Oz đều bằng 6 400km), giả sử vệ tinh chuyển động trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) theo quỹ đạo có phương trình là $x^2 + 3y^2 = 17$. Vệ tinh cần quan sát một vật thể (cũng được xem như là một chất điểm) chuyển động trong không gian. Theo các kết quả nghiên cứu, khi vật thể chuyển động đến vị trí $A\left(2; \dfrac{16}{\sqrt{3}}; 8\right)$ thì việc quan sát vật thể đó là tốt nhất.

Hãy xác định tọa độ điểm C (trên quỹ đạo elip của vệ tinh) trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ nói trên sao cho khoảng cách từ vị trí C đến vị trí A là ngắn nhất.

Lời giải: Gọi B là hình chiếu vuông góc từ A xuống (Oxy). Khi đó do $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + BC^2}$ nên độ dài AC nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài BC nhỏ nhất. Ta đưa bài toán về xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy: Cho elip (E) có phương trình $x^2 + 3y^2 = 17$ và điểm $B\left(2; \dfrac{16}{\sqrt{3}}\right)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc (E) sao cho BC có độ dài nhỏ nhất.

Nhận thấy điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ, do đó để BC có độ dài nhỏ nhất thì điểm C phải nằm trên phần đường cong của (E) nằm trong góc phần tư thứ nhất, tương ứng với đồ thị hàm số $(C)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{17 - x^2}, 0 \le x \le \sqrt{17}$.

Giả sử $C\left(t; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{17 - t^2}\right)$ với $0 \le t \le \sqrt{17}$. Gọi d_t là tiếp tuyến của (E) đi qua C. Khi đó khoảng cách BC nhỏ nhất khi BC vuông góc với tiếp tuyến d_t.

Kí hiệu k_d là hệ số góc tiếp tuyến d của (E). Khi đó ta cần tìm t để $k_{BC} \cdot k_{d_t} = -1$.

Ta có $\overrightarrow{BC}$ là một vector chỉ phương của BC, từ đó tìm được hệ số góc

$$k_{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}(t-2)}\left(\sqrt{17 - t^2} - 16\right).$$

Mặt khác $k_{d_t} = f'(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{17 - t^2}}$. Từ đó ta có phương trình

$$\begin{aligned}
\frac{-t}{3(t-2)} \cdot \frac{\sqrt{17-t^2} - 16}{\sqrt{17-t^2}} = -1 \quad &\Leftrightarrow t\left(\sqrt{17-t^2} - 16\right) = 3(t-2)\sqrt{17-t^2} \\
&\Leftrightarrow (2t-6)\sqrt{17-t^2} + 16t = 0 \\
&\Leftrightarrow (t-3)\sqrt{17-t^2} = -8t \\
&\Rightarrow (t-3)^2(17-t^2) = 64t^2 \\
&\Leftrightarrow t^4 - 6t^3 + 56t^2 + 102t - 153 = 0 \\
&\Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 5t^2 + 51t + 153) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^3 - 5t^2 + 51t + 153 = 0 \quad (*) \end{array}\right..
\end{aligned}$$

Xét hàm số $y = g(x) = x^3 - 5x^2 + 51x + 153$ trên $[0; \sqrt{17}]$. Ta có

$$g'(x) = 3x^2 - 10x + 51 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

nên g tăng trên $[0; \sqrt{17}]$. Do đó $g(t) \geq g(0) = 153$. Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Thử lại ta có $t = 1$ là nghiệm của phương trình ban đầu, từ đó tọa độ điểm C thỏa mãn điều kiện đề bài là $C\left(1; \frac{4}{\sqrt{3}}; 0\right)$. ■

Câu 3 (5 điểm). Cho n, a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $1 < n^2 < a < b < n^2 + n + 3$. Tìm tất cả các ước nguyên dương thuộc khoảng $\left(n^2; n^2 + n + 3\right)$ của tích ab.

Lời giải: Giả sử m là ước của ab và $m \in (n^2; n^2 + n + 3)$. Đặt $m = uv$ với $u \mid a$ và $v \mid b$. Xét trường hợp $u \leq v$, khi đó

$$n^2 < uv \leq v^2 \Rightarrow n < v \Rightarrow v \geq n + 1.$$

Nếu có hai số thuộc $(n^2; n^2 + n + 3)$ chia hết cho v, gọi hai số này là $u_1 v$ và $u_2 v$ $(0 < u_1 < u_2)$ thì $0 < (u_2 - u_1)v \leq n + 2$ nên $u_2 - u_1 \leq \frac{n+2}{v} \leq \frac{n+2}{n+1} < 2$, kéo theo $u_2 = u_1 + 1$. Do đó

$$u_2 v = (u_1 + 1)v = u_1 v + v \geq n^2 + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2.$$

Từ đây suy ra $u_1 v = n^2 + 1$ và $v = n + 1$, do đó $n^2 + 1 \,\vdots\, n + 1$ hay $n = 1$ (Vô lý vì $n > 1$). Vậy tồn tại duy nhất một số thuộc $(n^2; n^2 + n + 3)$ chia hết cho v, vì vậy $m = uv = b$.

Xét trường hợp $u < v$, chứng minh tương tự, ta được $m = a$. Vậy chỉ có đúng 2 ước nguyên dương của ab thuộc $(n^2 + 1; n^2 + n + 3)$. ■

Câu 4 (5 điểm). Bạn An chơi trò chơi ghi lên bảng các bộ ba số theo thứ tự từ trái sang phải. Ban đầu trên bảng ghi sẵn bộ ba số $(1, 1, 1)$. Ở mỗi lượt chơi, An thực hiện một trong hai thao tác sau với bộ ba số (x, y, z) hiện có:

(i) Xóa bộ ba số (x, y, z) và viết lên bảng bộ ba số $(y, z, x + z)$.
(ii) Xóa bộ ba số (x, y, z) và viết lên bảng bộ ba số $(x + z + 1, x + y + z + 1, x + y + 2z + 1)$.

a) Chứng minh An cần đúng 4 lượt chơi để có thể viết lên bảng bộ ba số $(a, b, 6)$.
b) Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách chơi để sau k lượt, An có thể viết lên bảng bộ ba số $(c, d, 129)$.

Lời giải:

a) Ta thực hiện các lượt sau với mỗi thao tác (i):

$$(1, 1, 1) \xrightarrow{i} (1, 2, 3) \xrightarrow{i} (2, 3, 4) \xrightarrow{i} (3, 4, 6).$$

Nếu thực hiện không quá 3 lượt, ta nhận thấy rằng sau một lần thực hiện thao tác (ii) thì giá trị của số thứ 3 tăng ít nhất 2 lần (tức lớn hơn 2 lần số thứ 3 của bộ trước). Do đó để thu được bộ số $(a, b, 6)$ thì chỉ có thể thực hiện đúng một thao tác (ii) tại lượt đầu tiên. Tuy nhiên, điều này là không thể vì

$$(1, 1, 1) \xrightarrow{ii} (3, 4, 5) \xrightarrow{i} (4, 5, 8) \xrightarrow{i} (5, 8, 12).$$

b) Thực hiện thao tác (i) 12 lần từ bộ $(1, 1, 1)$, ta nhận được bộ $(60, 88, 129)$. Ta chứng minh $k = 12$ là giá trị nhỏ nhất.

Một cách làm là có thể quay lui (backtracking) (ví dụ để ra được bộ $(60, 88, 129)$ thì ta thực hiện thao tác (i) lên bộ $(41, 60, 88)$, như vậy thay vì (i), ta thực hiện (ii) lên $(41, 60, 88)$ thì ra bộ số có số thứ 3 vượt quá 129).

Một cách làm khác là để ý khi ta thực hiện thao tác (i) 3 lần liên tiếp lên (x, y, z) để được $(x + z, x + y + z, x + y + 2z)$, thì bộ này chính là kết quả của việc thực hiện thao tác (ii) lên bộ gốc (x, y, z), rồi trừ 1 cho mỗi số.

Gọi (x_n, y_n, z_n) là bộ đạt được từ $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ thông qua n thao tác (i) liên tiếp. Theo định nghĩa

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = x_n + z_n \end{cases}$$

Thực chất, ta có $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = (z_{n-1}, z_n, z_{n+1})$ với mọi $n \geq 1$. Bây giờ giả sử bộ (a, b, c) thu được từ $(1, 1, 1)$ thông qua các thao tác (i) và (ii), và có ít nhất 1 lần thực hiện thao tác (ii). Ta chứng minh có m sao cho

$$z_{m-1} < a < z_m < b < z_{m+1} < c < z_{m+2}$$

Từ dãy thao tác cho bộ (a, b, c), gọi $N \geq 0$ là số lần thực hiện thao tác (i) lên bộ $(1, 1, 1)$ trước khi thực hiện thao tác (ii) đầu tiên. Như vậy ở bước thứ N, ta được bộ (x_N, y_N, z_N), và ở bước thứ $N + 1$, $(u, v, w) = (x_{N+3} + 1, y_{N+3} + 1, z_{N+3} + 1) = (z_{N+1} + 1, z_{N+2} + 1, z_{N+3} + 1)$. Ta chứng minh, với bộ (u, v, w) thu được sau bước thứ $j \geq N + 1$, luôn có m thỏa

$$\begin{cases} z_{m-1} < u \leq \sum\limits_{0 \leq 3j < m-1} z_{m-1-3j} \\ z_m < v \leq \sum\limits_{0 \leq 3j < m} z_{m-3j} \\ z_{m+1} < w \leq \sum\limits_{0 \leq 3j < m+1} z_{m+1-3j} \end{cases} \tag{3.3}$$

bằng quy nạp (để ý $\sum\limits_{0 \leq 3j < m} z_{m-3j} = z_m + z_{m-3} + z_{m-6} + \dots$). Thật vậy, trường hợp cơ sở đúng do $1 < z_i$ với mọi $i \geq 1$. Giả sử với $j \geq N + 1$ nào đó, tồn tại m (phụ thuộc vào j) thỏa (3.3). Từ bộ (u, v, w) thu được sau bước thứ j

- Nếu ta thực hiện thao tác (i), thì bộ $(u', v', w') = (v, w, u + w)$ thỏa

$$\begin{cases} z_m < u' = v \leq \sum\limits_{0 \leq 3j < m} z_{m-3j} \\ z_{m+1} < v' = w \leq \sum\limits_{0 \leq 3j < m+1} z_{m+1-3j} \end{cases}$$

theo giả thiết quy nạp. Thêm nữa

$$w' = u + w > z_{m-1} + z_{m+1} = y_m + z_{m+1} = x_{m+1} + z_{m+1} = z_{m+2}$$

còn

$$w' = u + w \leq \sum_{0 \leq 3j < m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0 \leq 3j < m+1} z_{m+1-3j}$$

– Nếu $m-1=3k+1$, thì $m+1=3k+3$, nên $3j<m+1$ tương đương với $3j<m-1$, suy ra
$$w' \leq \sum_{0\leq 3j<m-1} (z_{m-1-3j}+z_{m+1-3j}) = \sum_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j}$$
Mà $m+2=3k+4$, nên
$$w' \leq \sum_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j} = \sum_{0\leq 3j<m+2} z_{m+2-3j} - z_{m+2-(3k+3)} < \sum_{0\leq 3j<m+2} z_{m+2-3j}$$

– Nếu $m-1=3k+2$: cũng tương tự như trên,
$$w' \leq \sum_{0\leq 3j<m-1} (z_{m-1-3j}+z_{m+1-3j}) + z_{m+1-(3k+3)} = \sum_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_1$$
Mà $\sum\limits_{0\leq 3j<m+2} z_{m+2-3j} = \sum\limits_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_2$ và $z_2>z_1$, nên
$$w' \leq \sum_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_1 < \sum_{0\leq 3j<m+2} z_{m+2-3j}$$

– Nếu $m-1=3k+3$: ta có
$$w' \leq \sum_{0\leq 3j<m-1} (z_{m-1-3j}+z_{m+1-3j}) + z_{m+1-(3k+3)} = \sum_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_2$$
Mà $\sum\limits_{0\leq 3j<m+2} z_{m+2-3j} = \sum\limits_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_3$ và $z_3>z_2$, nên
$$w' \leq \sum_{0\leq 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_2 < \sum_{0\leq 3j<m+2} z_{m+2-3j}$$

Trong cả 3 trường hợp, bộ (u', v', w') thỏa (3.3) (với $m+1$ thay vì m).

- Nếu ta thực hiện thao tác (ii), thì bộ (u', v', w') có thể thu được thông qua việc thực hiện thao tác (i) 3 lần liên tiếp rồi cộng 1 cho mỗi số. Như vậy, từ kết quả của trường hợp trước, ta có
$$\begin{cases} u' > u'-1 > z_{m+2} \\ v' > v'-1 > z_{m+3} \\ w' > w'-1 > z_{m+4} \end{cases}$$

Với chiều ngược lại, xét

– Nếu $m-1=3k$: ta có

$$\begin{aligned}
u' &= u+w+1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} \left(z_{m-1-3j} + z_{m+1-3j}\right) + z_2 + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_3 - 1 = \sum_{0\le 3j<m+2} z_{m+2-3j} - 1 \\
&< \sum_{0\le 3j<m+2} z_{m+2-3j} \\
v' &= u+v+w+1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m} z_{m-3j} + \sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} \left(z_{m-1-3j} + z_{m-3j} + z_{m+1-3j}\right) + z_1 + z_2 + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+3-3j} + z_3 < \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+3-3j} + z_4 \\
&= \sum_{0\le 3j<m+3} z_{m+3-3j} \\
w' &= u+v+2w+1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m} z_{m-3j} + 2\sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} \left(z_{m-1-3j} + z_{m-3j} + 2z_{m+1-3j}\right) + z_1 + z_2 + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+4-3j} + z_3 < \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+4-3j} + z_5 \\
&= \sum_{0\le 3j<m+4} z_{m+4-3j}
\end{aligned}$$

– Nếu $m - 1 = 3k + 1$: ("tương tự như trên" nhưng thay đổi lại một số biến đổi)

$$\begin{aligned}
u' &= u + w + 1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} \left(z_{m-1-3j} + z_{m+1-3j}\right) + 1 = \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m+2} z_{m+2-3j} \\
v' &= u + v + w + 1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m} z_{m-3j} + \sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} \left(z_{m-1-3j} + z_{m-3j} + z_{m+1-3j}\right) + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+3-3j} + 1 < \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+3-3j} + z_2 \\
&= \sum_{0\le 3j<m+3} z_{m+3-3j} \\
w' &= u + v + 2w + 1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m} z_{m-3j} + 2\sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} \left(z_{m-1-3j} + z_{m-3j} + 2z_{m+1-3j}\right) + 1 \\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+4-3j} + 1 < \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+4-3j} + z_3 \\
&= \sum_{0\le 3j<m+4} z_{m+4-3j}
\end{aligned}$$

– Nếu $m-1=3k+2$: ("tương tự như trên" nhưng thay đổi lại một số biến đổi)

$$\begin{aligned}
u' &= u+w+1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1\\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} (z_{m-1-3j} + z_{m+1-3j}) + z_1 + 1 = \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+2-3j} + z_2\\
&= \sum_{0\le 3j<m+2} z_{m+2-3j}\\
v' &= u+v+w+1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m} z_{m-3j} + \sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1\\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} (z_{m-1-3j} + z_{m-3j} + z_{m+1-3j}) + z_1 + 1\\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+3-3j} + z_2\\
&= \sum_{0\le 3j<m+3} z_{m+3-3j}\\
w' &= u+v+2w+1 \le \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m-1-3j} + \sum_{0\le 3j<m} z_{m-3j} + 2\sum_{0\le 3j<m+1} z_{m+1-3j} + 1\\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} (z_{m-1-3j} + z_{m-3j} + 2z_{m+1-3j}) + z_1 + 1\\
&= \sum_{0\le 3j<m-1} z_{m+4-3j} + z_2\\
&= \sum_{0\le 3j<m+4} z_{m+4-3j}
\end{aligned}$$

Trong mọi trường hợp, (3.3) luôn thỏa (với $m+3$ thay vì m).
Áp dụng (3.3) cho bộ (a,b,c), ta có M sao cho

$$\begin{cases}
z_{M-1} < a \le \displaystyle\sum_{0\le 3j<M-1} z_{M-1-3j}\\
z_M < b \le \displaystyle\sum_{0\le 3j<M} z_{M-3j}\\
z_{M+1} < c \le \displaystyle\sum_{0\le 3j<M+1} z_{M+1-3j}
\end{cases}$$

Lại có

$$\begin{aligned}
z_{i+1} &= z_i + x_i = z_i + z_{i-2}\\
&= z_i + z_{i-3} + z_{i-5} = \dots\\
&= z_i + z_{i-3} + \cdots + z_{i-3j} + z_{i-(3j+2)}\\
&= \cdots = \sum_{0\le 3j<i} z_{i-3j} + \delta > \sum_{0\le 3j<i} z_{i-3j}
\end{aligned}$$

với $\delta \in \{z_1, z_2, z_3\}$, nên

$$z_{M-1} < a < z_M < b < z_{M+1} < c < z_{M+2}$$

Vì dãy (z_n) tăng nghiêm ngặt nên ta kết luận nếu bộ (a,b,c) thu được từ $(1,1,1)$ thông qua ít nhất 1 thao tác (ii), ta không thể nào có $c = z_n$ với n nào đó. Với $c = 129 = z_{12}$, ta chỉ có đúng 1 cách: thực hiện thao tác (i) *đúng* 12 lần!

■

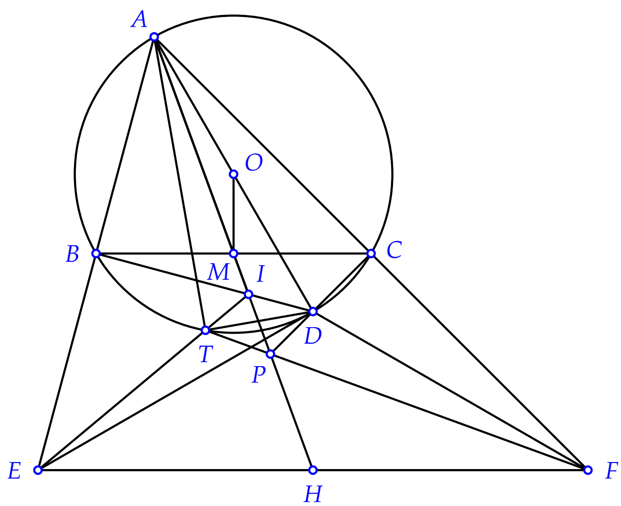
B Ngày 2

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của A qua B, C. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Trên đường thẳng AM lần lượt lấy các điểm I và P sao cho tam giác AIE cân tại I và tam giác APF cân tại P. Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng IE và PF.

a) Chứng minh T thuộc đường tròn (O).

b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng BI và CP. Gọi J là giao điểm của hai đường thẳng TD và IP. Gọi X là giao điểm của hai đường thẳng OT và BC. Các đường thẳng AT, AX lần lượt cắt EF tại các điểm L, U. Chứng minh bốn đường tròn ngoại tiếp của các tam giác TAJ, TIP, TEF và TLU cùng đi qua một điểm chung thứ hai khác T.

Lời giải:



a) D là giao của BI và CP nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và AD là đường kính đường tròn (O). Ta có:

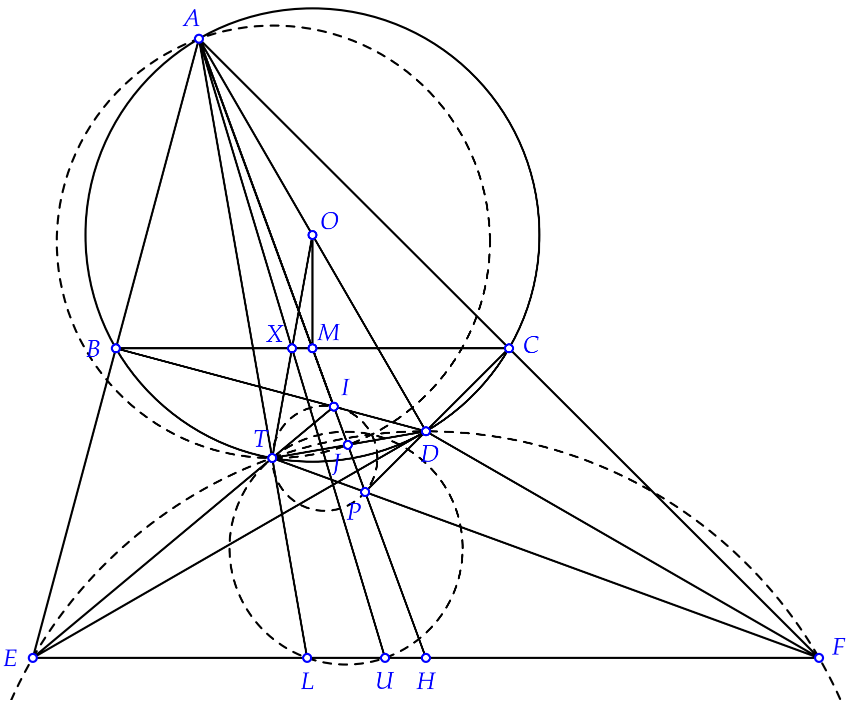
$$\widehat{ETF} = \widehat{TIP} + \widehat{TPI} = 2\widehat{EAI} + 2\widehat{FAI} = 2\widehat{EAF} = \widehat{EDF}$$

nên tứ giác $ETDF$ nội tiếp. Suy ra TD là phân giác của $\widehat{ITP}$.
Gọi H là giao điểm của AM và EF thì H là trung điểm EF. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ETF với cát tuyến IPH, ta có:

$$\frac{TI}{EI} \cdot \frac{EH}{FH} \cdot \frac{FP}{TP} = 1 \Rightarrow \frac{TI}{TP} = \frac{EI}{FP} = \frac{AI}{AP}.$$

Do đó TA là phân giác của $\widehat{ITP}$, suy ra $TD \perp TA$. Vậy $T \in (O)$.

b)



Để ý $TJ \perp TA$ nên theo câu (a), ta có

$$\frac{JI}{JP} = \frac{AI}{AP} = \frac{TI}{TP} = \frac{EI}{FP} \tag{3.4}$$

Cho (TEF) cắt (TIP) tại $Z \neq T$, ta có $\triangle ZIE \backsim \triangle ZPF$ (g.g) nên $\dfrac{IE}{PF} = \dfrac{ZI}{ZP}$. Kết hợp với (3.4), ta có ZJ, ZA là phân giác $\widehat{IZP}$, suy ra $\widehat{AZJ} = 90^\circ = \widehat{ATJ}$, hay $Z \in (TAJ)$.
Cho (TZL) cắt EF tại U', ta có $TZFE$ và $TZU'L$ nội tiếp nên

$$\widehat{ETL} = \widehat{TLU'} - \widehat{TEF} = (180^\circ - \widehat{TZU'}) - (180^\circ - \widehat{TZF}) = \widehat{U'ZF}$$

Tương tự $\widehat{FTL} = \widehat{U'ZE}$. Lại có TL là phân giác $\widehat{ETF}$, nên $\widehat{U'ZF} = \widehat{U'ZE}$, hay ZU' là phân giác $\widehat{EZF}$. Như vậy

$$\frac{U'E}{U'F} = \frac{ZE}{ZF} = \frac{IE}{PF} \tag{3.5}$$

với đẳng thức thứ 2 là do $\triangle ZIE \backsim \triangle ZPF$ (chứng minh trên). Ta chứng minh AT là đường đối trung tam giác ABC. Áp dụng định lý sin trong tam giác DJI và DJP, ta có

$$\frac{JI}{JP} = \frac{DJ \cdot \frac{\sin \widehat{BDT}}{\sin \widehat{DIP}}}{DJ \cdot \frac{\sin \widehat{PDT}}{\sin \widehat{CPA}}} = \frac{\sin \widehat{BDT}}{\sin \widehat{CDT}} \cdot \frac{\sin \widehat{APC}}{\sin \widehat{AIB}} = \frac{ex}{CT} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AI}{AP}$$

Lại theo chứng minh trên, $\dfrac{JI}{JP} = \dfrac{AI}{AP}$, suy ra $\dfrac{ex}{CT} = \dfrac{AB}{AC}$. Nói cách khác, tứ giác $ABTC$

điều hòa và ta được AT là đường đối trung tam giác ABC. Mặt khác,

$$\begin{aligned}\frac{IE}{PF} &= \frac{AI}{AP} = \frac{\frac{AB}{\cos\widehat{BAM}}}{\frac{AC}{\cos\widehat{CAM}}} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\cos\widehat{BAT}}{\cos\widehat{CAT}} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\cos(90^\circ - \widehat{OTB})}{\cos(90^\circ - \widehat{OTC})}\\ &= \frac{TB}{TC}\cdot\frac{\sin\widehat{BTX}}{\sin\widehat{CTX}} = \frac{XB}{XC}\end{aligned}$$

Mà $\frac{IE}{PF} = \frac{U'E}{U'F}$, nên $\frac{XB}{XC} = \frac{U'E}{U'F}$, suy ra A, X, U' thẳng hàng (do $EF \parallel BC$). Nhưng U là giao điểm của AX với EF, nên $U' \equiv U$, suy ra $Z \in (TLU)$.

■

Câu 6.

a) Tìm số nghiệm thực dương phân biệt của đa thức $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

b) Giả sử a, b, c, d là các số nguyên sao cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 3 nghiệm thực dương phân biệt và không có nghiệm hữu tỷ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = |a| + |b| + |c| + |d|$.

Lời giải:

a) Xét tính biến thiên của hàm số $y = Q(x)$: $Q'(x) = 3x^2 - 10x + 4$ có nghiệm $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{13}}{3}$		$\frac{5+\sqrt{13}}{3}$		$+\infty$
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-97+26\sqrt{13}}{27}$	$\searrow$	$\frac{-97-26\sqrt{13}}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, kết hợp $Q(0) = -1 < 0$ ta thấy hàm số $y = Q(x)$ có đúng 1 nghiệm dương.

b) Không mất tính tổng quát, giả sử $a > 0$. Gọi $x_1 < x_2 < x_3$ là 3 nghiệm phân biệt của đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Theo định lý Viète, ta có $b < 0, c > 0, d < 0$. Lại theo bất đẳng thức AM-GM,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} > \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}} > \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

hay

$$b^2 > 3ac, \text{ và } c^3 > 27ad^2$$

Để ý rằng $d \neq 0$ (do $P(x)$ không có nghiệm hữu tỷ), nên $d \leq -1$, suy ra $c^3 \geq 27$, hay $c \geq 4$. Lại từ $a \geq 1$, ta có $b^2 > 3ac \geq 12$, hay $b \geq 4$.

*Mặt khác, để phương trình có 3 nghiệm thực dương, $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt $y_1 < y_2$ (theo định lý Rolle) và $P(y_1) > 0 > P(y_2)$ (thông qua tính biến thiên). Như vậy

$$ay_1^3 + by_1^2 + cy_1 + d > 0 > ay_2^3 + by_2^2 + cy_2 + d$$

Thay $y_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}, y_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ vào, quy đồng và rút gọn, ta được

$$|27a^2d - 9abc + 2b^3| < 2(b^2-3ac)^{3/2}$$

Bình phương cả 2 vế rồi tiếp tục rút gọn, ta có

$$18abcd + b^2c^2 > 27a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d \tag{3.6}$$

Xét $ad < 0$ (do $a > 0, d < 0$):

- Nếu $ad = -1$, thì $a = 1, d = -1$. Lại có $P(-1) = b + c \neq 0$ (do $P(x)$ không có nghiệm hữu tỷ) nên ta lần lượt xét các cặp sau, dựa trên độ lớn của $|b| + |c|$

  $$(b,c) \in \{(-4,5),(-5,4),(-4,6),(-6,4),(-4,7),(-5,6),(-6,5),(-7,4)\}$$

  và thử vào (3.6) (để ý rằng $-b$ và c đóng vai trò như nhau nên ta chỉ cần tính một nửa số lượng cặp), chỉ có cặp $(b,c) \in \{(-5,6),(-6,5)\}$ là thỏa. Như vậy $S \geq 13$, và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ hoặc $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$.
- Nếu $ad \leq -2$ thì hoặc là $a \geq 2$ hoặc là $d \leq -2$, suy ra $-b^3 > 108$ hoặc là $c^3 > 108$. Như vậy một trong 2 số $|b|, |c|$ phải không nhỏ hơn 5. Nhưng khi đó

  $$S = (|a| + |d|) + (|b| + |c|) \geq (1+2) + (4+5) = 12$$

  Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi một trong các trường hợp sau xảy ra
  - $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$: loại do chỉ có 1 nghiệm thực.xét t
  - $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$: loại do có nghiệm nguyên $x \in \{1, 2\}$.
  - $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$: loại do có nghiệm hữu tỷ $x \in \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$.
  - $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$: loại do chỉ có 1 nghiệm thực.

  Như vậy $S \neq 12$, hay $S \geq 13$

Trong cả 2 trường hợp, ta đều có $S \geq 13$, và $\min S = 13$ đạt được tại $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ chẳng hạn.

■

Câu 7. Trong một trò chơi, nhận vật Mario cần di chuyển về phía trước bằng các lần nhảy xa với độ dài mỗi lần là 1 mét hoặc a mét hoặc b mét, trong đó a và b là các số nguyên dương thỏa mãn $1 < a < b$. Cho trước một chặng đường cần di chuyển có độ dài là m mét, với m là một số nguyên dương, Mario luôn sử dụng chiến thuật nhảy về phía trước như sau: trước tiên Mario sẽ thực hiện các lần nhảy với độ dài mỗi lần b mét (với số lần tối đa có thể sao cho chưa vượt quá đích); nếu vẫn chưa tới đích, Mario sẽ thực hiện tiếp các lần nhảy với độ đài mỗi lần a mét (với số lần nhảy tối đa sao cho chưa vượt quá đích), rồi cuối cùng là chuyển sang các lần nhảy với mỗi bước nhảy là 1 mét. Mario sẽ thắng nếu không tồn tại cách di chuyển nào đến đích có số lần nhảy ít hơn so với chiến thuật trên. Trong trường hợp ngược lại, Mario sẽ thua.

a) Hãy chỉ ra rằng với $(a, b) = (6, 14)$, tồn tại một số m để Mario thua trong trò chơi này.

b) Tìm số lượng tất cả các cặp (a, b), với $1 < a < b \leq 100$, để Mario luôn thắng theo chiến thuật trên với mọi số nguyên dương m.

Lời giải:

a) Xét $m = 18$. Theo chiến thuật của Mario thì Mario sẽ thực hiện 1 lần nhảy độ dài 14 mét và 4 lần nhảy có độ dài 1 mét, khi đó số lần nhảy là 5. Tuy nhiên nếu xét cách nhảy gồm 3 lần nhảy độ dài 6 mét thì số lần nhảy là ít hơn. Do đó Mario sẽ thua trong trường hợp này.

b) Thực hiện phép chia $b = aq + r$ (với $q \geq 1$ nếu $0 < r \leq a - 1$ hoặc $q \geq 2$ nếu $r = 0$). Xét số $m = b + a - 1$: Mario cần 1 bước b mét rồi $a - 1$ bước 1 mét, nên tổng cộng là a bước. Một chiến thuật khác là để ý rằng $m = a(q + 1) + r - 1$, nên nếu $r \geq 1$ thì ta có thể thực hiện $q + 1$ bước a mét rồi $r - 1$ bước 1 mét, tổng cộng là $q + r$ bước.

Như vậy nếu $r \geq 1$ và $q + r < a$ thì Mario thua với $m = a + b - 1$. Ngược lại, tức $r = 0$ ($q \geq 2$) hoặc $r \geq 1, q + r \geq a$

- Nếu $r = 0$ thì $b = aq$ (với $q \geq 2$): với mỗi m nguyên dương, xét phương trình

$$(aq)x + ay + z = a(qx + y) + z = m$$

Thực hiện phép chia $m = an + s$ và $n = qu + t$ ($0 \leq s < a, 0 \leq t < q$), ta có $m = an + s = (aq)u + at + s$. Để ý rằng $at + s \leq a(q - 1) + a - 1 = aq - 1$, nên Mario cần u bước b mét, t bước a mét, rồi s bước 1 mét, tổng cộng là $u + t + s$ bước.

Để ý rằng trong phương trình $(aq)x + ay + z = m$, nếu $z \geq a$ thì ta luôn có thể thay $z' = z - a, y' = y + 1, x' = x$ thì

$$(aq)x' + ay' + z' = (aq)x + a(y + 1) + z - a = m$$

và số lượng bước $x' + y' + z' = (x + y + z) - (a - 1) < x + y + z$. Như vậy, trong chiến thuật với số bước nhỏ nhất, ta phải có $0 \leq z < a$. Tương tự, nếu $y \geq q$ thì ta thay $y' = y - q, x' = x + 1, z' = z$ để có

$$(aq)x' + ay' + z' = (aq)(x + 1) + a(y - q) + z = m$$

và số lượng bước $x' + y' + z' = (x + y + z) - (q - 1) < x + y + z$ (để ý $q \geq 2$ do $b > a$). Như vậy $y < q$. Nhưng khi đó z chính là phần dư của m khi chia cho a, suy ra $z = s$. Lập luận tương tự, ta có $y = t, x = u$, hay nói cách khác, chiến thuật của Mario chính là chiến thuật tối ưu. Ta kết luận với $b = aq, q \geq 2$ thì Mario luôn thắng (với mọi m).

- Còn nếu $r \geq 1, q + r \geq a$ (với $q \geq 1$): cũng xét như trên, với $m = bu + m'$ ($0 \leq i < b$), $m' = at + s$ ($0 \leq s < a$) và phương trình

$$bx + ay + z = (aq + r)x + ay + z = m$$

Ta có $m = (aq + r)u + at + s$, và theo cách đặt, Mario cần u bước b mét, t bước a mét, và s bước 1 mét, tổng cộng là $u + t + s$ bước.

Để có chiến thuật tối ưu nhất (tức số bước nhỏ nhất), lập luận tương tự như trường hợp trước, ta phải có $z < a$. Nếu $ay + z \geq aq + r$ thì với $z \leq a - 1$, ta có

$$aq + r \leq ay + z \leq a(y + 1) - a$$

hay $a(y + 1) \geq a(q + 1) + r > a(q + 1)$. Như vậy $y \geq q$. Tiếp tục chia ra 2 trường hợp

– Nếu $z \geq r$ thì ta thay $y' = y - q, z' = z - r$ và $x' = x + 1$ thì

$$(aq+r)x' + ay' + z' = (aq+r)(x+1) + a(y-q) + z - r = m$$

và số lượng bước bây giờ là $x' + y' + z' = x + y + z - (q + r - 1) < x + y + z$ (do $q, r \geq 1$).

– Còn nếu $z < r$: ta phải có $y \geq q + 1$. Thay $y' = y - (q+1), z' = z + (a - r)$ (để ý $z' < a$) và $x' = x + 1$ thì

$$(aq+r)x' + ay' + z' = (aq+r)(x+1) + a[y - (q+1)] + z + a - r = m$$

và số lượng bước bây giờ là $x' + y' + z' = x + y + z - (q + r - a) \leq x + y + z$ (do $q, r \geq 1$).

Tuy số lượng bước có thể không thay đổi trong 1 trường hợp, nhưng ta vẫn giữ được $0 \leq z < a$, và y giảm đi ít nhất bởi q. Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ được $y < q$. Như vậy trong chiến thuật tối ưu, ta phải có $ay + r < aq + r$. Xét số dư và thương của m khi chia cho $aq + r$, ta được $x = u$ và $ay + z = at + s$. Lập luận tương tự, ta được $y = t, z = s$. Nói cách khác, Mario luôn thắng.

Tóm tắt lại, ta cần đếm số bộ $(a, b) = (a, aq + r)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

- $1 < a < b \leq 100$
- Nếu $r = 0$ thì $b = aq$ với $q \geq 2$.
- Nếu $1 \leq r < a$ thì $q + r \geq a$ (với $q \geq 1$).

Tuy nhiên, ta sẽ đếm phần bù của những bộ này, tức $q, r \geq 1$ và $q + r < a$.

*Đặt $n = 100$, ta có những nhận xét sau

- $a \geq q + r + 1 \geq q + 2$
- $n \geq b = aq + r \geq q(q + r + 1) + r = (q + r)(q + 1)$, suy ra

$$1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - q$$

- Thêm nữa, $n \geq (q + r)(q + 1) \geq (q + 1)^2$, suy ra $1 \leq q \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$. Với những giá trị q này, $\dfrac{n}{q+1} - q \geq 1$, suy ra $\left\lfloor \dfrac{n}{q+1} \right\rfloor - q \geq 1$, và có ít nhất một giá trị r thỏa.

Cố định $q \geq 1$

- $aq + 1 \leq b \leq n$, nên $a \leq \left\lfloor \dfrac{n-1}{q} \right\rfloor$.
- Trong đoạn $q + 2 \leq a \leq \left\lfloor \dfrac{n-1}{q} \right\rfloor$, để r có thể nhận mọi giá trị có thể, tức $1 \leq r \leq a - q - 1$, ta cần phải có $aq + (a - q - 1) \leq n$, hay $a \leq \left\lfloor \dfrac{n}{q+1} \right\rfloor + 1$. Đặt $b = aq + r$ với mỗi cách chọn a và r trước, cặp (a, b) thỏa mãn yêu cầu, nên số lượng cặp trong trường hợp này là

$$\sum_{a=q+2}^{\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 1} (a - q - 1) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - q} i = \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - q \right) \left(\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - q + 1 \right)$$

trừ khi $\left\lfloor \dfrac{n-1}{q} \right\rfloor < \left\lfloor \dfrac{n}{q+1} \right\rfloor + 1$, hay $\left\lfloor \dfrac{n-1}{q} \right\rfloor \leq \left\lfloor \dfrac{n}{q+1} \right\rfloor$. Tuy nhiên ta không thể có

$\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor$ do khi đó $\frac{n-1}{q} \leq \frac{n}{q+1} - 1$, hay $\frac{1-n-q^2}{q(q+1)} \geq 0$, vô lý. Nói cách khác, ta luôn có $\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor$

- Còn với $\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2 \leq a \leq \left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor$, ta có

$$1 \leq r = b - aq \leq n - q\left(\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2\right)$$

Xét $n - q\left(\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2\right) \leq \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2 - q - 1$ (vế phải là giá trị nhỏ nhất của $a - q - 1$): bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{n}{q+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 1$$

Hiển nhiên đúng. Nói cách khác, bất kỳ giá trị $1 \leq r \leq n - aq$ đều thỏa $q + r + 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2 \leq a$. Số lượng cặp (a, b) thoả mãn, là

$$\sum_{a=\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2}^{\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor} (n - aq) = n\left(\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - 1\right) - \frac{q}{2}\left(\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - 1\right)\left(\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2\right)$$

Như vậy số lượng cặp $(a, b) = (a, aq + r)$ để Mario luôn thắng với mọi m là

$$C_{n-1}^2 - \sum_{q=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1} L_n(q)$$

với

$$L_n(q) = \frac{1}{2}\left(\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - q\right)\left(\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - q + 1\right) + n\left(\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - 1\right) - \frac{q}{2}\left(\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor - 1\right)\left(\left\lfloor \frac{n-1}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 2\right)$$

Khi $n = 100$ và $q \in \{1, 2, \ldots, 9\}$,

q	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$L_{100}(q)$	1	6	17	40	81	160	323	736	2401

Ta kết luận có

$$C_{99}^2 - (1 + 6 + 17 + 40 + 81 + 160 + 323 + 736 + 2401) = 4851 - 3765 = 1086 \text{ (cặp)}.$$

■

PHẦN 4 GIỚI THIỆU ĐỀ THI TRUNG QUỐC

Đề thi tuyển chọn đội tuyển Toán của Trung Quốc thường được thiết kế theo hướng vừa rộng vừa sâu: kiểm tra nhanh nền tảng ở nhiều mảng, đồng thời sàng lọc khả năng lập luận ở các bài dài. Một paper điển hình chia làm hai phần: trả lời ngắn gồm nhiều câu nhỏ, yêu cầu tính/biến đổi gọn để ra đáp án cuối; và tự luận gồm vài bài điểm lớn, đòi hỏi trình bày rõ ràng, logic chặt chẽ, biết chọn hướng giải hiệu quả.

Về nội dung, đề phủ khá đều các chủ đề quen thuộc của toán olympic như đại số, số học, tổ hợp, hình học (kể cả giải tích và không gian), lượng giác, số phức, ... nhưng cách hỏi thường "thực chiến": câu ngắn thì đánh vào tốc độ và độ chắc tay, câu tự luận thì đánh vào tư duy chiến lược, khả năng kết nối ý tưởng và kiểm soát sai sót.

Trong phần này, tập san trình bày đề thi và lời giải của một số đề chọn đội tuyển Trung Quốc Vòng 1 các năm gần đây để bạn đọc có cái nhìn tổng quan về hình thức và phạm vi kiến thức mà các đề thi mang lại.

§1. ĐỀ TUYỂN CHỌN ĐỘI TUYỂN TRUNG QUỐC VÒNG 1 (2020) - ĐỀ A

Test Paper A

Phần I. Trả lời ngắn (Bài 1–8, mỗi bài 8 điểm)

Câu 1. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$, biết $a_9 = 13$, $a_{13} = 1$. Khi đó giá trị của $\log_{a_1} 13$ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Theo tính chất cấp số nhân, ta có $\dfrac{a_1}{a_9} = \left(\dfrac{a_9}{a_{13}}\right)^2$, suy ra $a_1 = \dfrac{a_9^3}{a_{13}^2} = 13^3$. Do đó $\log_{a_1} 13 = \dfrac{1}{3}$. ■

Câu 2. Trong elip Γ, A là đầu mút của trục lớn, B là đầu mút của trục nhỏ, và F_1, F_2 là hai tiêu điểm. Nếu $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2} = 0$, hãy tính $\dfrac{|AB|}{|F_1F_2|}$.

Lời giải: Giả sử phương trình Γ là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, khi đó $A(a,0)$, $B(0,b)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ với $c^2 = a^2 - b^2$. Khi đó

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2} = (-c-a)(c-a) + (-c^2+b^2) = a^2+b^2-2c^2 = 0.$$

Suy ra $a^2 + b^2 = 2c^2$ và

$$\frac{|AB|}{|F_1F_2|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c} = \frac{\sqrt{2}c}{2c} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Câu 3. Giả sử $a > 0$ và các giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x) = x + \dfrac{100}{x}$ trên các khoảng $(0, a]$ và $[a, +\infty)$ lần lượt là m_1, m_2. Nếu $m_1 m_2 = 2020$, hãy tìm a.

Lời giải: Hàm f giảm trên $(0, 10]$ và tăng trên $[10, +\infty)$. Khi $a \in (0, 10]$ thì $m_1 = f(a)$, $m_2 = f(10)$; khi $a \in [10, +\infty)$ thì $m_1 = f(10)$, $m_2 = f(a)$. Do đó luôn có

$$f(a)\,f(10) = m_1 m_2 = 2020 \;\Rightarrow\; a + \frac{100}{a} = \frac{2020}{20} = 101.$$

Giải được $a = 1$ hoặc $a = 100$. ■

Câu 4. Cho số phức z. Nếu $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$ là số thực, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+3|$.

Lời giải: **Cách 1:** Giả sử $z = a + b\mathrm{i}$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Theo điều kiện đề bài:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(a-2)+b\mathrm{i}}{a+(b-1)\mathrm{i}}\right) = \frac{-(a-2)(b-1)+ab}{a^2+(b-1)^2} = \frac{a+2b-2}{a^2+(b-1)^2} = 0$$

Do đó $a + 2b = 2$. Khi đó:

$$\sqrt{5}|z+3| = \sqrt{(1^2+2^2)((a+3)^2+b^2)} \geq |(a+3)+2b| = 5$$

Tức là $|z+3| \geq \sqrt{5}$. Khi $a = -2, b = 2$ thì $|z+3|$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{5}$.

Cách 2: Từ $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$ và ý nghĩa hình học của phép chia số phức, điểm biểu diễn z nằm trên đường thẳng nối hai điểm 2 và i (trừ điểm i), nên giá trị nhỏ nhất của $|z+3|$ là khoảng cách từ $(-3, 0)$ đến đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$ trong mặt phẳng tọa độ xOy, tức là $\dfrac{|-3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$.

■

Câu 5. Trong tam giác ABC, $AB = 6$, $BC = 4$, đường trung tuyến ứng với cạnh AC có độ dài $\sqrt{10}$. Tính $\sin^6 \dfrac{A}{2} + \cos^6 \dfrac{A}{2}$.

Lời giải: Gọi M là trung điểm AC.

Theo công thức trung tuyến: $4BM^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, suy ra $AC = \sqrt{2(6^2+4^2) - 4 \cdot 10} = 8$.

Theo định lý cosin: $\cos A = \dfrac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2\,CA \cdot AB} = \dfrac{8^2+6^2-4^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \dfrac{7}{8}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
\sin^6\frac{A}{2} + \cos^6\frac{A}{2} &= (\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2})^3 - 3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}(\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}) \\
&= 1 - 3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 A \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 A \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{49}{64}\right) \\
&= \frac{211}{256}
\end{aligned}$$

■

Câu 6. Cho tứ diện đều $P-ABC$ có tất cả các cạnh bằng 1 và L, M, N lần lượt là trung điểm của PA, PB, PC. Diện tích thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện này cắt bởi mặt phẳng LMN bằng bao nhiêu?

Lời giải: Mặt phẳng LMN song song với mặt phẳng ABC và khoảng cách từ P đến LMN bằng một nửa khoảng cách từ P đến ABC.
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, khi đó $PH \perp ABC$ và $PK \perp LMN$ với $K = PH \cap LMN$, đồng thời $PK = \dfrac{1}{2}PH$.
Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều; khi ấy $O \in PH$ và $OH = \dfrac{1}{4}PH$.
Suy ra $OK = OH$, tức O cách đều hai mặt phẳng LMN và ABC nên hai thiết diện tròn là bằng nhau.
Do đó diện tích thiết diện cần tìm bằng diện tích đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, tức $\pi\left(\dfrac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{\pi}{3}$. ■

Câu 7. Giả sử $a, b > 0$. Phương trình $\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+a|} = b$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 = b$. Tính $a + b$.

Lời giải: Đặt $t = x + \dfrac{a}{2}$. Khi đó phương trình $\sqrt{\left|t - \dfrac{a}{2}\right|} + \sqrt{\left|t + \dfrac{a}{2}\right|} = b$ có ba nghiệm $t_i = x_i + \dfrac{a}{2}$ $(i = 1, 2, 3)$.
Hàm $f(t) = \sqrt{\left|t - \dfrac{a}{2}\right|} + \sqrt{\left|t + \dfrac{a}{2}\right|}$ là hàm chẵn, nên ba nghiệm của $f(t) = b$ đối xứng qua gốc. Do đó $b = f(0) = \sqrt{2a}$.
Xét $f(t) = \sqrt{2a}$: nếu $|t| \leq \dfrac{a}{2}$ thì $f(t) \leq \sqrt{2a}$ và bằng khi $t = 0$; nếu $t > \dfrac{a}{2}$ thì f tăng và $f\left(\dfrac{5a}{8}\right) = \sqrt{2a}$; nếu $t < -\dfrac{a}{2}$ thì f giảm và $f\left(-\dfrac{5a}{8}\right) = \sqrt{2a}$.
Vậy $t_1 = -\dfrac{5}{8}a,\ t_2 = 0,\ t_3 = \dfrac{5}{8}a$.
Theo giả thiết $x_3 = b$, suy ra $b = t_3 - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{8}$.
Kết hợp $b = \sqrt{2a}$ được $a = 128$, do đó $a + b = \dfrac{9a}{8} = 144$. ■

Câu 8. Có 10 thẻ, mỗi thẻ ghi hai số trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, và với mọi cặp thẻ khác nhau thì hai số trên chúng không hoàn toàn trùng nhau. Mười thẻ này được đặt vào năm hộp đánh số $1, 2, 3, 4, 5$, và thẻ ghi i, j chỉ được đặt vào hộp i hoặc hộp j. Một cách xếp gọi là "tốt" nếu số thẻ trong hộp 1 nhiều hơn mỗi hộp còn lại. Hỏi có bao nhiêu cách xếp "tốt" như vậy?

Lời giải: Kí hiệu thẻ ghi i, j là $\{i, j\}$, khi đó có đúng 10 thẻ với $1 \leq i < j \leq 5$. Vì tổng 10 thẻ chia vào 5 hộp nên hộp 1 phải có ít nhất 3 thẻ. Các thẻ có thể vào hộp 1 là $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}$.

- Trường hợp 1: Cả 4 thẻ đều vào hộp 1. Khi đó không thể có 4 thẻ trong mỗi hộp còn lại, nên 6 thẻ còn lại xếp thế nào cũng thoả. Có $2^6 = 64$ cách.
- Trường hợp 2: Chỉ có đúng 3 trong 4 thẻ trên vào hộp 1. Khi đó mỗi hộp còn lại có nhiều nhất 2 thẻ.
  Xét số cách N khi $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}$ vào hộp 1 và $\{1,5\}$ vào hộp 5.
  Ba thẻ $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$ có 8 cách xếp: 6 cách để hai thẻ cùng vào một trong các hộp 2,3,4

và 2 cách mỗi hộp 2,3,4 một thẻ.

Nếu hai thẻ trong những thẻ $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$ cùng vào một hộp (giả sử hộp 2), thì $\{2,5\}$ buộc vào hộp 5, khi đó hộp 5 đã có $\{1,5\}, \{2,5\}$ nên $\{3,5\}, \{4,5\}$ phải lần lượt vào hộp 3 và 4 (duy nhất 1 cách).

Nếu mỗi hộp 2,3,4 có đúng 1 thẻ trong ba thẻ $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$, thì để mỗi hộp 2,3,4 không vượt 2 thẻ. Khi đó chúng ta chỉ cần đảm bảo không có nhiêu hơn 2 thẻ nằm trong hộp 5, nghĩ là hộp 5 chỉ có thể chứa 0 hoặc 1 trong ba thẻ $\{2,5\}, \{3,5\}, \{4,5\}$, có $C_3^0 + C_3^1 = 4$ cách.

Vậy $N = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 14$. Do đối xứng, có $4N = 56$ cách trong trường hợp 2.

Vậy, tổng cộng $64 + 56 = 120$ cách xếp "tốt". ■

Phần II. Bài toán tự luận (Bài 9 16 điểm, Bài 10 và Bài 11 mỗi bài 20 điểm)

Câu 9. Trong tam giác ABC, $\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tìm tập giá trị của $\cos B + \sqrt{2}\cos C$.

Lời giải: Kí hiệu $f = \cos B + \sqrt{2}\cos C$. Từ $\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ suy ra $A = \dfrac{\pi}{4}$ hoặc $A = \dfrac{3\pi}{4}$.

- Nếu $A = \dfrac{\pi}{4}$ thì $B = \dfrac{3\pi}{4} - C$ với $0 < C < \dfrac{3\pi}{4}$. Khi đó

$$f = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - C\right) + \sqrt{2}\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin C + \cos C) = \sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right) \in (0,1].$$

- Nếu $A = \dfrac{3\pi}{4}$ thì $B = \dfrac{3\pi}{4} - C$ với $0 < C < \dfrac{\pi}{4}$. Khi đó

$$f = \cos\left(\frac{\pi}{4} - C\right) + \sqrt{2}\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin C + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos C = \sqrt{5}\,\sin(C + \varphi),$$

với $\varphi = \arctan 3 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Hàm $g(x) = \sqrt{5}\,\sin(x + \varphi)$ tăng trên $[0, \frac{\pi}{2} - \varphi]$ và giảm trên $[\frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{\pi}{4}]$.

Do $g(0) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = g(\frac{\pi}{4}), g(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sqrt{5}$, suy ra $f \in (2, \sqrt{5}]$.

Vậy $\cos B + \sqrt{2}\cos C \in (0,1] \cup (2, \sqrt{5}]$. ■

Câu 10. Với số thực dương n và x thoả $0 \le x < n$, đặt

$$f(n,x) = (1 - \{x\}) \cdot C_n^{[x]} + \{x\} \cdot C_n^{[x]+1},$$

trong đó $[x]$ là ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\{x\} = x - [x]$. Cho 2 số nguyên $m, n \ge 2$ thoả

$$f\left(m, \frac{1}{n}\right) + f\left(m, \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(m, \frac{mn-1}{n}\right) = 123.$$

Tính $f\left(n, \dfrac{1}{m}\right) + f\left(n, \dfrac{2}{m}\right) + \cdots + f\left(n, \dfrac{mn-1}{m}\right)$.

Lời giải: Với $k = 0, 1, \ldots, m-1$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k + \frac{i}{n}\right) = C_m^k \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) + C_m^{k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n} = \frac{n-1}{2}\left(C_m^k + C_m^{k+1}\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{m-1}\mathrm{C}_m^j+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(m,k+\frac{i}{n}\right)\\
&=2^m-2+\frac{n-1}{2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^k+\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_m^{k+1}\right)\\
&=2^m-2+\frac{n-1}{2}\cdot\left(2^m-1+2^m-1\right)\\
&=\left(2^m-1\right)n-1
\end{aligned}$$

Tương tự,

$$f\left(n,\frac{1}{m}\right)+f\left(n,\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\frac{mn-1}{m}\right)=\left(2^n-1\right)m-1$$

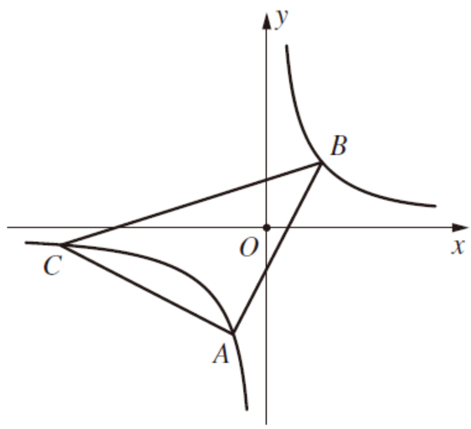
Từ giả thiết, $\left(2^m-1\right)n-1=123\Rightarrow\left(2^m-1\right)n=124$. Vì $m\geq 2$ nên $2^m-1\in\{3,7,15,31,63,127,\ldots\}$. Chỉ khi $m=5$ thì $2^m-1=31$ là ước của 124, khi đó $n=\dfrac{124}{31}=4$. Do đó

$$f\left(n,\frac{1}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\frac{mn-1}{m}\right)=\left(2^4-1\right)\cdot 5-1=74.$$

■

Câu 11. Trong hệ trục toạ độ xOy, các điểm A,B,C nằm trên hyperbol $xy=1$ sao cho $\triangle ABC$ vuông cân. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích $\triangle ABC$.

Lời giải:



Giả sử tam giác $\triangle ABC$ vuông cân tại A có các đỉnh sắp xếp theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ như hình.
Đặt $\overrightarrow{AB}=(s,t)$ thì $\overrightarrow{AC}=(-t,s)$, nên diện tích

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{s^2+t^2}{2}.$$

Vì A thuộc hyperbol $A\big(a, \frac{1}{a}\big)$, khi đó $B\big(a+s, \frac{1}{a}+t\big)$, $C\big(a-t, \frac{1}{a}+s\big)$.
Vì B, C thuộc hyperbol $xy = 1$, ta có

$$(a+s)\Big(\frac{1}{a}+t\Big) = (a-t)\Big(\frac{1}{a}+s\Big) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s}{a} + at = -st \\ -\dfrac{t}{a} + as = st. \end{cases}$$

Cộng hai đẳng thức được $\dfrac{s-t}{a} + a(t+s) = 0 \Rightarrow a^2 = \dfrac{t-s}{t+s}$. $\quad (*)$
Nhân hai đẳng thức và dùng $(*)$, biến đổi được

$$-s^2t^2 = \Big(a^2 - \frac{1}{a^2}\Big)st + s^2 - t^2 = \frac{4st}{s^2-t^2}\cdot st + s^2 - t^2 = \frac{(s^2+t^2)^2}{s^2-t^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$(s^2+t^2)^4 = \big(-s^2t^2(s^2-t^2)\big)^2 \le \frac{1}{4}\left(\frac{2s^2t^2 + 2s^2t^2 + (s^2-t^2)^2}{3}\right)^3 = \frac{(s^2+t^2)^6}{108},$$

suy ra $s^2 + t^2 \ge \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.
Dấu bằng đạt được khi $2s^2t^2 = (s^2-t^2)^2$, tức $\dfrac{s^2}{t^2} = 2 \pm \sqrt{3}$.
Giả sử $0 < s < t$. Kết hợp với $s^2 + t^2 = 6\sqrt{3}$, ta được $s = \sqrt{3(\sqrt{3}-1)}$, $t = \sqrt{3(\sqrt{3}+1)}$, và từ $(*)$ suy ra $a = -\sqrt{\dfrac{t-s}{t+s}}$.
Hay

$$a = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}}$$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của diện tích của $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{s^2+t^2}{2} = 3\sqrt{3}$. ■

§2. ĐỀ TUYỂN CHỌN ĐỘI TUYỂN TRUNG QUỐC VÒNG 1 (2020) - ĐỀ B

Test Paper B

Phần I. Trả lời ngắn (Bài 1–8, mỗi bài 8 điểm)

Câu 1. Nếu số thực x thoả $\log_2 x = \log_4(2x) + \log_8(4x)$, hãy tìm x.

Lời giải: Từ giả thiết:

$$\log_2 x = \log_4 2 + \log_4 x + \log_8 4 + \log_8 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2 x,$$

suy ra $\log_2 x = 7$, do đó $x = 128$. ■

Câu 2. Trong hệ trục toạ độ xOy, đường tròn Ω đi qua ba điểm $(0,0)$, $(2,4)$, $(3,3)$. Khi đó, khoảng cách lớn nhất từ một điểm trên Ω đến gốc toạ độ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Kí hiệu $A(2,4)$, $B(3,3)$, $O(0,0)$. Ta có $\widehat{OBA} = 90^\circ$ (vì hệ số góc OB là 1 còn AB là -1), nên OA là đường kính của Ω. Do đó khoảng cách lớn nhất từ một điểm trên Ω đến O bằng $|OA| = 2\sqrt{5}$. ■

Câu 3. Gọi $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Tập con $A \subset X$ thỏa điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và các phần tử của A có thể sắp thành một dãy các số nguyên dương liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu tập A như vậy?

Lời giải: Mỗi A được xác định duy nhất bởi phần tử nhỏ nhất a và lớn nhất b của A với $a < b$ và $a, b \in X$. Số cách chọn cặp (a, b) là $C_{20}^2 = 190$. ■

Câu 4. Trong tam giác ABC, biết $BC = 4$, $CA = 5$, $AB = 6$. Tính $\sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2}$.

Lời giải: Theo định lý cosin: $\cos A = \dfrac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{3}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2} &= \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}\right)\left(\sin^4 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^4 \frac{A}{2}\right) \\
&= \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2 - 3\sin^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{A}{2} \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 A \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 A = \frac{43}{64}
\end{aligned}$$

■

Câu 5. Cho tập $A = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \{1, 2, 3\}\}$ gồm 9 phần tử (i là đơn vị ảo). Gọi $\alpha = (z_1, \ldots, z_9)$ là một hoán vị của tất cả các phần tử trong A sao cho $|z_1| \le |z_2| \le \cdots \le |z_9|$. Có bao nhiêu hoán vị như vậy?

Lời giải: Ta có:

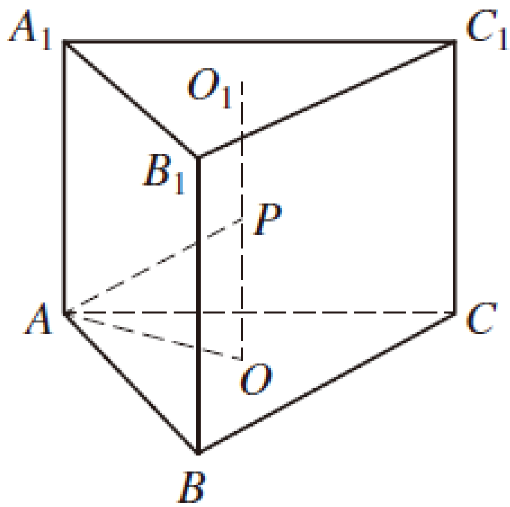
$$|1+\mathrm{i}| < |2+\mathrm{i}| = |1+2\mathrm{i}| < |2+2\mathrm{i}| < |3+\mathrm{i}| = |1+3\mathrm{i}| < |3+2\mathrm{i}| = |2+3\mathrm{i}| < |3+3\mathrm{i}|.$$

Suy ra

$z_1 = 1+\mathrm{i}$, $\{z_2, z_3\} = \{2+\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i}\}$, $z_4 = 2+2\mathrm{i}$, $\{z_5, z_6\} = \{3+\mathrm{i}, 1+3\mathrm{i}\}$, $\{z_7, z_8\} = \{3+2\mathrm{i}, 2+3\mathrm{i}\}$, Có ba cặp có thể hoán vị độc lập với nhau, nên theo nguyên tắc nhân ta có $2^3 = 8$ hoán vị. ■

Câu 6. Cho lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 3. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải:



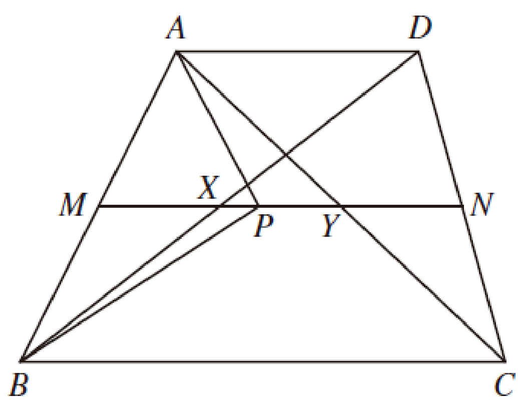
Gọi trọng tâm các tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ lần lượt là O và O_1, P là trung điểm OO_1. Do đối xứng, P là tâm cầu ngoại tiếp và PA là bán kính.

Ta có $PO = \dfrac{3}{2}$, $AO = \sqrt{3}$. Dễ thấy $PO \perp AO$ nên $PA = \sqrt{PO^2 + AO^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Do đó, thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)^3 = \dfrac{7\sqrt{21}}{2}\pi$. ■

Câu 7. Trong tứ giác lồi $ABCD$, giả sử $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$. Điểm P trong mặt phẳng thoả $\overrightarrow{PA} + 2020\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + 2020\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$. Gọi s là diện tích tứ giác $ABCD$, t là diện tích tam giác PAB. Tính $\dfrac{t}{s}$.

Lời giải:



Ta chuẩn hóa $AD = 2$, $BC = 4$. Gọi M, N, X, Y là trung điểm của AB, CD, BD, AC. Khi đó các điểm M, X, Y, N thẳng hàng theo thứ tự và $MX = XY = YN = 1$. Ta có

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\,\overrightarrow{PY}, \quad \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\,\overrightarrow{PX},$$

Kết hợp với điều kiện, ta suy ra $\overrightarrow{PY} + 2020\,\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{0}$, nên $P \in XY$ và $PX = \dfrac{1}{2021}$.
Gọi h là khoảng cách từ A đến MN. Khi đó

$$\frac{t}{s} = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{ABCD}} = \frac{PM \cdot h}{MN \cdot 2h} = \frac{PM}{2MN} = \frac{1 + \dfrac{1}{2021}}{2 \cdot 3} = \frac{337}{2021}.$$

■

Câu 8. Cho đa thức bậc năm $f(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thoả $f(n) = 8n$ với $n = 1, 2, \ldots, 5$. Hệ số của hạng bậc nhất (hệ số của x) của $f(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Đặt $g(x) = f(x) - 8x$. Khi đó $g(x)$ cũng là đa thức bậc năm có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và

$$g(n) = f(n) - 8n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, 5.$$

Suy ra $g(x)$ có 5 nghiệm thực lần lượt là $1, 2, 3, 4, 5$, do đó

$$g(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-5).$$

Vì $f(x) = g(x) + 8x$, suy ra

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-5) + 8x.$$

Hệ số của hạng bậc nhất (hệ số của x) trong $f(x)$ bằng

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot 5! + 8 = 282.$$

■

Phần II. Bài toán tự luận (Bài 9 16 điểm, Bài 10 và Bài 11 mỗi bài 20 điểm)

Câu 9. Trong elip Γ, A là đầu mút trục lớn, B là đầu mút trục nhỏ, F_1, F_2 là hai tiêu điểm. Nếu $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$, hãy tính $\tan \widehat{ABF_1} \cdot \tan \widehat{ABF_2}$.

Lời giải: Giả sử $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} &= (-c-a)(c-a) + \left(-c^2 + b^2\right) \\ &= a^2 + b^2 - 2c^2 = 0 \end{aligned}$$

Mà $a^2 + b^2 - 2c^2 = -a^2 + 3b^2 = 0$, nên $a = \sqrt{3}b$, $c = \sqrt{2}b$.
Gọi O là gốc toạ độ, khi đó

$$\tan \widehat{ABO} = \frac{a}{b} = \sqrt{3}, \qquad \tan \widehat{OBF_1} = \tan \widehat{OBF_2} = \frac{c}{b} = \sqrt{2}.$$

Do đó

$$\tan \widehat{ABF_1} \cdot \tan \widehat{ABF_2} = \tan(\widehat{ABO} + \widehat{OBF_1}) \cdot \tan(\widehat{ABO} - \widehat{OBF_1}) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{6}} = -\frac{1}{5}.$$

■

Câu 10. Giả sử các số dương a, b, c thoả $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 4b + 12c - 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Lời giải: Từ đề bài, ta suy ra $a^2 + (2b-1)^2 + (3c-2)^2 = 3$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$3\left[a^2 + (2b-1)^2 + (3c-2)^2\right] \geq (a + 2b - 1 + 3c - 2)^2 = (a + 2b + 3c - 3)^2 \Rightarrow a + 2b + 3c \leq 6.$$

Lại theo Cauchy:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)(a + 2b + 3c) \geq (1 + 2 + 3)^2 = 36$$

Nên

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq \frac{36}{a + 2b + 3c} \geq 6$$

Dấu bằng xảy khi $a = b = c = 1$.
Vậy giá trị nhỏ nhất là 6 khi $a = b = c = 1$. ∎

Câu 11. Cho dãy $\{a_n\}$ với số hạng tổng quát

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên dương m sao cho $a_{m+4}a_m - 1$ là số chính phương.

Lời giải: Gọi $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, khi đó $q_1 + q_2 = 1$, $q_1 q_2 = -1$ và

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^n - q_2^n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Hiển nhiên ta có $a_1 = a_2 = 1$ và $q_i + 1 = q_i^2 (i = 1, 2)$. Khi đó:

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^n - q_2^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^n (q_1 + 1) - q_2^n (q_2 + 1)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{n+2} - q_2^{n+2}\right) \end{aligned}$$

Hay

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dễ thấy dãy $\{a_n\}$ là dãy chỉ gồm các số nguyên dương.

Ta thấy $q_1^4 + q_2^4 = 7$, từ đó với mọi $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_{2n+3}a_{2n-1} - 1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{2n+3} - q_2^{2n+3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{2n-1} - q_2^{2n-1}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} - (q_1q_2)^{2n-1} q_1^4 - (q_1q_2)^{2n-1} q_2^4\right) - 1 \\
&= \frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} + q_1^4 + q_2^4\right) - 1 \\
&= \frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} + 7\right) - 1 \\
&= \frac{1}{5}\left(q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} + 2\right) \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{2n+1} + q_2^{2n+1}\right)\right]^2 \\
&= a_{2n+1}^2
\end{aligned}$$

Do đó, với mọi số nguyên n thì $a_{2n+3}a_{2n-1} - 1$ là số chính phương, hay $a_{m+4}a_m - 1$ là số chính phương với mọi m lẻ dương.
Vậy có vô hạn m thỏa đề bài. ■

§3. ĐỀ TUYỂN CHỌN ĐỘI TUYỂN TRUNG QUỐC VÒNG 1 (2021) - ĐỀ A

Đề A

Phần I. Trả lời ngắn (Bài 1–8, mỗi bài 8 điểm)

Câu 1. Giả sử cấp số cộng $\{a_n\}$ thỏa $a_{2021} = a_{20} + a_{21} = 1$. Khi đó giá trị của a_1 bằng bao nhiêu?

Lời giải: Gọi công sai là d. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a_1 + 2020d = 1, \\ 2a_1 + 39d = 1. \end{cases}$ Giải ra được $a_1 = \dfrac{1981}{4001}$.

■

Câu 2. Cho tập $A = \{1, 2, m\}$ với $m \in \mathbb{R}$. Đặt $B = \{a^2 \mid a \in A\}$ và $C = A \cup B$. Nếu tổng tất cả phần tử của C bằng 6, hãy tính tích tất cả phần tử của C.

Lời giải: Theo điều kiện, các phần tử (kể cả trùng lặp) của C là $1, 2, 4, m, m^2$.
Vì $m \in \mathbb{R}$ nên $1 + 2 + 4 + m + m^2 > 6$ và $1 + 2 + 4 + m^2 > 6$. Do đó chỉ có thể $C = \{1, 2, 4, m\}$ và $1 + 2 + 4 + m = 6$, suy ra $m = -1$.
Khi đó tích các phần tử của C là $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -8$. ■

Câu 3. Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa: với mọi $x \in \mathbb{R}$ khác 0, ta có

$$f(x) = f(1) \cdot x + \frac{f(2)}{x} - 1.$$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $(0, +\infty)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Lấy $x = 1, 2$ ta được $f(1) = f(1) + f(2) - 1$ và $f(2) = 2f(1) + \dfrac{f(2)}{2} - 1$. Giải ra $f(2) = 1$, $f(1) = \dfrac{3}{4}$. Vì vậy, với $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{x} - 1.$$

Trên $(0, +\infty)$, theo bất đẳng thức AM-GM: $f(x) \geq 2\sqrt{\dfrac{3}{4}x \cdot \dfrac{1}{x}} - 1 = \sqrt{3} - 1$, dấu bằng khi $x = 3$. Do đó giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{3} - 1$. ■

Câu 4. Cho $f(x) = \cos x + \log_2 x$ $(x > 0)$. Nếu số thực dương a thỏa $f(a) = f(2a)$, hãy tính $f(2a) - f(4a)$.

Lời giải: Từ $\cos a + \log_2 a = \cos 2a + \log_2 2a = 2\cos^2 a - 1 + 1 + \log_2 a$ suy ra $\cos a = 2\cos^2 a$. Do đó $\cos a = 0$ hoặc $\cos a = \dfrac{1}{2}$, tương ứng $\cos 2a = -1$ hoặc $\cos 2a = -\dfrac{1}{2}$. Vì thế

$$\begin{aligned} f(2a) - f(4a) &= \cos 2a + \log_2 2a - \cos 4a - \log_2 4a \\ &= \cos 2a - 2\cos^2 2a \\ &= \begin{cases} -3, & \text{nếu } \cos 2a = -1, \\ -1, & \text{nếu } \cos 2a = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Câu 5. Trong tam giác ABC, $AB = 1$, $AC = 2$, $B - C = \frac{2\pi}{3}$. Diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu?

🔑 ***Lời giải:*** Theo định lý sin, $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = 2$. Do $B - C = \frac{2\pi}{3}$, ta có

$$2\sin C = \sin B = \sin\left(C + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin C + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C,$$

nghĩa là $\frac{5}{2}\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$, suy ra $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{5}$. Gọi diện tích S. Do $A = \pi - B - C = \frac{\pi}{3} - 2C$, nên

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2C - \frac{1}{2}\sin 2C.$$

Vì $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{5}$, suy ra $\cos 2C = \frac{1-\tan^2 C}{1+\tan^2 C} = \frac{11}{14}$, $\sin 2C = \frac{2\tan C}{1+\tan^2 C} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$. Do đó

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11}{14} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

■

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ vuông góc xOy, tiêu điểm của parabol $\Gamma : y^2 = 2px$ $(p > 0)$ là F. Qua điểm P (khác O) trên Γ, kẻ tiếp tuyến với Γ cắt trục Oy tại Q. Nếu $|FP| = 2$, $|FQ| = 1$, hãy tính tích vô hướng $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$.

🔑 ***Lời giải:*** Đặt $P(\frac{t^2}{2p}, t)$ $(t \neq 0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến là $yt = p\left(x + \frac{t^2}{2p}\right)$.

Cho $x = 0$ ta được $yt = \frac{t}{2}$. Tọa độ F là $(\frac{p}{2}, 0)$, do đó

$$|FP| = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{t^2}{2p}\right)^2 + t^2} = \frac{p}{2} + \frac{t^2}{2p}, \quad |FQ| = \frac{\sqrt{p^2+t^2}}{2}.$$

Từ $|FP| = 2$, $|FQ| = 1$ suy ra lần lượt $p^2 + t^2 = 4p$ và $p^2 + t^2 = 4$. Suy ra $p = 1$, $t^2 = 3$.

Vì vậy $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{t^2}{2} = \frac{3}{2}$. ■

Câu 7. Một con xúc xắc cân bằng có 6 mặt lần lượt ghi các số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Xúc xắc được gieo ba lần độc lập, kết quả thu được theo thứ tự là a_1, a_2, a_3. Xác suất của biến cố $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1| = 6$ bằng bao nhiêu?

🔑 ***Lời giải:*** Ta có $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1| = 2\max\limits_{1\le i\le 3} a_i - 2\min\limits_{1\le i\le 3} a_i$.

Do đó điều kiện thỏa nếu và chỉ nếu hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 3, tức a_1, a_2, a_3 là một hoán vị của $x, x+d, x+3$ với $x \in \{1, 2, 3\}$ và $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Với mỗi $x \in \{1, 2, 3\}$: khi $d = 0$ hoặc $d = 3$ có 3 hoán vị khác nhau; khi $d = 1$ hoặc $d = 2$ có 6 hoán vị khác nhau.

Vậy có $3 \times (2 \times 3 + 2 \times 6) = 54$ trường hợp.

Suy ra xác suất cần tìm là $\frac{54}{6^3} = \frac{1}{4}$. ■

Câu 8. Cho số hữu tỷ $r = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ với p, q nguyên dương nguyên tố cùng nhau, và pq chia hết 3600. Hỏi có bao nhiêu số r như vậy?

Lời giải: Xét tập $\Omega = \left\{ r \,\middle|\, r = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{N}_+,\ (p,q) = 1,\ pq \mid 3600 \right\}$

Ta xét phân số tối giản $\frac{p}{q}$ của một phần tử bất kỳ $r \in \Omega$.

Vì $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, ta đặt $p = 2^A \cdot 3^B \cdot 5^C$, $q = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, trong đó $\min\{A,a\} = \min\{B,b\} = \min\{C,c\} = 0$ và $A + a \le 4$, $B + b \le 2$, $C + c \le 2$.

Khi đó có 9 cách chọn cặp (A,a), 5 cách chọn cặp (B,b) và 5 cách chọn cặp (C,c). Suy ra $|\Omega| = 9 \times 5 \times 5 = 225$. Các số hữu tỷ thỏa yêu cầu là $\Omega \cap (0,1)$. Chú ý $r \in \Omega$ khi và chỉ khi $\frac{1}{r} \in \Omega$, riêng $1 \in \Omega$. Do đó các phần tử trong $\Omega \setminus \{1\}$ bắt cặp theo tích bằng 1, số cặp là $\frac{1}{2}(|\Omega| - 1) = 112$, và mỗi cặp có đúng một số thuộc $(0,1)$.

Vậy số r cần tìm là 112. ■

Phần II. Bài toán tự luận (Bài 9 16 điểm, Bài 10 và Bài 11 mỗi bài 20 điểm)

Câu 9. Cho dãy số phức $\{z_n\}$ thỏa

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_{n+1} = \overline{z_n}\,(1 + z_n\,\mathrm{i}) \quad (n = 1,2,\dots)$$

Trong đó i là đơn vị ảo. Tính z_{2021}.

Lời giải: Với $n \in \mathbb{N}_+$, đặt $z_n = a_n + b_n\mathrm{i}$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\mathrm{i} = z_{n+1} &= \overline{z_n}\,(1 + z_n\mathrm{i}) = \overline{z_n} + |z_n|^2 \cdot \mathrm{i} \\ &= a_n - b_n\mathrm{i} + \left(a_n^2 + b_n^2\right)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

Suy ra $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 - b_n$. Từ $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 0$, nên $a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và

$$b_{n+1} = b_n^2 - b_n + \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(b_n - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Với $n \ge 2$,

$$b_n = \frac{1}{2} + \left(b_1 - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

Do đó

$$z_{2021} = a_{2021} + b_{2021}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^{2020}}}\right)\mathrm{i}.$$

■

Câu 10. Trong hệ tọa độ phẳng, đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{|x|+1}$ có ba điểm khác nhau cùng nằm trên một đường thẳng l, và tổng hoành độ của ba điểm này bằng 0. Tìm khoảng giá trị của hệ số góc (slope) của l.

Lời giải: Khi $x \ge 0$ thì $y = 1$; khi $x < 0$ thì $y = \frac{x+1}{1-x}$ là hàm tăng theo x và bé hơn 1. Gọi đường thẳng $l:\ y = kx + b$. Khi đó điều kiện bài toán tương đương phương trình

$$kx + b = \frac{x+1}{|x|+1} \tag{1}$$

có ba nghiệm thực phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ thỏa $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
Trước hết $k \neq 0$, vì nếu l là $y = 1$ thì tổng hoành độ của ba giao điểm bất kỳ với đồ thị trên sẽ lớn hơn 0, mâu thuẫn.
Khi $x < 0$, (1) tương đương

$$kx^2 - (k - b - 1)x + 1 - b = 0 \tag{2}$$

có nhiều nhất hai nghiệm âm. Khi $x \geq 0$, (1) tương đương

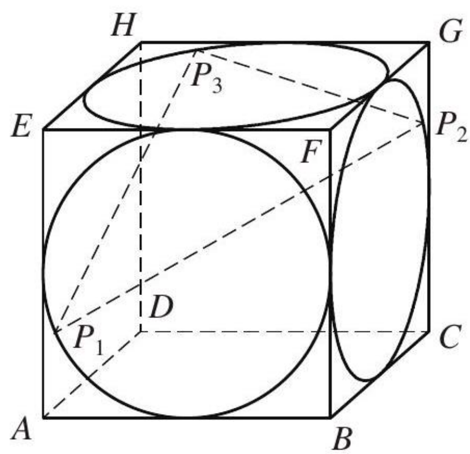
$$kx + b = 1 \tag{3}$$

có nhiều nhất một nghiệm không âm. Do đó (2) có hai nghiệm âm x_1, x_2, trong đó

$$x_1 + x_2 = \frac{k - b - 1}{2}$$

Ta nhận thấy phương trình (3) có 1 nghiệm không âm $x_3 = \dfrac{1-b}{k}$. Từ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ta suy ra $k = 2b$, và $x_3 = \dfrac{1-b}{2b}$. Vì $x_3 \geq 0$ nên $0 < b \leq 1$. Phương trình (2) trở thành $2bx^2 + (1-b)x + 1 - b = 0$. Theo điều kiện $\Delta = (1-b)^2 - 4 \cdot 2b(1-b) = (1-b)(1-9b) > 0$, kết hợp $0 < b \leq 1$ suy ra $0 < b < \dfrac{1}{9}$ (kiểm tra cho thấy x_1, x_2 thực sự âm).
Kết luận: khoảng giá trị của hệ số góc $k = 2b$ là $0 < k < \dfrac{2}{9}$. ■

Câu 11. Như hình vẽ (hình lập phương $ABCD-EFGH$ có cạnh bằng 2), chọn điểm bất kỳ P_1 trên đường tròn nội tiếp hình vuông $ABFE$, chọn điểm bất kỳ P_2 trên đường tròn nội tiếp hình vuông $BCGF$, và chọn điểm bất kỳ P_3 trên đường tròn nội tiếp hình vuông $EFGH$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_1|$.



Lời giải: Thiết lập hệ trục tọa độ Đề-các trong không gian, lấy tâm khối lập phương làm gốc, các hướng $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}$ lần lượt là chiều dương trục x, y, z. Theo điều kiện, đặt

$$P_1(1, \cos\alpha_1, \sin\alpha_1), \quad P_2(\sin\alpha_2, 1, \cos\alpha_2), \quad P_3(\cos\alpha_3, \sin\alpha_3, 1).$$

Quy ước $P_4 = P_1$ và $\alpha_4 = \alpha_1$. Ký hiệu $d_i = |P_iP_{i+1}|$ $(i = 1, 2, 3)$. Khi đó

$$d_i^2 = (1 - \sin\alpha_{i+1})^2 + (1 - \cos\alpha_i)^2 + (\sin\alpha_i - \cos\alpha_{i+1})^2.$$

Gọi $f = |P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_1|$. Trước hết, tìm giá trị nhỏ nhất của f. Với $i = 1, 2, 3$, theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz và AM-GM:

$$\begin{aligned} d_i^2 &\geq (1 - \sin\alpha_{i+1})^2 + (1 - \cos\alpha_i)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\big((1 - \sin\alpha_{i+1}) + (1 - \cos\alpha_i)\big)^2, \end{aligned}$$

Suy ra $d_i \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\big(2 - \sin\alpha_{i+1} - \cos\alpha_i\big)$. Do đó

$$\begin{aligned} f &= d_1 + d_2 + d_3 \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{3}\big(2 - \sin\alpha_{i+1} - \cos\alpha_i\big) \\ &= 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{i=1}^{3}(\sin\alpha_i + \cos\alpha_i) \\ &= 3\sqrt{2} - \sum_{i=1}^{3}\sin\left(\alpha_i + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\geq 3\sqrt{2} - 3. \end{aligned}$$

Dấu bằng đạt khi $\alpha_i = \dfrac{\pi}{4}$ $(i = 1, 2, 3)$, nên giá trị nhỏ nhất là $3\sqrt{2} - 3$. Tiếp theo, tìm giá trị lớn nhất của f. Từ biểu thức trên,

$$d_i^2 = 4 - 2\cos\alpha_i - 2\sin\alpha_{i+1} - 2\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1}.$$

Vì $\sin\alpha_i \geq -1$, $\cos\alpha_i \geq -1$ $(i = 1, 2, 3)$ nên

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} d_i^2 &= 12 - 2\Big(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_{i+1} + \sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1}\Big) \\ &= 12 - 2\Big(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i + \sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_{i+1} + \sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1}\Big) \\ &= 18 - 2\sum_{i=1}^{3}(1 + \sin\alpha_i)(1 + \cos\alpha_{i+1}) \leq 18. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, $f^2 \leq 3\big(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\big) = 54$, suy ra $f \leq 3\sqrt{6}$. Dấu bằng đạt khi $\alpha_i = \pi$ $(i = 1, 2, 3)$. Kết luận: giá trị nhỏ nhất của f là $3\sqrt{2} - 3$, và lớn nhất là $3\sqrt{6}$. ■

§4. ĐỀ TUYỂN CHỌN ĐỘI TUYỂN TRUNG QUỐC VÒNG 1 (2021) - ĐỀ B

Đề B

Phần I. Trả lời ngắn (Bài 1–8, mỗi bài 8 điểm)

Câu 1. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ có công sai $d \neq 0$ và $a_{2021} = a_{20} + a_{21}$. Khi đó giá trị của $\dfrac{a_1}{d}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Theo giả thiết: $a_1 + 2020d = (a_1 + 19d) + (a_1 + 20d)$. Do $d \neq 0$ nên $\dfrac{a_1}{d} = 1981$. ■

Câu 2. Giả sử $m \in \mathbb{R}$, và các số phức $z_1 = 1 + 2\,\mathrm{i}$, $z_2 = m + 3\,\mathrm{i}$, với i là đơn vị ảo. Nếu $z_1 \cdot \overline{z_2}$ là số thuần ảo, hãy tính $|z_1 + z_2|$.

Lời giải: Ta có $z_1 \cdot \overline{z_2} = (1+2\mathrm{i})(m-3\mathrm{i}) = m + 6 + (2m-3)\mathrm{i}$ là thuần ảo $\Rightarrow m = -6$. Khi đó $|z_1 + z_2| = |-5+5\mathrm{i}| = 5\sqrt{2}$. ■

Câu 3. Tìm khoảng giá trị của $y = \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x$ khi $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x \\ &= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x \\ &= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Với $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ thì $\dfrac{\pi}{3} \leq 2x - \dfrac{\pi}{6} \leq \dfrac{5\pi}{6}$, nên $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Do đó $y \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$. ■

Câu 4. Cho miền xác định của hàm $f(x)$ là $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ và với mọi $x \in D$ ta có $f(x) = \dfrac{f(1)\cdot x^2 + f(2)\cdot x - 1}{x}$. Khi đó tổng các nghiệm của $f(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Đặt $x = 1, 2$ được

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1) + f(2) - 1, \\ f(2) &= 2f(1) + f(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Giải ra $f(2) = 1$, $f(1) = \dfrac{1}{4}$. Vậy

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{4}x^2 + x - 1\right) \quad (x \neq 0).$$

Giải $f(x) = 0$ cho x được $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$, nên tổng các nghiệm là -4. ■

Câu 5. Giả sử $a, b, c > 1$ và $\left(a^2 b\right)^{\log_a c} = a \cdot (ac)^{\log_a b}$. Khi đó giá trị của $\log_c(ab)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Lấy log cơ số a hai vế: $\log_a c \cdot (2 + \log_a b) = 1 + \log_a b \cdot (1 + \log_a c)$.
Suy ra $2\log_a c = 1 + \log_a b$, tức $c^2 = ab$.
Vậy $\log_c(ab) = \log_c c^2 = 2$. ■

Câu 6. Trong tam giác ABC, $AB = 1$, $AC = 2$ và $\cos B = 2\sin C$. Khi đó độ dài cạnh BC bằng bao nhiêu?

Lời giải: Theo định lý sin: $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{AC}{AB} = 2$, nên $\sin B = 2\sin C = \cos B$, tức $\tan B = 1 \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{4}$.

Gọi $BC = a > 0$. Theo định lý cosin: $4 = 1 + a^2 - 2a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $a = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$. ■

Câu 7. Trong hệ trục tọa độ xOy, đồ thị parabol $y = ax^2 - 3x + 3$ $(a \neq 0)$ và đồ thị $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x + m$. Khi đó tích apm bằng bao nhiêu?

Lời giải: Với mọi điểm (x_0, y_0) trên $y = ax^2 - 3x + 3$ ta có $y_0 = ax_0^2 - 3x_0 + 3$.
Gọi điểm đối xứng của (x_0, y_0) qua $y = x + m$ là (x_1, y_1).
Từ $\dfrac{y_1 + y_0}{2} = \dfrac{x_1 + x_0}{2} + m$ và $x_1 + y_1 = x_0 + y_0$ suy ra $x_1 = y_0 - m$, $y_1 = x_0 + m$.
Vì (x_1, y_1) thuộc $y^2 = 2px$ nên $(x_0 + m)^2 = 2p(y_0 - m)$, tương đương

$$y_0 = \frac{1}{2p}x_0^2 + \frac{m}{p}x_0 + \frac{m^2}{2p} + m.$$

So sánh hệ số với $y_0 = ax_0^2 - 3x_0 + 3$ cho $\dfrac{1}{2p} = a$, $\dfrac{m}{p} = -3$, $\dfrac{m^2}{2p} + m = 3$.
Từ đó $3 = \dfrac{m}{p} \cdot \dfrac{m}{2} + m = -3 \cdot \dfrac{m}{2} + m = -\dfrac{m}{2}$, nghiệm $m = -6$.
Suy ra $p = 2$, $a = \dfrac{1}{4}$.
Vậy $apm = 2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot (-6) = -3$. ■

Câu 8. Lấy hoán vị ngẫu nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ của $1, 2, \ldots, 10$. Xác suất để cả hai số 9 và 12 đều xuất hiện trong 9 số $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_9a_{10}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải: Điều kiện thỏa nếu và chỉ nếu trong hoán vị, các số 1 và 9 kề nhau, và có ít nhất một cặp trong hai cặp $(2, 6)$ và $(3, 4)$ kề nhau.
Gọi số hoán vị có $(2, 6)$ kề nhau là N_1, có $(3, 4)$ kề nhau là N_2, và có đồng thời cả $(2, 6)$ và $(3, 4)$ kề nhau là N_3.
Để tính N_1, ta "gộp" cặp $(1, 9)$ và cặp $(2, 6)$ thành hai khối, rồi sắp với 6 số còn lại: có $8!$ cách. Xét thêm thứ tự bên trong của từng cặp, được $N_1 = 2^2 \times 8!$.
Tương tự $N_2 = 2^2 \times 8!$, còn $N_3 = 2^3 \times 7!$.
Theo công thức cộng-trừ (bao hàm-loại trừ), $N = N_1 + N_2 - N_3 = 8 \times (8! - 7!) = 7 \times 8!$.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{N}{10!} = \dfrac{7}{90}$. ■

Phần II. Bài toán tự luận (Bài 9 16 điểm, Bài 10 và Bài 11 mỗi bài 20 điểm)

Câu 9. Dãy $\{a_n\}$ thỏa $a_1 = a_2 = a_3$. Đặt

$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

Nếu $\{b_n\}$ là cấp số nhân có công bội 3, hãy tính a_{100}.

Lời giải: Theo giả thiết $b_n = b_1 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_+)$. Do đó

$$a_{n+3} - a_n = b_{n+1} - b_n = 3^{n+1} - 3^n = 2 \cdot 3^n \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
a_{100} &= a_1 + \sum_{k=1}^{33} \left(a_{3k+1} - a_{3k-2}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{33} 2 \cdot 3^{3k-2} \\
&= 1 + 6 \cdot \frac{27^{33} - 1}{27 - 1} \\
&= 1 + \frac{3}{13}\left(3^{99} - 1\right) = \frac{3^{100} + 10}{13}.
\end{aligned}$$

■

Câu 10. Trong hệ trục tọa độ xOy, đồ thị $y = \dfrac{1}{|x|}$ là Γ. Lấy các điểm P, Q trên Γ sao cho: P ở góc phần tư thứ nhất, Q ở góc phần tư thứ hai, và đường thẳng PQ là tiếp tuyến của nhánh Γ ở góc phần tư thứ hai tại điểm Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|PQ|$.

Lời giải: Khi $x > 0, y = \dfrac{1}{x}$. Khi $x < 0, y = -\dfrac{1}{x}$, đạo hàm $y' = -\dfrac{1}{x^2}$.
Đặt $Q(-a, \dfrac{1}{a})$ với $a > 0$. Theo điều kiện, hệ số góc của PQ là $y'\big|_{x=-a} = \dfrac{1}{a^2}$.
Ta có phương trình PQ: $y = \dfrac{1}{a^2}(x + a) + \dfrac{1}{a} = \dfrac{x + 2a}{a^2}$.
Kết hợp với $y = \dfrac{1}{x}$ (với $x > 0$) ta có phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 + 2ax - a^2 = 0$, nên hoành độ của P là $x_P = (\sqrt{2} - 1)a$ (loại nghiệm âm).
Do đó

$$\begin{aligned}
|PQ| &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2} \cdot |x_P - x_Q| \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{a^4}} \cdot \sqrt{2}\, a \\
&\geq \sqrt{2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{a^4}}} \cdot \sqrt{2}\, a = 2.
\end{aligned}$$

Dấu bằng khi $a = 1$, tức $Q(-1, 1)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $|PQ|$ là 2. ■

Câu 11. Trong kim tự tháp đều $P{-}A_1A_2\cdots A_n$ $(n \geq 3)$, O là tâm đa giác đều đáy $A_1A_2\cdots A_n$ và B là trung điểm cạnh A_1A_n.

a) Chứng minh $PO^2 \sin\dfrac{\pi}{n} + PA_1^2 \cos^2\dfrac{\pi}{n} = PB^2$.

b) Gọi góc giữa cạnh bên và mặt đáy là α, góc giữa mặt bên và mặt đáy là β. Hãy xác định quan hệ độ lớn giữa $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos\widehat{A_iPB}$ và $\sin\alpha \sin\beta$, rồi chứng minh.

Lời giải: **(1)** Vì $PO \perp$ mặt đáy $A_1A_2\cdots A_n$ nên $\widehat{POA_1} = \widehat{POB} = 90^\circ$. Đặt $OA_1 = r$, khi đó $OB = OA_1 \cdot \cos\widehat{A_1OB} = r\cos\dfrac{\pi}{n}$. Suy ra

$$r^2 + PO^2 = PA_1^2, \quad r^2\cos^2\frac{\pi}{n} + PO^2 = PB^2.$$

Khử r^2: $PO^2\left(1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\right) = PB^2 - PA_1^2\cos^2\dfrac{\pi}{n}$, tức

$$PO^2\sin\frac{\pi}{n} + PA_1^2\cos^2\frac{\pi}{n} = PB^2.$$

(2) Theo giả thiết: $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$. Gọi độ dài cạnh bên là l. Khi đó

$$\begin{aligned}
l\cdot|PB|\cdot\sum_{i=1}^{n}\cos\widehat{A_iPB} &= \sum_{i=1}^{n}|PA_i|\cdot|PB|\cdot\cos\widehat{A_iPB}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PB}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_i})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB}\right)\\
&= n\,\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OB}\cdot\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\\
&= n\cdot|PO|^2.
\end{aligned}$$

Bước cuối dùng $\vec{s} = \sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}$ (do O là tâm đa giác đều). Vậy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\widehat{A_iPB} = \frac{|PO|^2}{l\cdot|PB|} = \frac{PO}{l}\cdot\frac{PO}{PB} = \sin\widehat{PA_1O}\cdot\sin\widehat{PBO}.$$

Rõ ràng $\widehat{PA_1O}$ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy, và do $OB\perp A_1A_n$, $PB\perp A_1A_n$ nên $\widehat{PBO}$ là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Suy ra $\widehat{PA_1O}=\alpha$, $\widehat{PBO}=\beta$. Theo đó, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\widehat{A_iPB} = \sin\alpha\sin\beta$.

■