

ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TP HỒ CHÍ MINH

Năm học: 2025 - 2026

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1.a) Cho các số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $(a + b)(a - b) = 1$. Tính giá trị

$$P = \sqrt{(4a + 5)^2 + (3b)^2} - \sqrt{(4a - 5)^2 + (3b)^2}.$$

b) Cho a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + c = 0$ và $-a$ là nghiệm của phương trình $11x^2 - x + 2c = 0$ với c là số thực khác 0. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}$.**Lời giải.**a) Từ giả thiết ta được $a^2 - b^2 = 1$ hay $b^2 = a^2 - 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(4a + 5)^2 + (3b)^2} - \sqrt{(4a - 5)^2 + (3b)^2} \\ &= \sqrt{16a^2 + 40a + 25 + 9a^2 - 9} - \sqrt{16a^2 - 40a + 25 + 9a^2 - 9} \\ &= \sqrt{25a^2 + 40a + 16} - \sqrt{25a^2 - 40a + 16} \\ &= \sqrt{(5a + 4)^2} - \sqrt{(5a - 4)^2} \\ &= |5a + 4| - |5a - 4|. \end{aligned}$$

Mặt khác $a^2 = b^2 + 1 \geq 1$ nên $a \geq 1$ (vì $a > 0$). Do đó

$$P = 5a + 4 - (5a - 4) = 8.$$

b) Vì a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + c = 0$ nên theo định lý Viète, ta có

$$a + b = 4 \text{ và } ab = c.$$

Ta thấy rằng nếu $a = 0$ thì $c = 0$ (Vô lí vì $c \neq 0$), vì vậy $a \neq 0$. Lại có $-a$ là nghiệm của phương trình $11x^2 - x + 2c = 0$ nên

$$11a^2 + a + c = 0$$

$$11a^2 + a + 2ab = 0$$

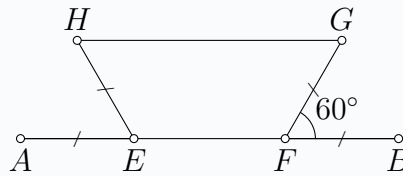
$$11a + 1 + 2b = 0 \text{ (do } a \neq 0 \text{)}.$$

Kết hợp với $a + b = 4$, ta suy ra $a = -1$ và $b = 5$. Khi đó $c = ab = -5$. Từ đây ta được

$$P = (-1)^{2025} + 5^{2025} + (-5)^{2025} = -1.$$

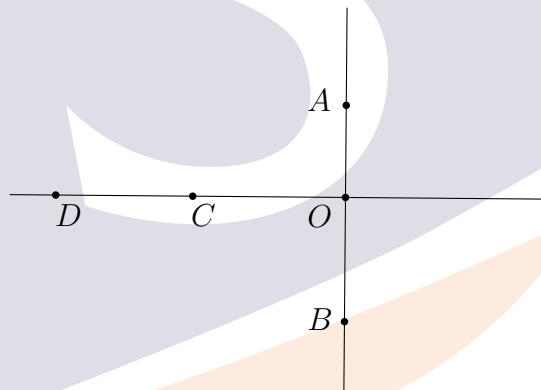
Bài 2.

- a) Một ô tô và một xe tải chuyển động cùng tốc độ không đổi a (km/h) dọc theo hai con đường giao nhau hướng đến giao lộ. Biết rằng vào các thời điểm 14 giờ và 15 giờ cùng ngày, khoảng cách từ ô tô đến giao lộ đều gấp đôi khách cách từ xe tải đến giao lộ. Hỏi xe tải đến giao lộ lúc mấy giờ?
- b) Anh Hà dự định làm một cái máng nước có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân từ một miếng tôn có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài 2 m và chiều rộng 1 m. Anh Hà gấp máng nước bằng cách gấp đều 2 bên chiều rộng AB của miếng tôn, mỗi bên x (m), lên một góc 60° như hình vẽ. Tìm x để diện tích $EFGH$ lớn nhất.



Lời giải.

- a) Ta có hình vẽ sau



Trong đó:

- O là vị trí của giao lộ.
- Vào thời điểm 14 giờ, xe tải ở vị trí A và lúc 15 giờ, xe tải ở vị trí B .
- Vào thời điểm 14 giờ, xe ô tô ở vị trí D và lúc 15 giờ xe ô tô, ở vị trí C .

Vì vận tốc 2 xe bằng nhau nên $AB = CD$; hơn nữa theo đề bài ta có $OD = 2OA$ và $OC = 2OB$. Từ $OA + OB = AB = a$, ta được

$$\frac{OA}{a} + \frac{OB}{a} = 1. \quad (1)$$

Ta cũng có

$$OA + OB = AB = CD = OD - OC = 2OA - 2OB$$

nên $OA = 3OB$ hay $OB = \frac{OA}{3}$. Kết hợp (1), ta được

$$\frac{OA}{a} + \frac{OA}{3a} = 1 \text{ hay } \frac{OA}{a} = \frac{3}{4} \text{ giờ} = 45 \text{ phút.}$$

Vậy xe tải đến giao lộ lúc 14 giờ 45 phút.

b) Đặt FP vuông góc HG tại P . Ta có $EF = 1 - 2x$ và $EH = FG = x$ nên

$$FP = \frac{x\sqrt{3}}{2} \text{ và } HG = x + 1 - 2x = 1 - x.$$

Diện tích hình thang $EFGH$ là

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(EF + HG) \cdot FP &= \frac{1}{2} \cdot (1 - 2x + 1 - x) \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2 + 2x) \\ &= \frac{-3\sqrt{3}}{4} \left(x^2 - \frac{2}{3}x \right) \\ &= \frac{-3\sqrt{3}}{4} \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right] \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

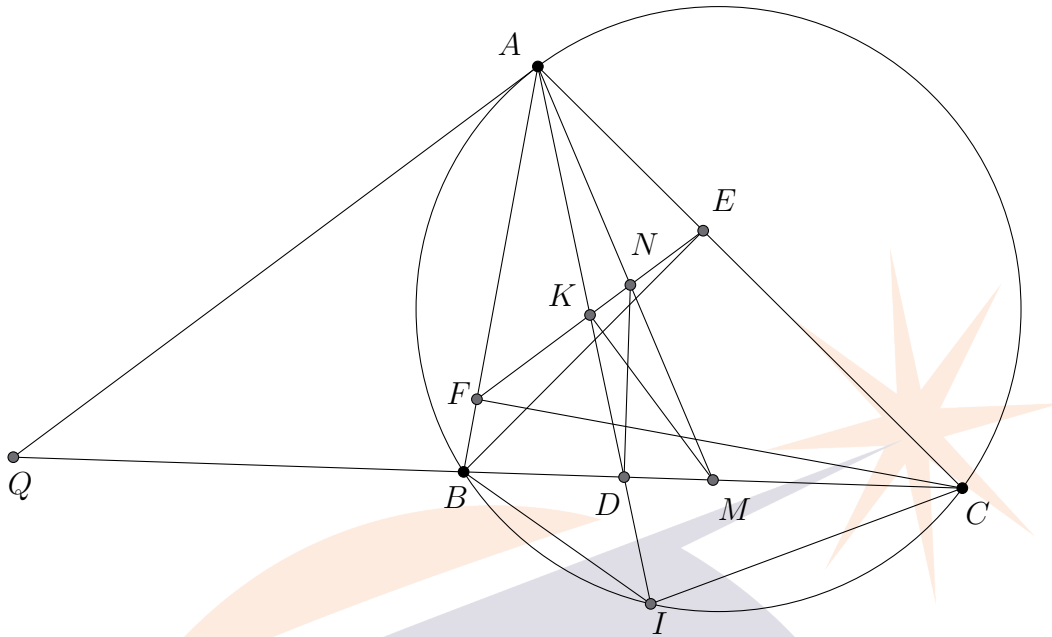
Vậy diện tích $EFGH$ lớn nhất là $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , có các đường cao BE, CF . Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và EF , N là giao điểm của AM và EF . Kẻ ND vuông góc với BC tại D .

a) Chứng minh $\widehat{AKE} = \widehat{AMB}$ và A, K, D thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại Q . Chứng minh $QB \cdot DC = QC \cdot DB$.

Lời giải.



- a) Ta có hai tam giác AEF và ABC đồng dạng, suy ra hai tam giác AKE và AMB đồng dạng, kéo theo $\widehat{AKE} = \widehat{AMB}$.

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M nên $ME = MF$, dẫn đến $MK \perp EF$. Do đó tứ giác $NKDM$ nội tiếp, thành ra

$$\widehat{DKN} = 180^\circ - \widehat{DMN} = 180^\circ - \widehat{AMB} = 180^\circ - \widehat{AKE}.$$

Vậy A, K, D thẳng hàng.

- b) **Cách 1:** Gọi I là giao điểm của AD với (O) ($I \neq A$).

Ta có $\triangle ABI \sim \triangle AMC$ và $\triangle ACI \sim \triangle AMB$, do đó

$$\frac{BI}{MC} = \frac{AB}{AM} \text{ và } \frac{CI}{MB} = \frac{AC}{AM}.$$

Từ đây ta suy ra

$$\frac{BI}{CI} = \frac{AB}{AC}. \quad (2)$$

Lại có $\triangle BDI \sim \triangle ADC$ và $\triangle CDI \sim \triangle ADB$ nên

$$\frac{DB}{BI} = \frac{AD}{AC} \text{ và } \frac{DC}{CI} = \frac{AD}{AB}.$$

Kết hợp với (2), ta suy ra

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BI}{CI} = \frac{AB^2}{AC^2}. \quad (3)$$

Mặt khác, ta có hai tam giác QAB và QCA đồng dạng nên

$$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QA} = \frac{AB}{AC}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{QB}{QC} = \frac{QA}{QC} \cdot \frac{QB}{QA} = \frac{AB^2}{AC^2}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta thu được

$$\frac{DB}{DC} = \frac{QB}{QC} \text{ hay } QB \cdot DC = QC \cdot DB.$$

Cách 2: Hai tam giác AKE và AMB đồng dạng suy ra $\widehat{KAE} = \widehat{MAB}$, kéo theo $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$. Ký hiệu S_{XYZ} là diện tích của tam giác XYZ . Chú ý $\widehat{BAC}$ là góc nhọn, ta có:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \widehat{CAD}} = \frac{AB \cdot \sin \widehat{CAM}}{AC \cdot \sin \widehat{BAM}}.$$

Mặt khác,

$$1 = \frac{BM}{CM} = \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AM \cdot \sin \widehat{BAM}}{\frac{1}{2}AC \cdot AM \cdot \sin \widehat{CAM}}.$$

Nhân vế theo vế hai hệ thức trên, ta được

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \quad (5)$$

Vì hai tam giác QAB và QCA đồng dạng nên $\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QA} = \frac{AB}{CA}$, kéo theo

$$\frac{QB}{QC} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QA}{QC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta thu được $\frac{DB}{DC} = \frac{QB}{QC}$, tức là $QB \cdot DC = QC \cdot DB$.

Bài 4. Số nguyên dương n được gọi là số “đẹp” nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ để $n = a^2 + 7b^2$.

- Tìm hai số đẹp chia hết cho 11.
- Chứng minh nếu n là số đẹp chia hết cho 11 thì $\frac{n}{11}$ cũng là số đẹp.

Lời giải.

- Ta có $11 = 2^2 + 7 \cdot 1^2$ và $44 = 4^2 + 7 \cdot 2^2$ là 2 số đẹp chia hết cho 11.
- Giả sử n là số đẹp chia hết cho 11; tức là có a, b nguyên sao cho $n = a^2 + 7b^2$. Hơn nữa $a^2 + 7b^2 = (a - 2b)(a + 2b) + 11b^2$, nên $(a - 2b)(a + 2b) \vdots 11$, hay $a - 2b$ hoặc $a + 2b$ chia hết cho 11.

- Nếu $a - 2b \vdots 11$, đặt $a - 2b = 11k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta thay $a = 2b + 11k$ vào n để được

$$\begin{aligned} n &= a^2 + 7b^2 = (2b + 11k)^2 + 7b^2 \\ &= 11(b^2 + 4bk + 11k^2) \\ &= 11[(b + 2k)^2 + 7k^2]. \end{aligned}$$

Như vậy $\frac{n}{11} = (b + 2k)^2 + 7k^2$ cũng là số đẹp.

- Nếu $a + 2b \vdots 11$, tương tự như trên, đặt $a + 2b = 11k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta thay $a = -2b + 11k$ vào n để được

$$\begin{aligned} n &= a^2 + 7b^2 = (-2b + 11k)^2 + 7b^2 \\ &= 11(b^2 - 4bk + 11k^2) \\ &= 11[(b - 2k)^2 + 7k^2]. \end{aligned}$$

Như vậy $\frac{n}{11} = (b - 2k)^2 + 7k^2$ cũng là số đẹp.

Bài 5.

- Cho S là tập hợp các số nguyên $|a| \leq 100$. Lấy a ngẫu nhiên thuộc S , tính xác suất để a thỏa mãn phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ có các nghiệm nguyên.
- Cho $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ và B là tập hợp con chứa 11 phần tử thuộc A . Chứng minh rằng B luôn chứa a, b, c đôi một phân biệt sao cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác.

Lời giải.

- Phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ có nghiệm nguyên thì $\Delta = a^2 - 4(2a + 10) = a^2 - 8a - 40$ là một số chính phương, đặt $\Delta = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Biến đổi ta được:

$$(a - 4 - k)(a - 4 + k) = 56.$$

Chú ý $(a - 4 - k) + (a - 4 + k) = 2(a - 4)$ nên $a - 4 - k$ và $a - 4 + k$ cùng tính chẵn lẻ. Hơn nữa $k \geq 0$ nên $a - 4 + k \geq a - 4 - k$. Từ các nhận xét này ta có các trường hợp sau:

$a - 4 - k$	$a - 4 + k$	a	k
2	28	19	13
4	14	13	5
-28	-2	-11	13
-14	-4	-5	5

Thử lại, cả 4 giá trị a này thỏa mãn đề bài. Hơn nữa $n(S) = 201$ nên xác suất cần tìm là $\frac{4}{201}$.

b) Gọi 11 phần tử của tập hợp B đã cho lần lượt là

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{11} \leq 100.$$

Giả sử trong 11 số này không có ba số nào lập thành ba cạnh của một tam giác. Ta có nhận xét sau: $a_i \leq a_j \leq a_k$ không lập thành ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi $a_k \geq a_i + a_j$. Vì vậy, ta thu được

$$\begin{array}{lll} a_3 \geq a_2 + a_1 \geq 3, & a_4 \geq a_3 + a_2 \geq 5, & a_5 \geq a_4 + a_3 \geq 8, \\ a_6 \geq a_5 + a_4 \geq 13, & a_7 \geq a_6 + a_5 \geq 21, & a_8 \geq a_7 + a_6 \geq 34, \\ a_9 \geq a_8 + a_7 \geq 55, & a_{10} \geq a_9 + a_8 \geq 89, & a_{11} \geq a_{10} + a_9 \geq 144. \end{array}$$

Điều trên mâu thuẫn vì $a_{11} \leq 100$. Vậy điều giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.

— HẾT —