# ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TPHCM

**Năm học 2025 - 2026**

## Môn thi: TOÁN

## Ngày thi thứ nhất

*Thời gian: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Thực hiện bởi đội ngũ giáo viên - trợ giảng trung tâm STAR EDUCATION

**VÕ HOÀNG THÀNH - NGUYỄN PHƯỚC THỊNH - ĐOÀN QUANG ĐĂNG - HUỲNH TRUNG HIẾU - NGUYỄN MINH HUY - CAO QUỐC HƯNG**

**Bài 1.** Cho các dãy số thực $(a_n),(b_n),(c_n)$ thoả mãn $a_1=2, b_1=3, c_1=4$ và với mọi số tự nhiên $n\geq 2$, ta có

$$a_n=a_{n-1}+\frac{c_{n-1}}{n},\ b_n=b_{n-1}+\frac{a_{n-1}}{n},\ c_n=c_{n-1}+\frac{b_{n-1}}{n}.$$

Xét dãy số $(d_n)$ xác định bởi: $d_n=(a_n-b_n)^2+(b_n-c_n)^2+(c_n-a_n)^2,\ n\in\mathbb{N}^*$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{d_n}{d_{n-1}}$.

Đặt $x_n=a_n-b_n, y_n=b_n-c_n, z_n=c_n-a_n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, ta có

$$x_n=a_n-b_n=\left(a_{n-1}+\frac{c_{n-1}}{n}\right)-\left(\frac{b_{n-1}}{n}+\frac{a_{n-1}}{n}\right)=a_{n-1}-b_{n-1}+\frac{c_{n-1}-a_{n-1}}{n}=x_{n-1}+\frac{z_{n-1}}{n}.$$

Tương tự với $(y_n),(z_n)$, ta thu được

$$x_n=x_{n-1}+\frac{z_{n-1}}{n},\ y_n=y_{n-1}+\frac{x_{n-1}}{n},\ z_n=z_{n-1}+\frac{y_{n-1}}{n},\ \forall n\geq 2.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}d_n&=\left(x_{n-1}+\frac{z_{n-1}}{n}\right)^2+\left(y_{n-1}+\frac{x_{n-1}}{n}\right)^2+\left(z_{n-1}+\frac{y_{n-1}}{n}\right)^2\\&=x_{n-1}^2+y_{n-1}^2+z_{n-1}^2+\frac{2}{n}\left(x_{n-1}y_{n-1}+y_{n-1}z_{n-1}+z_{n-1}x_{n-1}\right)+\frac{1}{n^2}\left(x_{n-1}^2+y_{n-1}^2+z_{n-1}^2\right),\ \forall n\geq 2.\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}=(a_{n-1}-b_{n-1})+(b_{n-1}-c_{n-1})+(c_{n-1}-a_{n-1})=0,\ \forall n\geq 2$ nên

$$\begin{aligned}&(x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1})^2=0,\ \forall n\geq 2\\ \Leftrightarrow\ &2\left(x_{n-1}y_{n-1}+y_{n-1}z_{n-1}+z_{n-1}x_{n-1}\right)=-\left(x_{n-1}^2+y_{n-1}^2+z_{n-1}^2\right)=-d_{n-1},\ \forall n\geq 2.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$d_n=d_{n-1}-\frac{1}{n}d_{n-1}+\frac{1}{n^2}d_{n-1}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)d_{n-1},\ \forall n\geq 2\Leftrightarrow\frac{d_n}{d_{n-1}}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\ \forall n\geq 2.$$

Đến đây cho $n\to+\infty$, kết hợp với $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1$ ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{d_n}{d_{n-1}}=1$.

**Bài 2.** Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực có bậc không vượt quá 2025. Biết rằng $P(k^2) = k$ với mọi $k \in \overline{0, 2025}$. Đặt $f(x) = \begin{cases} \dfrac{P(x^2) - x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ -1, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x+1) - f(x) = 0$ có đúng 4048 nghiệm thực phân biệt.

b) Chứng minh rằng $P(2026^2) = C_{4050}^{2025} + 2026$.

a) Với $x \neq 0, -1$, ta có

$$f(x+1) - f(x) = \frac{P\big((x+1)^2\big) - (x+1)}{x+1} - \frac{P(x^2) - x}{x} = \frac{xP\big((x+1)^2\big) - (x+1)P(x^2)}{x(x+1)} = \frac{S(x)}{x(x+1)},$$

trong đó

$$S(x) = xP\big((x+1)^2\big) - (x+1)P(x^2).$$

Với mỗi $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2024\}$, ta có $P(m^2) = m$ và $P((m+1)^2) = m+1$. Do đó

$$S(m) = mP\big((m+1)^2\big) - (m+1)P(m^2) = m(m+1) - (m+1)m = 0.$$

Do đó đa thức $S(x)$ nhận $0, 1, 2, \dots, 2024$ làm nghiệm.

Ta cũng có

$$S(-m-1) = (-m-1)P((-m-1)^2) + (m)P(m^2) = (-m-1)m + m(m+1) = 0.$$

Do đó đa thức $S(x)$ nhận $-1, -2, \dots, -2025$ làm nghiệm.

Cuối cùng, chú ý rằng $S(x)$ có bậc không vượt quá 4050 (do hệ số bậc 4051 bị triệt tiêu) nên $S(x)$ có tối đa 4050 nghiệm thực phân biệt. Do đó $S(x)$ có đúng 4050 nghiệm phân biệt là $-2025, -2024, \dots, 2023, 2024$. Dễ dàng kiểm tra được $-1$ và $0$ không là nghiệm của phương trình

$$f(x+1) - f(x) = 0.$$

Vậy phương trình $f(x+1) - f(x) = 0$ có đúng $4050 - 2 = 4048$ nghiệm thực phân biệt.

b) Theo giả thiết thì đa thức $P(x)$ có bậc không vượt quá 2025 và $P(k^2) = k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, 2025$. Sử dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức $P(x)$ với các mốc nội suy $0^2, 1^2, \dots, 2025^2$, ta được

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2025} P(i^2) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} \frac{x - j^2}{i^2 - j^2}.$$

Do đó

$$P(2026^2) = \sum_{i=0}^{2025} P(i^2) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2025} \frac{2026^2 - j^2}{i^2 - j^2}. \tag{1}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(2026^2-j^2) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(2026-j)(2026+j)\\
&= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(2026-j)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(2026+j)\\
&= \frac{2026!}{(2026-i)}\cdot\frac{4051!}{(2026+i)2025!} = \frac{2026\cdot 4051!}{2026^2-i^2}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i^2-j^2) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i-j)(i+j)\\
&= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i-j)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2025}(i+j)\\
&= i!(2025-i)!(-1)^{2025-i}\frac{(i+2025)!}{(i-1)!2i}\\
&= i!(2025-i)!(-1)^{i+1}\frac{(i+2025)!}{2i!}\\
&= \frac{(2025-i)!(i+2025)!(-1)^{i+1}}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned}
VP(1) &= \sum_{i=0}^{2025}P(i^2)\frac{2026\cdot 4051!}{2026^2-i^2}\cdot\frac{2}{(2025-i)!(i+2025)!(-1)^{i+1}}\\
&= \sum_{i=0}^{2025}\frac{i(-1)^{i+1}4052!}{(2026-i)!(2026+i)!} = \sum_{i=0}^{2025}i(-1)^{i+1}C_{4052}^{i+2026}.
\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta chứng minh $\sum_{i=0}^{2025}i(-1)^{i+1}C_{4052}^{i+2026} = 2026+C_{4050}^{2025}$. Do $C_n^i+C_n^{i+1} = C_{n+1}^{i+1},\ \forall 0\leq i<n$ nên

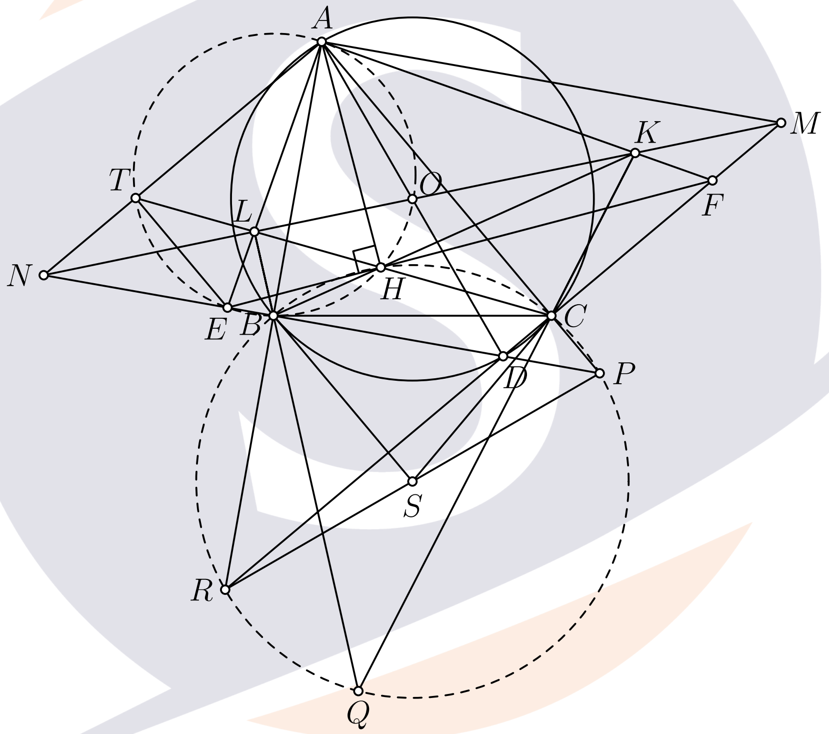
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2025}i(-1)^{i+1}C_{4052}^{i+2026} &= \sum_{i=0}^{2025}i(-1)^{i+1}C_{4052}^{2026-i}\\
&= C_{4052}^{2025}-2C_{4052}^{2024}+3C_{4052}^{2023}+\cdots-2024C_{4052}^{2}+2025C_{4052}^{1}\\
&= (C_{4051}^{2025}+C_{4051}^{2024})-2(C_{4051}^{2024}+C_{4051}^{2023})+3(C_{4051}^{2023}+C_{4051}^{2022})+\cdots\\
&\quad -2024(C_{4051}^{2}+C_{4051}^{1})+2025(C_{4051}^{1}+C_{4051}^{0})\\
&= C_{4051}^{2025}-C_{4051}^{2024}+C_{4051}^{2023}+\cdots+C_{4051}^{1}+2025\\
&= (C_{2024}^{4050}+C_{4050}^{2025})-(C_{4050}^{2024}+C_{4050}^{2023})+(C_{4050}^{2022}+C_{4050}^{2023})+\cdots\\
&\quad +(C_{4050}^{0}+C_{4050}^{1})+2025\\
&= 2026+C_{4050}^{2025}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Bài 3.** Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$, đường kính $AD$. Trên tia $DB, DC$ lần lượt lấy các điểm $E, F$ di động sao cho $\widehat{EAF} = 90^\circ$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên $EF$, $K$ là giao điểm của $BH$ và $AF$, $L$ là giao điểm của $CH$ và $AE$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng $LK$ cố định khi $E, F$ đi động.

b) Chứng minh rằng giao điểm của $BL$ và $CK$ thuộc một đường tròn cố định khi $E, F$ di động.




a) Qua $A$ kẻ đường thẳng vuông góc với $AB, AC$ lần lượt cắt $DC, DB$ tại $M, N$. Ta chứng minh $M, N, L, K$ thẳng hàng.

Thật vậy, gọi $T$ là giao điểm của $CL$ và $AN$. Ta có $\widehat{AHE} = \widehat{ABE} = 90^\circ$ nên $A, H, B, E$ đồng viên (1).

Tương tự, ta được $A, H, C, F$ đồng viên. Mặt khác, do $\widehat{NAC} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ nên

$$\widehat{NAE} = \widehat{CAF} = \widehat{CHF} = \widehat{THE}.$$

Do đó $A, E, T, H$ đồng viên (2). Từ (1) và (2) suy ra $A, E, H, T, B$ đồng viên.

Áp dụng *Định lý Pascal* cho bộ điểm $\begin{pmatrix} E & A & H \\ T & B & A \end{pmatrix}$ suy ra $N, L, K$ thẳng hàng.

Tương tự, ta được $M, L, K$ thẳng hàng. Vậy $M, N, L, K$ thẳng hàng, do $M, N$ cố định nên đường thẳng $LK$ cố định.

b) Gọi $P, R, Q$ lần lượt là giao điểm của $DB$ và $AC$, $DC$ và $AB$, $BL$ và $CK$. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BHC} &= 180^\circ - \widehat{EHB} - \widehat{FHC} \\ &= 180 - \widehat{EAB} - \widehat{FAC} \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{BHC}$ không đổi, mà $B, C$ cố định nên đường tròn $(BHC)$ cố định. Hơn nữa, ta có

$$\widehat{BHC} + \widehat{BPC} = 90^\circ + \widehat{BAC} + 90^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ.$$

Do đó , $H, C, P$ đồng viên hay $P \in (BHC)$. Tương tự, ta có $R \in (BHC)$. Từ đó chứng minh được $OB, OC$ là các tiếp tuyến của $(BHC)$.
Chứng minh được $AMDN$ là hình bình hành, suy ra $M, O, N$ thẳng hàng ($O$ là trung điểm $AD$) hay $L, O, K$ thẳng hàng. Do $L$ là giao điểm của $BQ$ và $CH$, $O$ là giao điểm của các tiếp tuyến tại $B, C$ của $(BHC)$, $N$ là giao điểm của $BH$ và $CQ$ nên áp dụng *Định lý Pascal đảo* cho bộ điểm $\begin{pmatrix} B & C & H \\ C & B & Q \end{pmatrix}$ ta được $Q \in (BHC)$. Vậy giao điểm của $LB$ và $KC$ thuộc đường trỏn $(BHC)$ cố định.

**Bài 4.** Tập hợp $A$ gồm các số nguyên được gọi là *đẹp* nếu $A$ có ít nhất một phần tử khác 0 và với $x, y \in A$ (có thể trùng nhau) thì $x - y \in A$. Hỏi có bao nhiêu dãy các tập hợp *đẹp* $(A_1, A_2, \ldots, A_9)$ thoả mãn $2025 \in A_1$ và $A_k \subset A_{k+1}$ với mọi $k = \overline{1, 8}$?

Xét $A$ là tập hợp đẹp và $a \in A \setminus \{0\}$. Khi đó $0 = a - a \in A$, $-a = 0 - a \in A$, $2a = a - (-a) \in A$. Bằng quy nạp, ta có $ka \in A$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó nếu chọn $b \in A$ là phần tử thỏa mãn $|b|$ nhỏ nhất khác 0 thì $A$ là tập hợp tất cả các bội số của $b$. Từ chứng minh trên, với mỗi tập $A$ đẹp ta có một tương ứng $1 - 1$ với một số nguyên dương $b$, đặt $b = f(A)$. Hơn nữa, nếu $A, B$ là các tập hợp đẹp và $A \subset B$ thì $f(A) \vdots f(B)$.
Đặt $f(A_i) = a_i$. Theo chứng minh trên, ta có: $2025 \vdots a_1 \vdots a_2 \vdots \ldots \vdots a_9$. Số dãy các tập hợp đẹp $(A_1, A_2, ..., A_9)$ thỏa mãn đề bài bằng với số dãy không tăng $(a_1, \ldots, a_9)$ sao cho $a_i$ đều là ước dương của 2025.
Do $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ nên $a_i = 3^{x_i} \cdot 5^{y_i}$ với $x_i, y_i$ là các số nguyên thỏa mãn $0 \le x_i \le 4$ và $0 \le y_i \le 2$. Mỗi dãy $(a_1, \ldots, a_9)$ thỏa mãn điều kiện trên ứng với duy nhất một dãy các cặp số $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_9, y_9)$ sao cho $x_i \ge x_j, y_i \ge y_j$ với mọi $i < j$. Gọi số số $k$ trong dãy $(x_1, ..., x_9)$ là $t_k$, $k = 0; 1; 2; 3; 4$. Khi đó:

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 9.$$

Theo bài toán chia kẹo của Euler, số dãy $(x_1, ..., x_9)$ là $C_{13}^4$. Tương tự, số dãy $(y_1, ..., y_9)$ là $C_{11}^2$.
Tóm lại, tổng số dãy tập hợp đẹp $(A_1, A_2, ..., A_9)$ thỏa mãn đề bài là $C_{13}^4 \cdot C_{11}^2$.

**ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TPHCM**
**Năm học 2025 - 2026**

# Môn thi: TOÁN
## Ngày thi thứ hai

*Thời gian: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Thực hiện bởi đội ngũ giáo viên - trợ giảng trung tâm STAR EDUCATION

**VÕ HOÀNG THÀNH - NGUYỄN PHƯỚC THỊNH - ĐOÀN QUANG ĐĂNG - HUỲNH TRUNG HIẾU - NGUYỄN MINH HUY - CAO QUỐC HƯNG**

**Bài 5.** Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(2x-yf(x))=f(2f(x))-xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Nếu $f$ là hàm hằng thì ta dễ dàng chỉ ra được $f\equiv 0$.
Xét trường hợp $f$ không là hàm hằng. Thay $x=0$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(-yf(0))=f(2f(0)),\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Nếu $f(0)\neq 0$ thì từ đẳng thức trên, ta thay $y$ bởi $-\dfrac{y}{f(0)}$ thì được

$$f(y)=f(2f(0)),\quad \forall y\in\mathbb{R},$$

hay $f$ là hàm hằng, mâu thuẫn. Do đó $f(0)=0$. Đặt $A=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}$, khi đó $0\in A$, ta chứng minh $A=\{0\}$. Giả sử tồn tại $u\neq 0$ sao cho $f(u)=0$. Thay $x=u$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(2u)=f(0)-uf(y),\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(y)=\dfrac{f(0)-f(2u)}{u},\quad \forall y\in\mathbb{R}$ hay $f$ là hàm hằng, mâu thuẫn. Vậy $A=\{0\}$.
Xét $x\neq 0$ tùy ý, khi đó $f(x)\neq 0$. Thay $y=\dfrac{2x-2f(x)}{f(x)}$ vào phương trình ban đầu ta được

$$xf\left(\frac{2x-2f(x)}{x}\right)=0\quad\Rightarrow\quad f\left(\frac{2x-2f(x)}{x}\right)=0,$$

hay

$$\frac{2x-2f(x)}{x}\in A.$$

Vì $A=\{0\}$ nên ta suy ra

$$\frac{2x-2f(x)}{x}=0\quad\Rightarrow\quad f(x)=x.$$

Do $x\neq 0$ xét tùy ý nên ta suy ra $f(x)=x,\ \forall x\neq 0$. Kết hợp với $f(0)=0$ ta kết luận $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 6.** Trên hệ trục toạ độ $Oxy$, ta đánh dấu $k$ điểm phân biệt tuỳ ý có hoành độ và tung độ đều là các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$.

a) Chứng minh rằng nếu $k = 100$ thì luôn tồn tại 4 điểm tạo thành các đỉnh của hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ.

b) Tìm số nguyên dương $k$ nhỏ nhất sao cho với mọi cách đánh dấu $k$ điểm phân biệt như trên, luôn tồn tại 3 điểm là các đỉnh của một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông song song với các trục toạ độ.

a) Gọi $S$ là tập hợp các điểm trên hệ trục toạ độ $Oxy$ có hoành độ và tung độ đều là các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$..
Xét trên một đường thẳng bất kì trong 20 đường thẳng $y = i$, $i = \overline{1, 20}$, do mỗi đường thẳng chứa đúng 20 điểm thuộc $S$ nên có tất cả $C_{20}^2 = 190$ cặp điểm phân biệt thuộc $S$ mà mỗi cặp nằm trên cùng một hàng.
Gọi $n_i$, $i = \overline{1, 20}$ là số điểm trên đường thẳng $y = i$, $i = \overline{1, 20}$ được đánh dấu, khi đó $\sum\limits_{i=1}^{20} n_i = k = 100$.
Ta có trên mỗi đường thẳng $y = i$, $i = \overline{1, 20}$ có $n_i$ điểm được đánh dấu, do đó có $C_{n_i}^2$ cặp điểm phân biệt được đánh dấu trên đường thẳng này. Do đó số cặp điểm được đánh dấu trong $S$, trong đó mỗi cặp điểm nằm chung hàng, là

$$\sum_{i=1}^{20} C_{n_i}^2 = \sum_{i=1}^{20} \frac{n_i(n_i - 1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} n_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} n_i.$$

Mặt khác, ta có $\sum\limits_{i=1}^{20} n_i^2 \geq \dfrac{1}{20}\left(\sum\limits_{i=1}^{20} n_i\right)^2$. Do đó

$$\sum_{i=1}^{20} C_{n_i}^2 \geq \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{20} n_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} n_i = \frac{1}{40}\cdot 100^2 - \frac{1}{2}\cdot 100 = 200.$$

Từ đó do có 190 cặp điểm phân biệt thuộc $S$ mà mỗi cặp nằm trên cùng một hàng nên theo *Nguyên lý Dirichlet*, tồn tại hai cặp không cùng hàng nhưng có cùng hoành độ, bốn điểm này tạo thành hình chữ nhật.

b) Với $k \leq 38$, xét 38 điểm có toạ độ $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 20), (2, 1), (3, 1), \ldots, (20, 1)$ (các điểm nằm trên hàng 1, cột 1 bỏ đi điểm $(1, 1)$). Xét cách đánh dấu $k$ điểm bất kì trong 38 điểm trên, khi đó dễ thấy không thể tồn tại ba điểm được đánh dấu tạo thành tam giác vuông có các cạnh góc vuông song song với các trục toạ độ.
Giả sử phản chứng rằng tồn tại một cách đánh dấu 39 điểm mà không có tam giác vuông nào thỏa mãn. Gọi $T$ là tập hợp các điểm nằm trên những hàng có ít nhất 2 điểm được đánh dấu, $t$ là số điểm nằm trên những hàng có nhiều nhất 1 điểm. Khi đó ta có $|T| + t = 39$.

Ta có nhận xét sau: Nếu một hàng có ít nhất 2 điểm, thì trên mỗi cột chứa một điểm thuộc hàng đó, không thể có điểm nào khác (vì nếu có, sẽ tạo thành tam giác vuông). Nên vì thế các điểm trong $T$ phải nằm trên các cột khác nhau, do đó $|S| \geq 20$. Do vậy còn tối đa 19 hàng được đánh dấu không quá 1 ô, khi đó $39 = |T| + t \leq 39$. Dấu bằng xảy ra khi có 1 hàng có 20 ô được đánh dấu. Ta dễ hàng thấy rằng điều này dẫn đến sẽ có 1 tam giác vuông thỏa.
Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của số điểm được đánh dấu $k$ là 39.

**Bài 7.** Cho dãy số $(F_n)$ xác định bởi $F_0 = 0, F_1 = 1$ và $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geq 2$. Tìm tất cả số nguyên dương $n$ sao cho $F_n + 1$ là bình phương của một số nguyên tố.

Trước hết ta trình bày và chứng minh các tính chất sau đối với dãy $(F_n)$.

**1)** $F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = F_n^4 - 1,\ \forall n \geq 2. \quad (*)$
*Chứng minh.* Ta có

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{F_n - F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1,\ \forall n \geq 2.$$

Thay $n$ bởi $n+1$ trong đẳng thức trên rồi so sánh, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{F_n - F_{n-2}}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_n},\ \forall n \geq 2\\
&\Leftrightarrow F_n^2 - F_{n-2}F_n = F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}^2,\ \forall n \geq 2\\
&\Leftrightarrow F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)(F_{n-2}F_n - F_{n-1}^2),\ \forall n \geq 2\\
&\Leftrightarrow F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}(F_0F_2 - F_1^2),\ \forall n \geq 1\\
&\Leftrightarrow F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n-1} \cdot (0 \cdot 1 - 1^2) = (-1)^n \text{ (do } F_2 = F_1 + F_0 = 1).
\end{aligned}$$

Vậy $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,\ \forall n \geq 1$ hay $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n,\ \forall n \geq 1 \quad (1)$. Kết hợp với công thức truy hồi của $(F_n)$, ta được:

$$\begin{aligned}
F_{n-2}F_{n+2} &= (F_n - F_{n-1})(F_n + F_{n+1})\\
&= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} + F_n(F_{n+1} - F_{n-1})\\
&= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2\\
&= F_n^2 - (-1)^n,\ \forall n \geq 2. \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = \left(F_n^2 + (-1)^n\right)\left(F_n^2 - (-1)^n\right) = F_n^4 - 1,\ \forall n \geq 2.$$

**2)** $F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1},\ \forall n \geq m \geq 1. \quad (**)$
*Chứng minh.* Cố định $m \geq 1$. Với $n = m$, ta có $F_m = F_1F_m + F_0F_{m-1}$ (đúng do $F_0 = 0, F_1 = 1$); với $n = m+1$, ta có $F_{m+1} = F_2F_m + F_1F_{m-1} \Leftrightarrow F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ (đúng).
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ và $n = k+1$ $(k \geq m)$, tức là

$$F_k = F_{k-m+1}F_m + F_{k-m}F_{m-1} \text{ và } F_{k+1} = F_{k-m+2}F_m + F_{k-m+1}F_{m-1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k &= F_{k-m+2}F_m + F_{k-m+1}F_{m-1} + F_{k-m+1}F_m + F_{k-m}F_{m-1} \\ &= (F_{k-m+2} + F_{k-m+1})F_m + (F_{k-m+1} + F_{k-m})F_{m-1} \\ &= F_{k-m+3}F_m + F_{k-m+2}F_{m-1}. \end{aligned}$$

Từ đó theo Nguyên lí quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

**c)** $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}, \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$ (***)

*Chứng minh.* Nhận xét hiển nhiên đúng với $m = n$. Xét $m \neq n$ và không mất tính tổng quát, giả sử $n > m$. Đặt $n = qm + r$ $(q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < m)$, khi đó áp dụng liên tiếp (**) ta được

$$(F_m, F_n) = (F_m, F_{n-m}) = (F_m, F_{n-2m}) = \ldots = (F_m, F_{n-qm}) = (F_m, F_r).$$

Tiếp tục đặt $m = q_1 r + r_1$ $(q_1, r_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq r_1 < r)$ rồi tiếp tục áp dụng (**) ta được $(F_m, F_r) = (F_{r_1}, F_r)$. Cứ tiếp tục quá trình tương tự như thuật toán Euclide, cuối cùng ta thu được $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, chính là điều cần chứng minh.

*Trở lại bài toán*, xét phương trình $F_n + 1 = p^2$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $p$ là số nguyên tố. Từ (*) kết hợp với $F_n^4 - 1 = (F_n - 1)(F_n + 1)(F_n^2 + 1)$ suy ra $F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}$ chia hết cho $p^2$.
Giả sử trong các số $F_{n-2}, F_{n-1}, F_{n+1}, F_{n+2}$ có một trong bốn số $F_{n-2}, F_{n-1}, F_{n+1}, F_{n+2}$ chia hết cho $p^2 = F_n + 1$. Từ

$$F_n + 1 = F_{n-1} + F_{n-2} + 1 \Rightarrow \begin{cases} F_n + 1 > F_{n-1} \\ F_n + 1 > F_{n-2} \end{cases}.$$

suy ra các trường hợp:

- $F_n + 1 \mid F_{n+1} \Leftrightarrow F_n + 1 \mid F_n + F_{n-1} \Leftrightarrow F_n + 1 \mid F_{n-1} - 1$ (vô lí do $F_{n-1} - 1 < F_n + 1$).
- $F_n + 1 \mid F_{n+2} \Leftrightarrow F_n + 1 \mid 2(F_n + 1) + F_{n-1} - 2 \Leftrightarrow F_n + 1 \mid F_{n-1} - 2$ (vô lí do $F_{n-1} - 2 < F_n + 1$).

Vậy trong bốn số $F_{n-2}, F_{n-1}, F_{n+1}, F_{n+2}$ có hai số cùng chia hết cho $p$, giả sử là $F_k$ và $F_{k+x}$ $(k \in \mathbb{N}^*, x \leq (n+2) - (n-2) = 4)$. Khi đó áp dụng (***), ta được

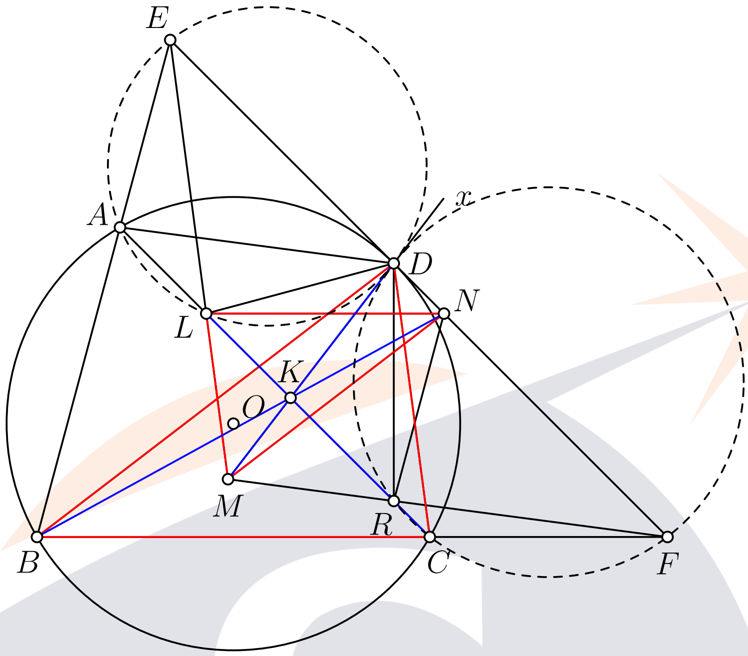
$$p \leq (F_k, F_{k+x}) = F_{(k,k+x)} = F_{(x,k)} \leq F_x \leq F_4 = 3.$$

Do $p$ nguyên tố nên $p = 2$ hoặc $p = 3$. Kiểm tra trực tiếp, kết hợp với $(F_n)$ tăng ta được tất cả các giá trị của $n$ thoả yêu cầu đề bài là $n = 4$ và $n = 6$.

**Bài 8.** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Lấy điểm $D$ trên cung nhỏ $AC$ sao cho tam giác $BCD$ nhọn. Tiếp tuyến của $(O)$ tại $D$ cắt các tia $BA, BC$ lần lượt tại $E, F$. Giả sử có điểm $M$ bên trong tam giác $ABC$ sao cho $ME \parallel CD$ và $MF \parallel AD$. Lấy điểm $N$ trên $EF$ (khác $D$) sao cho $MD = MN$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ADE$ và $CDF$ tiếp xúc nhau.

b) Chứng minh rằng $AC, BN, MD$ đồng quy.




a) Trước hết, ta có $(ADE)$ và $(CDF)$ có điểm chung là $D$. Kẻ tia $Dx$ là tiếp tuyến của $(ADE)$ ($Dx$ nằm ngoài $(O)$). Ta chứng minh $Ox$ cũng là tiếp tuyến của $(CDF)$.
Thật vậy, ta có

$$\widehat{xDF} = 180^\circ = \widehat{xDE} = 180^\circ - \widehat{EAD} = \widehat{BAD} = \widehat{DCF}.$$

Vậy $Dx$ tiếp xúc với $(CDF)$ tại $D$. Vậy $Dx$ là tiếp tuyến chung của $(ADE)$ và $(CDF)$.

b) Gọi $L, R$ lần lượt là giao điểm của $AC$ với $ME, MF$. Ta có $\widehat{ALE} = \widehat{ACD} = \widehat{EDA}$ nên $L \in (ADE)$. Tương tự, $R \in (CDF)$.
Mặt khác, ta có

$$\widehat{MLR} = \widehat{ALE} = \widehat{ADE} = \widehat{RCD} = \widehat{RFE}.$$

Do đó $ELRF$ nội tiếp, suy ra $\overline{ML} \cdot \overline{ME} = \overline{MR} \cdot \overline{MF}$.
Vậy $M$ thuộc trục đẳng phương của $(ADE)$ và $(CDF)$, kết hợp với $(ADE)$, $(CDF)$ tiếp xúc nhau tại $D$ suy ra $MD$ là tiếp tuyến chung của $(ADE)$ và $(CDF)$.
Ta có

$$\widehat{FDB} = 180^\circ - \widehat{BCD} = \widehat{DCF} = 180^\circ - \widehat{MDN} = 180^\circ - \widehat{MND} = \widehat{MNF}.$$

Vậy $MN \parallel BD$. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \widehat{EMN} = \widehat{EMD} + \widehat{DMN} &= \widehat{MDC} + 180^\circ - 2\widehat{MDN} \\ &= \widehat{DFC} + 180^\circ - 2(180^\circ - \widehat{DCF}) \\ &= \widehat{BDC} = \widehat{BAC}. \end{aligned}$$

Do đó tứ giác $LDMN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{LND} = \widehat{LMD} = \widehat{MDC} = \widehat{DFC}$. Do đó $LN \parallel BC$.
Từ đó hai tam giác $MLN$ và $DBC$ có các cặp cạnh tương ứng song song, do đó $MD, LC, BN$ đồng quy hay $MD, AC, BN$ đồng quy. Kết thúc chứng minh.