STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness

TẬP SAN TOÁN HỌC

Hướng tới kỳ thi Tuyển sinh lớp 10

SỐ 10 2023

Nguyễn Tăng Vũ - Nguyễn Tiến Hoàng - Nguyễn Vĩnh Khang
Nguyễn Thái Hưng - Võ Hoàng Thành - Đoàn Quang Đăng - Huỳnh Trung Hiếu

Mục lục

Nguyễn Tăng Vũ - Nguyễn Vĩnh Khang

TẬP SAN TOÁN HỌC

STAR EDUCATION

Số 10- 2023

Thời gian trôi qua thật nhanh, năm học như vừa khai giảng nay lại sắp kết thúc, các em học sinh sắp nghỉ hè, chỉ còn các bạn lớp 9 và 12 đang vào giai đoạn ôn thi quyết liệt cho kì thi cuối cấp. Mỗi bạn học sinh chắc ai cũng có cho mình một kế hoạch ôn tập phù hợp, một chiến lược thi cử tốt nhất nhằm đạt kết quả cao trong kì thi tuyển sinh. Tập san Star Education cũng mong muốn góp một phần nhỏ vào quá trình học tập và thi cử của các em, sau một quá trình đồng hành cùng với các bạn học sinh, Tập san Star số 10 sẽ là chuyên san dành cho các bạn học sinh lớp 9, những người đang chuẩn bị cho kì thi chuyển cấp đầy cam go.

Sau một thời gian dịch dã covid 19, năm học này là năm học trọn vẹn các em học trực tiếp trên lớp, tuy vậy Star Education cũng duy trì các lớp chuyên đề online nhằm giúp các em ở xa có điều kiện theo học, từ đó mà đã thu hút được nhiều bạn học sinh học tập rất tốt, đạt thành tích cao trong các kì thi học sinh giỏi, đó là động lực lớn để các thầy cô dạy chuyên toán của Star Education tiếp tục duy trì đam mê và tập trung phát triển chuyên môn để đáp lại niềm tin yêu của quý phụ huynh và học sinh. Do đó các bài viết hay đề thi của tập san lần này đều do các giáo viên trẻ thực hiện, những người đã có kinh nghiệm thi cử ở các kì thi học sinh giỏi và các kì tuyển sinh.

Về nội dung tập trung cho các em học sinh khối 9: thông tin tuyển sinh, kinh nghiệm thi cử, bài viết chuyên đề, bài tập rèn luyện, đề thi,...

Ngoài bài viết của các giáo viên của Star Education, rất mong nhận được thêm sự đóng góp của bạn đọc gần xa cho tập san để ngày một phong phú hơn, phục vụ tốt hơn cho cộng đồng dạy và học Toán.

Dự kiến số tiếp theo, Tập san 11, sẽ được xuất bản vào tháng 12 tới với nội dung phong phú hơn dành cho các khối lớp. Mọi đóng góp xin gửi về các địa chỉ **nguyentangvu@gmail.com**

Mong rằng tài liệu này sẽ được đón nhận và được chia sẻ rộng rãi. Xin chân thành cảm ơn.

Phần I

Tổng hợp các thông tin về kì thi tuyển sinh vào 10

Thông tin về kỳ thi tuyển sinh lớp 10 SGD Tp.Hồ Chí Minh

1. Tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên và trường có lớp chuyên TP.HCM

TPHCM có 2 trường THPT chuyên

- THPT Chuyên Lê Hồng Phong *(235 Nguyễn Văn Cừ, P4, Q5, TP.HCM)*
- THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa *(20 Lý Tự Trọng, P. Bến Nghé, Q1, TP.HCM)*

Và 4 trường THPT có lớp chuyên

- THPT Nguyễn Thượng Hiền *(649 Hoàng Văn Thụ, P4, Q. Tân Bình, TP.HCM)*
- THPT Gia Định *(44 Võ Oanh, P25, Q. Bình Thạnh, TP.HCM)*
- THPT Mạc Đĩnh Chi *(4 Tân Hòa Đông, P14, Q6, TP.HCM)*
- THPT Nguyễn Hữu Huân *(11 Đoàn Kết, P. Bình Thọ, TP. Thủ Đức, TP.HCM)*

1.1. Đối tượng

- Kết quả đánh giá rèn luyện, học tập cả năm của các lớp 6, 7, 8 từ Khá trở lên.
- Tốt nghiệp THCS loại Giỏi.

1.2. Thông tin về kỳ thi tuyển sinh

1.3. Môn thi và đề thi

a) Môn thi: Thi tự luận 4 môn: Toán, Ngữ văn, Ngoại ngữ và môn chuyên.
b) Lịch thi:

Buổi	Môn thi	Thời gian làm bài	Giờ bắt đầu làm bài
Thứ 2 (05/06/2023) HS có mặt tại Điểm thi để sinh hoạt Quy chế thi & kiểm tra thông tin cá nhân.			
Thứ 3 (06/06/2023)			
SÁNG	Ngữ văn	120 phút	08:00
CHIỀU	Ngoại ngữ	90 phút	14:00
Thứ 4 (07/06/2023)			
SÁNG	Toán	120 phút	08:00
CHIỀU	Chuyên / Tích hợp	150 phút	14:00

1.4. Điểm xét tuyển và nguyên tắc xét tuyển

- Điểm xét tuyển
  - Vào lớp chuyên:
    Tổng điểm = Toán + Ngữ văn + Ngoại ngữ + (điểm môn chuyên x 2).
  - Vào lớp không chuyên: Tổng điểm = Toán + Ngữ văn + Ngoại ngữ.
- Nguyên tắc xét tuyển:
  - Thí sinh tham gia thi đủ các bài thi quy định.
  - Không vi phạm nội quy thi.
  - Các bài thi đều đạt điểm lớn hơn 2.

1.5. Một số lưu ý

- Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong được nhận học sinh tốt nghiệp THCS các tỉnh khác dự thi nếu có đủ điều kiện theo quy định của kỳ thi.
- Học sinh đăng ký 4 nguyện vọng ưu tiên:
  - Nguyện vọng ưu tiên 1, 2 vào lớp chuyên.
  - Nguyện vọng ưu tiên 3, 4 vào lớp không chuyên tại 02 trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong và THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa.
- Nếu không trúng tuyển hoặc không nộp hồ sơ vào các trường, lớp chuyên (bao gồm Trường PTNK) thì học sinh vẫn được tham gia xét tuyển vào lớp 10 THPT khác theo 03 nguyện vọng đã đăng ký thi tuyển.

1.6. Điểm chuẩn trúng tuyển các trường chuyên, lớp chuyên các năm gần đây

Trường	Lớp chuyên	Năm 2022-2023		Năm 2020-2021	
		Điểm NV1	Điểm NV2	Điểm NV1	Điểm NV2
THPT Chuyên Lê Hồng Phong	Toán	36	36,5	37	37,5
	Vật lý	31,75	32,5	30,75	31
	Hóa học	38,5	39	38,5	39,25
	Sinh học	38	38,5	36,75	37,25
	Tin học	37	37,5	35,75	36
	Ngữ Văn	38,25	39	37	37,5
	Sử	30,5	31	31	31,5
	Địa	33,75	34	34,75	35,75
	Tiếng Anh	37,25	38	37,75	38
	Tiếng Trung	27,5	28	34,25	35,25
	Tiếng Nhật	33,75	34,5	34	34,75
	Tiếng Pháp	24,25	24,75	28,5	29
	Không chuyên	26,5	27	26,25	26,75
THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa	Toán	34,25	34,5	34,75	35
	Vật lý	29,5	29,75	27,5	28
	Hóa học	36	36,75	36	36,25
	Sinh học	35,5	35,75	33	33,75
	Tin học	32	32,25		
	Ngữ Văn	37,75	38	36,25	36,5
	Tiếng Anh	36,25	37,25	37	37,5
	Không chuyên	26	26,5	25,5	26,5
THPT Nguyễn Thượng Hiền	Toán	33	33,25	33,5	34
	Vật lý	25,5	25,5	28	28,25
	Hóa học	34,75	35	32,75	33,5
	Ngữ Văn	36,25	37,25	35	35,5
	Tiếng Anh	35	35,5	35,75	36
THPT Gia Định	Toán	30,75	31	31,75	32
	Vật lý	28,25	28,75	27,5	28
	Hóa học	32,5	32,75	30,5	30,75
	Tin học	24,5	25	24,5	25
	Ngữ Văn	35,5	35,5	33,25	33,75
	Tiếng Anh	35,25	35,75	35,5	36
THPT Mạc Đĩnh Chi	Toán	27	27,5	26,75	27
	Vật lý	24	24,5	27	27,5
	Hóa học	31,75	32,25	26	26,5
	Sinh học	28	28,25	24	24,25
	Ngữ Văn	34	34,5	31,75	32,5
	Tiếng Anh	33,75	34,25	32,75	33,25
THPT Nguyễn Hữu Huân	Toán	27,5	28	22	23
	Vật lý	24	24,5	27	27,5
	Hóa học	25	25,25	25,25	25,5
	Ngữ Văn	33,25	34,25	30	31,25
	Tiếng Anh	33	34	32,75	33

2. Tuyển sinh vào lớp 10 các trường thuộc Sở GD TP.HCM

2.1. Thời gian thi và một số lưu ý

- Lịch thi: xem tại mục "Tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên và trường có lớp chuyên TP.HCM"
- Một số lưu ý:
  - Điểm xét tuyển là tổng điểm ba bài thi và điểm cộng thêm cho đối tượng ưu tiên. Thí sinh trúng tuyển phải dự thi đủ ba bài thi và không có bài thi nào bị điểm 0 (không).
  - Học sinh được đăng ký 3 nguyện vọng ưu tiên 1,2,3 để xét tuyển vào lớp 10 các trường trung học phổ thông công lập (trừ Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa và Trường Phổ thông năng khiếu Đại học Quốc gia TP.HCM).
  - Căn cứ vào chỉ tiêu tuyển sinh, số lượng đăng ký các nguyện vọng và điểm xét tuyển, điểm chuẩn của từng trường nguyện vọng 2 cao hơn điểm chuẩn nguyện vọng 1 và điểm chuẩn nguyện vọng 3 cao hơn điểm chuẩn nguyện vọng 2.
  - Việc trúng tuyển của học sinh sẽ căn cứ vào 03 nguyện vọng mà học sinh đã đăng kí theo thứ tự ưu tiên từ nguyện vọng 1 đến nguyện vọng 2 và nguyện vọng 3.

2.2. Cấu trúc đề thi

Môn Toán

- 07 Câu kiến thức cơ bản với các nội dung về đồ thị, định lý Viet, điều kiện có nghiệm của phương trình, vận dụng kiến thức đã học giải bài toán thực tế;
- 01 Câu bài toán hình học phẳng, gồm ba bài toán nhỏ.
  Trong đó, dự kiến giữ nguyên cấu trúc với 70% câu hỏi ở mức độ nhận biết, thông hiểu, 30% vận dụng, vận dụng cao.

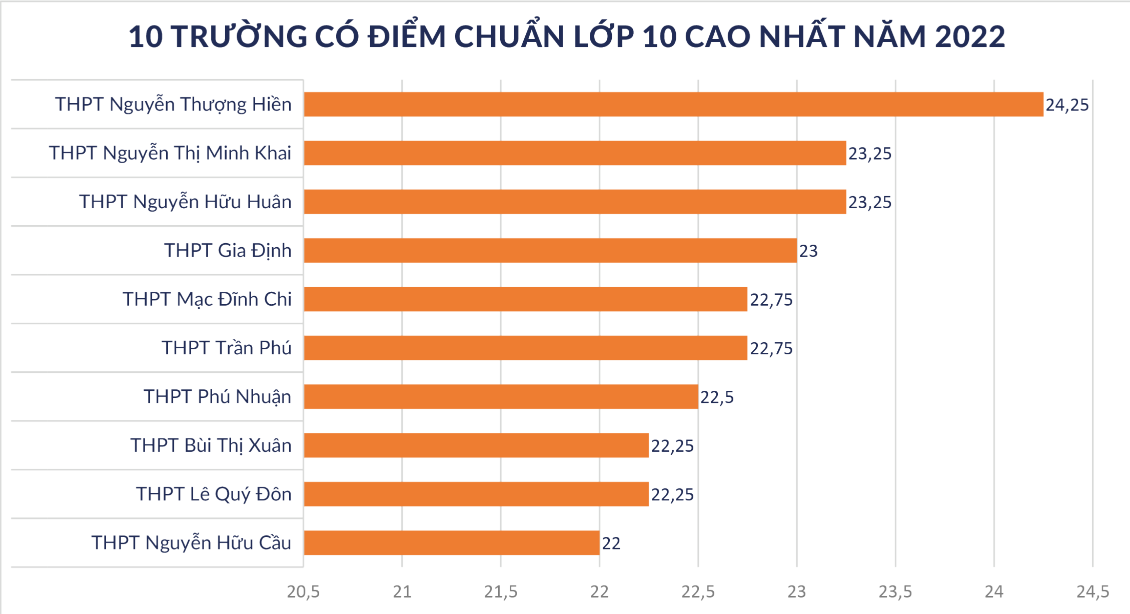
Môn Ngữ Văn

- Đọc hiểu (3 điểm);
- Nghị luận xã hội (3 điểm);
- Nghị luận văn học (4 điểm).

Môn Tiếng Anh

- 40 Câu trắc nghiệm (Có 10-15% câu hỏi mức độ nâng cao để phân hóa thí sinh).
- Nội dung đề thi bao gồm các chủ điểm ngữ pháp, từ vựng chủ yếu trong chương trình lớp 9.
- Đề thi tập trung nghiêng về kỹ năng, vận dụng và từ vựng.

2.3. TOP 10 trường có điểm chuẩn đầu vào lớp 10 cao nhất năm 2022



Thông tin về kì thi tuyển sinh vào lớp 10 trường Phổ thông Năng khiếu

1. Thông tin tuyển sinh

Cơ sở Quận 5 *(153 Nguyễn Chí Thanh, P9, Q5, TP.HCM)*		**Cơ sở Thủ Đức** *(Khu đô thị Đại học quốc gia TP.HCM)*	
10 lớp chuyên		07 lớp chuyên định hướng lĩnh vực liên ngành	
Lớp chuyên	Số lớp	Lớp chuyên	Số lớp
Toán	2 lớp	Toán - LN	1 lớp
Tin học	2 lớp		
Vật lý	1 lớp	Vật lý - LN	1 lớp
Hóa học	1 lớp	Hóa học - LN	1 lớp
Sinh học	1 lớp	Sinh học - LN	1 lớp
Tiếng Anh	2 lớp	Tiếng Anh - LN	2 lớp
Ngữ văn	1 lớp	Ngữ văn - LN	1 lớp
Tổng chỉ tiêu: 350 học sinh *Mỗi lớp không quá 35 học sinh*		Tổng chỉ tiêu: 245 học sinh *Mỗi lớp không quá 35 học sinh*	
chú trọng đào tạo kiến thức sâu về môn chuyên, nâng cao năng lực tư duy logic, kết hợp với các hoạt động giáo dục trong một ngành cụ thể liên quan đến môn học		chú trọng đào tạo năng lực tư duy liên ngành với nền tảng môn chuyên trong giải quyết các vấn đề thuộc lĩnh vực KHCN và KHXH như: KHTN, ngôn ngữ, văn hoá, kinh tế, chính trị, xã hội,... kết hợp với các hoạt động trải nghiệm để định hướng nghề nghiệp.	

2. Môn thi và đề thi

Thí sinh **bắt buộc thi 4 bài thi** trong đó:

- **03 Bài thi môn không chuyên**: Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh.
- **01 Bài thi môn chuyên** tự chọn trong số các môn sau: Toán, Tin học, Vật lý, Hoá học, Sinh học, Ngữ văn và Tiếng Anh.

Mỗi thí sinh được đăng ký **tối đa 02 môn chuyên** trong Bài thi môn chuyên tự chọn. Trường hợp đăng ký 02 môn, thí sinh cần đảm bảo lựa chọn 01 môn trong mỗi nhóm tổ hợp sau:

- Nhóm 1: Toán - Ngữ văn;

- Nhóm 2: Tiếng Anh - Vật lý Hoá học - Sinh học - Tin học.

Do đó, các bạn có thể vừa thi chuyên Văn, vừa thi chuyên Sinh. Tuy nhiên học sinh không thể thi 2 môn chuyên thuộc cùng nhóm thi, chẳng hạn như chuyên Hóa và chuyên Anh.

	Bài thi môn không chuyên	Bài thi môn chuyên
Hình thức	Tự luận & Trắc nghiệm	Tự luận
Thang điểm	Thang điểm 10	Thang điểm 10
Hệ số	Hệ số 1	Hệ số 2

3. Thời gian thi và điểm thi

Thứ SÁU 26/05/2023 thi các môn **KHÔNG CHUYÊN**			
Buổi	**Môn thi**	**Thời gian làm bài**	**Giờ bắt đầu làm bài**
SÁNG	NGỮ VĂN (không chuyên)	100 phút	07:40
SÁNG	TIẾNG ANH (không chuyên)	60 phút	10:00
CHIỀU	TOÁN (không chuyên)	120 phút	14:00

Thứ BẢY 26/05/2023 thi các môn **CHUYÊN**			
Buổi	**Môn thi**	**Thời gian làm bài**	**Giờ bắt đầu làm bài**
SÁNG	Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa học, Sinh học Tin học	120 phút	07:40
CHIỀU	Toán, Ngữ văn	120 phút	14:00

Thí sinh sẽ thi các môn thi tại cả 02 cơ sở của Nhà trường và tại một số cơ sở giáo dục đại học lân cận gần với 02 cơ sở này theo hướng dẫn cụ thể trên giấy báo thi.

4. Nguyên tắc xét tuyển

- Chỉ đưa vào danh sách trúng tuyển các lớp chuyên những thí sinh:
  - Đã tham gia thi đầy đủ các bài thi quy định gồm 03 bài thi không chuyên và một thi môn chuyên; Không vi phạm quy chế trong kỳ thi tuyển sinh;
  - **Các bài thi đều đạt điểm lớn hơn 2** và đạt điểm chuẩn trúng tuyển do Hội đồng tuyển sinh quyết định.
- Trong trường hợp thí sinh dự thi 2 môn chuyên, Hội đồng tuyển sinh sẽ chọn môn thi có số điểm cao hơn làm căn cứ xét tuyển theo từng lớp chuyên.

5. Đăng ký nguyện vọng

- Mỗi thí sinh phải đăng ký tối thiểu 1 nguyện vọng (NV) và được đăng ký tối đa 08 NV vào các lớp. NV đăng ký phải thoả điều kiện là các lớp chuyên có sử dụng tổ hợp môn xét tuyển tương ứng các môn thi thí sinh đã đăng ký. Trường hợp thí sinh đã đăng ký lớp chuyên có tổ hợp xét tuyển không trùng với bất kỳ tổ hợp môn thi thí sinh đã đăng ký thì xem như nguyện vọng đó không hợp lệ. Những nguyện vọng không hợp lệ sẽ không tính vào việc xét tuyển của Nhà trường.

- Thí sinh được xét tuyển bình đẳng theo kết quả thi, không phân biệt thứ tự ưu tiên các nguyện vọng đăng ký.
- Thí sinh chỉ trúng tuyển vào 01 nguyện vọng ưu tiên cao nhất trong danh sách các nguyện vọng đã đăng ký
- Hội đồng tuyển sinh của trường công bố kết quả thi của thí sinh và điểm xét tuyển các lớp trong vòng 15 ngày việc kể từ ngày thi cuối cùng. Công tác phúc khảo được thực hiện trong vòng 7 ngày làm việc tiếp theo.

6. Các tổ hợp xét tuyển

Tổ hợp xét tuyển	Các môn		
TH1	3 môn không chuyên	+	**TOÁN** chuyên
TH2	3 môn không chuyên	+	**VẬT LÝ** chuyên
TH3	3 môn không chuyên	+	**HÓA HỌC** chuyên
TH4	3 môn không chuyên	+	**SINH HỌC** chuyên
TH5	3 môn không chuyên	+	**TIN HỌC** chuyên
TH6	3 môn không chuyên	+	**NGỮ VĂN** chuyên
TH7	3 môn không chuyên	+	**TIẾNG ANH** chuyên

Các chỉ tiêu xét tuyển theo tổ hợp môn cụ thể như sau:

- **Cơ sở Quận 5**

Lớp chuyên	Tổ hợp xét tuyển	Chỉ tiêu tuyển sinh
TOÁN	TH1	70
VẬT LÝ	TH2, TH1	25 / 10
HÓA HỌC	TH3	35
SINH HỌC	TH4	35
TIN HỌC	TH5, TH1	50 / 20
NGỮ VĂN	TH6	35
TIẾNG ANH	TH7	70

- **Cơ sở Thủ Đức**

Lớp chuyên	Tổ hợp xét tuyển	Chỉ tiêu tuyển sinh
TOÁN - LN	TH1	35
VẬT LÝ - LN	TH2, TH1	25 / 10
HÓA HỌC - LN	TH3, TH1	25 / 10
SINH HỌC - LN	TH4, TH1	25 / 10
NGỮ VĂN - LN	TH6	35
TIẾNG ANH - LN	TH7	70

Với các tổ hợp xét tuyển hiện tại, chỉ tiêu của trường dành cho các bạn xét môn thi Toán chuyên cao hơn nhiều so với các môn thi chuyên khác. Cụ thể có đến 100/450 (22%) chỉ tiêu ở cơ sở Quận 5 và 65/245 (26,5%) chỉ tiêu ở cơ sở Thủ Đức.

7. Hình thức đăng ký dự thi và một số thông tin khác

- Tất cả thí sinh đăng ký theo hình thức trực tuyến tại Cổng thông tin điện tử Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG-HCM tại địa chỉ trang web của Nhà trường: **http://ptnk.edu.vn/** (Tại mục "Đăng ký tuyển sinh lớp 10").
- Thời gian mở cổng đăng ký: từ ngày **04/5/2023 đến 17g00 ngày 11/5/2023**.
- Phụ huynh, thí sinh có đến trực tiếp trường Phổ thông Năng khiếu - Cơ sở Quận 5 trong giờ hành chính để được hỗ trợ nộp hồ sơ dự thi trực tuyến.

Một số thông tin về phí dự thi, đóng phí, nhận giấy báo dự thi vui lòng xem thông tin tại **http://ptnk.edu.vn/**

8. Điểm chuẩn trúng tuyển PTNK các năm gần đây

- Năm học 2022-2023

Lớp chuyên	Tổ hợp xét tuyển	Điểm chuẩn
TOÁN	TH1	30,90
VẬT LÝ	TH2	31,25
HÓA HỌC	TH3	31,20
SINH HỌC	TH4	29,81
TIN HỌC	TH1, TH5	29,45 / 28,80
NGỮ VĂN	TH6	29,50
TIẾNG ANH	TH7	32,60
KHTN&CN	TH1, TH2, TH3, TH4, TH5	22,10
TIẾNG ANH	TH6, TH7	26,40

- Năm học 2021-2022

Lớp chuyên	Tổ hợp xét tuyển	Điểm chuẩn CS1	Điểm chuẩn CS2
TOÁN	TH1	30,80	23,35
VẬT LÝ	TH2, TH1	31,85 / 28,85	26,35 / 21,05
HÓA HỌC	TH3	35,35	29,25
SINH HỌC	TH4, TH1	28,61 / 28,10	22,80 / 21,70
TIN HỌC	TH5, TH1	27,10 / 30,05	
NGỮ VĂN	TH6	30,50	26,15
TIẾNG ANH	TH7	35,30	29,60
Không chuyên		20,00	

Một số kinh nghiệm thi cử của giáo viên và học sinh

Việc phân bổ các lớp chuyên trong 2 năm gần đây kể cả năm học 2023-2024 có một vài sự thay đổi trong việc phân chia lớp chuyên, tổ hợp xét tuyển nhưng có thể thấy điểm chuẩn các năm 2022-2023 và 2021-2022 của các lớp chuyên tương ứng có sự chênh lệch không quá nhiều, có thể là tham chiếu để các bạn tham khảo và điều chỉnh các chiến lược ôn tập thi phù hợp.

Chia sẻ từ Thủ khoa chuyên Toán PTNK 2022-2023

Trong kỳ thi tuyển sinh 10 PTNK năm học 2022-2023, **Trương Công Minh Khuê** đã trở thành thủ khoa lớp Toán chuyên khi thừa đến hơn 10 điểm. Minh Khuê xuất sắc đạt 8,5 điểm môn Toán chuyên và đạt tổng điểm 41,5 (điểm chuẩn của lớp Toán là 30,9). Ngoài ra, môn Toán không chuyên bạn cũng đạt 10 điểm tuyệt đối.
Thành tích xuất sắc này cũng đã thể hiện trong 2 đợt thi thử trước đó của Minh Khuê tại STAR Education.
Cùng lắng nghe một số chia sẻ của chàng Thủ khoa chuyên Toán này nhé!

Một vài kinh nghiệm ôn thi tuyển sinh để đạt được kết quả tốt trong kỳ thi tuyển sinh 10.

Mình tập trung ôn 3 môn Toán, Văn, Anh, và đặc biệt chú trọng môn Toán Chuyên, do đó là môn chuyên mà mình xét tuyển.

- *Về phần 3 môn không chuyên, chủ yếu mình ôn tập dựa vào tài liệu có sẵn mà mình học được từ các thầy cô, và phân bổ thời gian vừa phải để ôn tập. Riêng môn Tiếng Anh, bản thân mình thấy môn Tiếng Anh khá quan trọng và có thể cải thiện để đạt điểm tốt do môn Văn mình còn nhiều hạn chế, nên mình nghĩ sẽ cố lấy điểm Tiếng Anh để bù môn Văn, dẫn tới tần suất học bài Tiếng Anh mình dành nhiều hơn so với hai môn không chuyên còn lại.*
- *Về phần môn Chuyên, mình dành khá nhiều thời gian để ôn luyện. Ngoài các buổi học thêm cùng giáo viên, mình chủ yếu tập trung luyện tập các dạng đã học kết hợp với giải bài trong các sách Toán chuyên (Tài liệu Toán chuyên rất nhiều)*

Chiến thuật ôn tập và làm bài thi các môn chuyên và không chuyên

- *Về phần ôn tập môn không chuyên, trước ngày thi cỡ 1 tháng hơn, mình chuyển sang làm các đề ôn tập và đề năm cũ. Khi đó, tích hợp việc làm đề và chạy kiến thức bằng cách học những lỗi sai trong lúc làm đề và đối chiếu chương trình để* *chạy lại kiến thức. Riêng về phần môn chuyên, mình đã học các chuyên đề từ khá sớm để đủ kiến thức làm đề. Theo mình thì môn chuyên nên được chia ra thành từng chuyên đề và học dần sẽ hiệu quả hơn, đồng thời nắm chắc được các mảng cho điểm và các phần chặn điểm của đề.*

- *Về phần chiến thuật làm bài, mình vẫn tuân thủ quy tắc làm các bài dễ lấy điểm trước, để lại các bài khó sau. Ngoài ra, việc xác định đâu là bài khó cũng là yếu tố quan trọng. Trong lúc luyện đề, mình thường canh chừng khoảng thời gian để ước lượng khi đi thi sẽ ít bỡ ngỡ hơn. Về các môn không chuyên, mình không có quá nhiều mẹo để làm bài tốt hơn. Còn về môn chuyên, cụ thể là Toán, mình sẽ luôn làm phân môn dễ lấy điểm nhất (Đại số) sau đó qua dần các ý đầu của phần Số học hay Hình học. Theo mình thì trình tự làm bài trong giờ thi môn chuyên là rất quan trọng, do đôi lúc khả năng mình hơn thế nhưng lại chọn đúng câu không phải thế mạnh của mình, dẫn tới mất điểm oan.*
- *Ngoài ra, việc cẩn thận trong lúc làm bài cũng là yếu tố không thể thiếu. Đặc biệt trong môn Toán không chuyên, giáo viên dạy mình luôn nhắc mình là bài làm phải thật chỉn chu, không thiếu đơn vị hay lập luận gì cả, làm sao để khi giáo viên chấm họ không thể tìm ra lỗi lập luận để trừ điểm mình.*

Một số chú ý của giáo viên toán trong việc ôn tập

Ôn tập môn toán chung

Đại số

- Ôn tập rút gọn các biểu thức, chú ý các hằng đẳng thức, chú ý sai dấu.
- Phương trình: Xem lại các giải pt vô tỷ, điều kiện, phương pháp giải, phương trình tích. Hệ phương trình xe, kĩ phương pháp thế, cộng đại số, ẩn phụ.
- Viete chú ý các xử lí biểu thức chứa biết đối xứng hay không đối xứng, điều kiện có nghiệm.

Hình học

- Nắm chắc hệ thức lượng, tỉ số lượng giác, công thức diện tích, chú ý các bài tính toán độ dài.
- Hình học chú ý các các tính chất tiếp tuyến, phương pháp chứng minh tiếp tuyến, tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau và các bài toán liên quan.
- Phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp, các loại góc, các tính chất quen thuộc.

Toán đố

- Chú ý các bài toán về phần trăm, giá cả, năng suất.
- Hỏi cái nào, đặt ẩn cái đó, tìm mối tương quan giữa các đại lượng để lập phương trình hay hệ phương trình.
- Nắm chắc các kĩ thuật giải pt, hpt, chú ý điều kiện của ẩn.
- Chú ý các công thức tính chu vi, diện tích, thể tích các hình quen thuộc.

Ôn tập môn toán chuyên

Đại số Xem lại các chuyên đề biến đổi đại số, các phương pháp nâng cao giải phương trình, hệ phương trình: đặt ẩn phụ, lượng liên hợp,... Định lý Viete và các bài toán liên quan, bất đẳng thức và một số phương pháp chứng minh, chủ yếu các phương pháp nhẹ nhàng cauchy hai số, biến đổi tương đương.

Hình học Chú ý các bài toán phụ, các mô hình định lý quen thuộc, bổ đề nào sử dụng cần phải chứng minh lại, sử dụng kiến thức trong SGK, các bài toán cố định, di động, cực trị hình học.

Số học Chú ý các phương pháp về chứng minh chia hết, phải nắm chắc các tính chất số học, phương trình nghiệm nguyên: biến đổi thành tích, tổng, đồng dư và kẹp, nắm các tính chất của số nguyên tố, lũy thừa số nguyên, biểu diễn thập phân...

Tổ hợp Chú ý các phương pháp chứng minh: phản chứng, Dirichlet, quy nạp, một số quy tắc suy luận có lý.

Phần II

Các bài viết chuyên đề

Giải toán như... viết văn

Nguyễn Tiến Hoàng

1. Sao lại là viết văn ?

Nếu bạn đang tự hỏi rằng tên bài viết này có nhầm lẫn gì không, thì không hề đâu, bạn đã đọc đúng rồi đấy. Trước khi bắt đầu đọc, hãy lưu ý rằng, bài viết này rất nhiều chữ.

Một trong những vấn đề muôn thuở của học sinh Việt Nam, theo quan sát của người viết bài, là một nỗi sợ vô hình đối với các bài toán tổ hợp trong bất kỳ một kỳ thi lớn hay nhỏ. Tổ hợp ở đây không giới hạn trong phạm vi các bài toán đếm mà mang một nét nghĩa rộng hơn thế, tập trung vào khả năng diễn giải và suy luận. Mỗi bài toán dù trong quá trình luyện tập tại nhà, hay là bước vào thực tế thi cử, đều là một vấn đề hoàn toàn mới lạ với các bạn học sinh. Thông thường có hai hình thức để xoay sở:

a) Giải càng nhiều bài tập càng tốt để thu nhận kinh nghiệm. Đây thực ra không phải điều xấu, nhưng việc lạm dụng quá đà sẽ khiến học sinh chỉ trông đợi vào việc gặp lại những thứ quen thuộc, và thậm chí biến tướng thành việc học thuộc lòng.

b) Tuỳ cơ ứng biến và tin tưởng vào trực giác của bản thân. Điều này cũng thú vị bởi xét cho cùng thì một bài toán trong một kỳ thi ở bậc trung học, dù thi gì đi nữa, cũng chỉ là một vấn đề có thể được giải quyết trong thời gian ngắn, thành ra khả năng lớn là mỗi người sẽ tìm được một cách tiếp cận riêng mang tính sáng tạo. Thế nhưng trong một ngày xấu trời, sự nhạy bén không đồng hành, thì phải làm sao ?

Trong bài viết này, người viết muốn giới thiệu một hướng tiếp cận mang tính chất trung hoà và tập trung vào một khâu mà các bạn học sinh thường bỏ quên: phân tích bài toán. Các phân tích cẩn thận và rõ ràng để dần gỡ rối vấn đề được đặt ra đóng vai trò quan trọng tương tự như dàn ý trong việc viết văn. Điều này trở nên then chốt với các vấn đề phức tạp.

Sự phân tích nên tiến hành ra sao ? Bốn câu hỏi cơ bản sau nên được trả lời:

a) "Có gì ?" Bước đầu tiên không khác việc đọc hiểu là bao. Cần chú ý đến từng câu chữ dù là nhỏ nhất. Việc đọc kỹ các giả thiết được đưa ra giúp người giải toán hình dung được những đối tượng đã xuất hiện trong bài toán.

b) "Cần gì ?" Đây là bước giúp hiểu được yêu cầu của bài toán.

c) "Khó khăn gì ?" Bước này quan trọng nhất và đòi hỏi sự kiên nhẫn. Khi thực hiện cẩn thận hai bước đầu tiên, một số vấn đề sẽ phát sinh rất tự nhiên. Các đối tượng được đưa ra đã rõ ràng hay chưa ? Những giả thiết trong bài toán để làm gì ? Tại sao đề bài lại hỏi như thế ? Liệu các đối tượng có liên kết gì với nhau ? Cấu trúc của từng thành phần hay cả tổng thể là thế nào ? Và còn nhiều thứ phải chú ý nữa.

d) "Giải quyết thế nào ?" Đây là việc trả lời các câu hỏi trên một cách trực tiếp. Việc đặt ra các câu hỏi tự nhiên trong bước trên sẽ giúp người giải toán nhận ra những gì cần thực hiện. Một nguyên tắc chung là, hãy phân tích và liên tục đặt câu hỏi để giảm sự phức tạp, đến khi mọi thứ có thể diễn giải được thật dễ hiểu. Việc gỡ rối cần đi từ nội tại từng đối tượng (chẳng hạn như cấu trúc và tính chất của chúng), cho đến liên hệ giữa các đối tượng với nhau, để tránh bỏ sót thông tin quan trọng.

Trong những bài toán phức tạp gồm nhiều công đoạn, các bước trên sẽ phải thực hiện nhiều lần cho mỗi phần của bài toán. Việc tiếp cận có định hướng thế này, ban đầu có thể sẽ hơi tốn thời gian và mệt mỏi trong suy nghĩ, nhưng khi đã thành thạo thì cho thấy hiệu quả lớn, hơn nữa còn rèn luyện được khả năng giải quyết vấn đề một cách độc lập. Người viết bài đã liên tục sử dụng định hướng trên trong việc giảng dạy tại lớp Chuyên đề Toán 9 năm học 2022-2023 và nhận thấy hiệu quả tương đối rõ rệt.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 4.1. *Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp, luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.*

Phân tích. *Khi đọc kỹ bài toán, một số câu hỏi sau về các khó khăn là tự nhiên:*

a) Tại sao đối tượng được quan tâm là tổng các chữ số ?

b) Dưới điều kiện gì thì tổng đó sẽ là bội của 11 ?

c) Tại sao phải cần 39 số tự nhiên liên tiếp ? Như thế là ít hay nhiều ?

Để đưa được một lập luận trực tiếp nhằm giải quyết các câu hỏi trên, nhìn chung là việc khó hình dung. Các yêu cầu trên có sự liên quan mật thiết với nhau, và hơn nữa tổng các chữ số là một đại lượng không quen thuộc cho lắm, nên một cách tiếp cận khả dĩ là việc làm mọi thứ trở nên rõ ràng, từ tính chất của tổng các chữ số hay là quan hệ trong nội bộ của đối tượng, cho đến quan hệ giữa các đối tượng đã xuất hiện.

Một cách tìm hướng giải quyết là đưa ra ví dụ. Khi nhìn vào trường hợp đơn giản nhất cho 39 số tự nhiên liên tiếp chính là các số từ 1 đến 39, chúng ta có thể quan sát được sự biến động của tổng các chữ số và khảo sát được tính chia hết cho 11. Có gì thú vị ?

a) Dường như tổng các chữ số là tăng dần, nhưng có lúc tổng đó sẽ bị giảm. Vậy khi nào tổng ấy tăng và khi nào tổng ấy giảm ? Quan sát kỹ sẽ thấy rằng:
   - *Khi bắt đầu từ số chia hết cho 10, chẳng hạn là $10x$ với $x \in \mathbb{Z}^+$, thì các số từ $10x$ đến $10x+9$ có tổng các chữ số là 10 số tự nhiên liên tiếp.*
   - *Tổng các chữ số sẽ giảm khi ta "chuyển" từ $10x+9$ lên $10(x+1)$.*

b) Việc chia hết cho 11, nếu nhìn lại ý đầu tiên, thì chúng ta nhận ra rằng vì đã có cách tạo ra 10 giá trị liên tiếp của tổng các chữ số, chỉ cần cố gắng "kéo dài" để tạo ra 11 giá trị liên tiếp của tổng đó thì bài toán sẽ được hoàn tất, bởi trong 11 số tự nhiên liên tiếp, thế nào cũng có số chia hết cho 11. Do đó việc quan sát vị trí mà tổng các chữ số bị giảm trở nên quan trọng, và đại lượng đó sẽ giảm thế nào ?
   - *Có vẻ như khi từ $10x+9$ lên $10(x+1)$ thì tổng các chữ số sẽ giảm 9 đơn vị. Nếu được như thế, chúng ta chỉ cần lấy 20 số là $10x, 10x+$*

$1, \cdots, 10x + 19$ *là xong, vì sẽ thu được* 11 *giá trị liên tiếp cho tổng các chữ số.*

- *Nhưng tại sao bài toán lại cần đến* 39 *số ? Nếu hình dung một bộ gồm* 20 *số liên tiếp, bắt đầu từ số chia hết cho* 10*, là ứng viên tiềm năng để giải quyết bài toán, thì chúng ta không cần đến* 39 *số để chắc chắn chọn được, mà cần quãng* 30 *số là đủ. Nghĩa là nhận xét về sự thay đổi được đưa ra phía trên có thể không đúng.*
- *Vậy chúng ta tiếp tục kiểm tra khi nào nhận xét "giảm* 9 *đơn vị" đúng và khi nào điều đó sai, hay có thể tạm gọi là chú ý đến sự xuất hiện của những thứ "ngoài quy luật". Thử với các giá trị tiếp theo của x, rất đáng chú ý khi nhận ra rằng, nhận xét sẽ sai khi có bước chuyển từ* 99 *lên* 100*, hay từ* 199 *lên* 200*,... Nói cách khác, miễn là $10(x+1)$ không chia hết cho* 100 *thì nhận xét đúng.*

Có thể rút ra được gì từ các nhận định trên ?

a) *Nếu trong* 39 *số mà không có số nào chia hết cho* 100*, thì chọn được bộ* 20 *số liên tiếp từ $10x$ đến $10x + 19$, mà có thể hoàn toàn yên tâm về tính "liên tiếp" của tổng các chữ số trong những số đang được xét, và bài toán sẽ xong.*

b) *Lỡ như trong* 39 *số ban đầu, có số chia hết cho* 100 *thì sao ? Như đã chỉ ra, chúng ta chỉ cần* 20 *số có dạng $10x$ đến $10x + 19$, mà trong chúng sẽ không có số nào chia hết cho* 100*. Có thể hiểu rằng số chia hết cho* 100*, mà tạm gọi là a, sẽ "phân đôi"* 39 *số mà bài toán cho thành* 2 *phần: một phần gồm các số từ a trở lên, và một phần gồm các số từ $a - 1$ trở xuống. Vì ban đầu chúng ta có* 39 *số, theo Nguyên lý Dirichlet, phải có một phần được tạo ra gồm ít nhất* 20 *số.*

Và thế là xong. Bây giờ chỉ là sắp xếp và viết lại các nhận định trên thành một lời giải ngắn gọn. Khi viết thành văn thì các suy luận trên có vẻ dài dòng, nhưng trên thực tế khi suy nghĩ, mọi thứ chỉ ở dạng ý tưởng, nên việc triển khai có thể diễn ra rất nhanh.

Chứng minh. Với mỗi số nguyên dương n, gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n.
Trước hết chúng ta chứng minh rằng, với x là số nguyên dương sao cho $100 \nmid 10(x+1)$, có một trong các số $10x, 10x+1, \cdots, 10x+19$ có tổng các chữ số chia hết cho 11.. Thật vậy, đặt $S(10x) = a$ thì với $0 \le k \le 9$, ta có $S(10x + k) = a + k$ và $S(10x + 10 + k) = a + 1 + k$. Do đó tổng các chữ số nhận giá trị trong $\{a, a + 1, a + 2, \cdots, a + 10\}$, là tập hợp gồm 11 số tự nhiên liên tiếp, và trong tập hợp đó có một giá trị chia hết cho 11.
Quay trở lại bài toán. Gọi 39 số tự nhiên của đề bài lần lượt là là $a, a + 1, \cdots, a + 38$.
Xét các khả năng sau:

- Trong 39 số này không có số nào là bội của 100. Bởi vì tập hợp $\{a, a+1, \cdots, a+9\}$ gồm 10 số tự nhiên liên tiếp, trong đó phải có một số chia hết cho 10. Khi đó tồn tại $0 \le k \le 9$ để $10 \mid a + k$. Xét các giá trị trong $\{S(a + k), S(a + k + 1), \cdots, S(a + k + 19)\}$ thì theo nhận xét ở đầu bài toán, tồn tại một giá trị trong đó là bội của 11.
- Tồn tại một giá trị $0 \le k \le 38$ để $100 \mid a + k$. Khi đó trong các số còn lại, không còn số nào chia hết cho 100. Có hai khả năng sau:
  - Nếu $k \le 18$, xét tập hợp $\{S(a + k), S(a + k + 1), \cdots, S(a + k + 19)\}$ thì theo nhận xét ở đầu bài toán, tồn tại một giá trị trong đó là bội của 11.
  - Nếu $k \ge 19$, xét tập hợp $\{S(a + k), S(a + k - 1), \cdots, S(a + k - 19)\}$ thì theo nhận xét ở đầu bài toán, tồn tại một giá trị trong đó là bội của 11.

Tóm lại, trong 39 số tự nhiên liên tiếp, luôn có số mà tổng các chữ số là bội của 11. □

Ví dụ trên cũng cho thấy được một hiện tượng rất thú vị và hầu như luôn đúng, đó là khi quá trình phân tích đủ cẩn thận, việc trình bày lời giải chỉ là một cách sắp xếp và viết ngược lại những ý tưởng chính trong mạch suy luận mà thôi.
Để kết thúc bài toán này một cách trọn vẹn, bây giờ là một câu hỏi dành cho các bạn.

Ví dụ 4.2. *Thay vì 39 số, chúng ta chỉ xét 38 số thôi. Liệu bài toán còn đúng không ?* ▪

Một gợi ý cho các bạn là hãy đọc lại thật cẩn thận từng bước suy luận, và xem vấn đề diễn ra ở đâu. Chú ý rằng nếu như bài toán vẫn đúng, các bạn phải cung cấp một chứng minh, còn nếu kết quả trở nên sai thì hãy chỉ ra một phản ví dụ.
Bây giờ chúng ta đến với một bài toán khác cũng tương đối cổ điển.

Ví dụ 4.3. *Cho sáu số nguyên dương đôi một phân biệt và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được ba số trong đó, mà có một số bằng tổng hai số còn lại.* ▪

Phân tích. *Một số câu hỏi có thể được đặt ra:*

a) Tại sao lại xét 6 số trong $\{1, 2, \cdots, 9\}$?

b) Việc có một số bằng tổng hai số còn lại có ý nghĩa gì ? Số nào sẽ bằng tổng của hai số nào ? Khó khăn tại đây đến từ việc chúng ta không xác định được điều trên.

Mà nếu đã không xác định được rõ ràng mọi thứ ngay lập tức, thì tốt nhất là lấy ví dụ cụ thể để quan sát thôi. Khi lấy thử một vài ví dụ để khảo sát, dù có ít bộ ba số hay nhiều bộ ba số thoả mãn yêu cầu bài toán, luôn có một nhận xét quan trọng xuất hiện: tồn tại hai số có tổng bằng số lớn nhất.
Vậy từ đây một hướng đi khả dĩ là tìm hiểu xem số lớn nhất như thế nào, đồng thời làm thế nào có thể viết được số đó thành tổng của hai số tự nhiên phân biệt khác. Khi đã làm được điều đó, hãy xem các thông tin vừa nhận được liên hệ gì với giả thiết ban đầu, mà cụ thể là những số nào xuất hiện trong các cách phân tích thành tổng ấy. Thực ra cũng không quá nhiều trường hợp để giải quyết, vì số lớn nhất thì cũng phải không nhỏ hơn 6.

Chứng minh. Gọi 6 số đã cho là $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_6 \leq 9$. Theo giả thiết trên và đề bài thì $a_k \geq k$ với $1 \leq k \leq 6$. Xét các khả năng sau:

- Nếu $a_6 = 9$ thì $1 \leq a_k \leq 8$ với $1 \leq k \leq 5$. Phân các số nguyên dương từ 1 đến 8 thành bốn tập hợp $\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Theo nguyên lý Dirichlet, trong các số từ a_1 đến a_5, có ít nhất hai số thuộc vào cùng một tập hợp. Tổng hai số đó bằng 9, nên tồn tại $1 \leq i < j \leq 5$ để $a_i + a_j = 9$.
- Nếu $a_6 = 8$ thì $1 \leq a_k \leq 7$ với $1 \leq k \leq 5$. Phân các số nguyên dương từ 1 đến 8 thành bốn tập hợp $\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}$. Theo nguyên lý Dirichlet, trong các số từ a_1 đến a_5, có ít nhất hai số thuộc vào cùng một tập hợp. Tổng hai số đó bằng 8, nên tồn tại $1 \leq i < j \leq 5$ để $a_i + a_j = 8$.
- Nếu $a_6 = 7$ thì $1 \leq a_k \leq 6$ với $1 \leq k \leq 5$. Phân các số nguyên dương từ 1 đến 7 thành ba tập hợp $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$. Theo nguyên lý Dirichlet, trong các số từ a_1 đến a_5, có ít nhất hai số thuộc vào cùng một tập hợp. Tổng hai số đó bằng 7, nên tồn tại $1 \leq i < j \leq 5$ để $a_i + a_j = 7$.
- Nếu $a_6 = 6$ thì $1 \leq a_k \leq 5$ với $1 \leq k \leq 5$. Phân các số nguyên dương từ 1 đến 5 thành ba tập hợp $\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}$. Theo nguyên lý Dirichlet, trong các số từ

a_1 đến a_5, có ít nhất hai số thuộc vào cùng một tập hợp. Tổng hai số đó bằng 6, nên tồn tại $1 \le i < j \le 5$ để $a_i + a_j = 6$.

Tóm lại thì luôn có hai số bằng tổng của số lớn nhất. Bài toán kết thúc. □

Khai thác thêm bài toán này có thể thấy nhiều điều thú vị sau:

a) Câu hỏi đầu tiên vẫn chưa được giải quyết triệt để khi phân tích. Tuy nhiên, với trường hợp $a_6 = 9$, nhận thấy rằng việc chọn ra 6 số là để *vừa đủ* cho việc sử dụng Nguyên lý Dirichlet. Một câu hỏi tự nhiên là nếu bài toán chỉ xét 5 số thay vì 6 số, thì các lập luận sẽ biến đổi thế nào, và liệu kết luận của bài toán còn đúng ?

b) Phát biểu khác đi một chút, liệu số lượng số nhỏ nhất cần chọn để chắc chắn có một số bằng tổng hai số khác, là bao nhiêu ? Hơn nữa thay vì giải quyết bài toán như trường hợp ban đầu, khi các số không lớn hơn 9, điều gì sẽ xảy ra khi thay 9 bởi một số nguyên dương n bất kỳ ? Liệu các câu hỏi tương tự có thể được giải quyết ?

Từ đó có thể thu được bài toán sau, xin dành cho các bạn tự luyện tập.

Ví dụ 4.4. *Cho số nguyên dương $n \ge 3$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách chọn ra k số nguyên dương đôi một phân biệt từ tập hợp $\{1, 2, \cdots, n\}$, luôn chọn được ba số trong đó, mà có một số bằng tổng hai số kia.* ■

Bây giờ là một vấn đề khác dù tương đối cổ điển nhưng vẫn có nhiều điều để học hỏi.

Ví dụ 4.5. *Với n là số nguyên dương, chọn ra $n+1$ số từ tập hợp $\{1, 2, \cdots, 2n\}$.*

a) Chứng minh rằng có hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng có hai số mà thương của chúng là số nguyên. ■

Phân tích. *Một số câu hỏi có thể được đặt ra như sau:*

a) Tại sao phải cần chọn ra $n+1$ số ?

b) Sự nguyên tố cùng nhau, và việc thương là số nguyên, có ý nghĩa số học gì ?

Nếu định nghĩa một cách số học, thì hai số được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng không có ước nguyên tố chung. Khi thử tiếp cận theo việc khảo sát các ước nguyên tố của $n+1$ số, mọi chuyện sẽ trở nên rất phức tạp vì chúng ta không biết những số nào được chọn ra, hơn nữa bài toán chỉ yêu cầu một sự tồn tại, nên nếu đi khảo sát toàn bộ cấu trúc của tập hợp ước nguyên tố, thì đó có vẻ là một yêu cầu quá sức. Hơn nữa, một vấn đề khác làm hướng tiếp cận này trở nên không khả thi, đó là trong bài toán không hề có dấu hiệu gì cho thấy nên tìm hiểu một cách chi tiết về các cấu trúc số học.

Do đó chúng ta sẽ thử một góc nhìn khác. Tập trung vào câu hỏi đầu tiên, một vấn đề được đặt ra như sau: nếu như chỉ lấy n số thì sao ? Có thể tìm ngay được phản ví dụ với việc chọn n số chẵn, thì hai số nào cũng có ước nguyên tố chung là 2. Vậy trong trường hợp tạm gọi là xấu nhất, thế nào cũng có ít nhất một số lẻ. Và liệu số lẻ này có vai trò và quan hệ thế nào với các số chẵn, khi cần khảo sát sự nguyên tố cùng nhau ?

Viết một vài trường hợp nhỏ, chúng ta nhận ra rằng khi số lẻ ấy được kết hợp với số liền trước hay số liền sau, thì sẽ tạo ra một cặp số nguyên tố cùng nhau. Từ đó một câu hỏi

nảy sinh: nếu như chọn $n+1$ số bất kỳ, thì liệu luôn có hai số tự nhiên liên tiếp ? Điều này có thể được kiểm chứng dễ dàng, nên ý đầu tiên của bài toán đến đây là hoàn thành. Sự kiện "chia hết" là một yếu tố khó kiểm soát. Bây giờ chẳng hạn như đã chọn trước một số nguyên dương a, các số chia hết cho a sẽ là ka, hoặc các ước của a thì luôn có dạng a/k. Vấn đề là, chúng ta không xác định được khi chọn ra $n+1$ số bất kỳ, sẽ có các số nào liên quan đến a xuất hiện, hơn nữa không chắc chắn việc thương của chúng liệu có phải số nguyên. Vậy thì chúng ta sẽ thử làm mạnh đánh giá lên để khử được sự ngẫu nhiên ấy: nếu như chọn ra được một bộ càng nhiều số càng tốt mà liên quan đến a, đồng thời hai số nào trong đó cũng có thương là số nguyên, thì bộ số ấy chỉ nên được chọn tối đa một phần tử nhằm tránh việc chia hết.
Làm rõ ý tưởng này, chúng ta sẽ nhận ra $a, 2a, 4a, \cdots$ là lựa chọn tốt nhất có thể nếu xét các số từ a trở lên. Khi chú ý đến các số từ a trở xuống và hiệu chỉnh, lựa chọn phù hợp cho bộ số cần tìm chính là $a, 2a, 4a, \cdots$ với a là số lẻ. Có n bộ như thế, và thế là xong.

Chứng minh. a) Chia tập hợp $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ thành n tập hợp $\{2k-1, 2k\}$ với $1 \leq k \leq n$. Vì ban đầu có $n+1$ phần tử được chọn ra, theo Nguyên lý Dirichlet, phải có hai phần tử nào đó thuộc cùng một tập hợp con được nêu ra phía trên. Đây là hai số tự nhiên liên tiếp nên chúng nguyên tố cùng nhau.

b) Với a là số lẻ và $1 \leq a \leq 2n$, ta định nghĩa

$$S_a = \{x \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq x \leq 2n \mid \exists k \in \mathbb{Z}^+ : x = 2^k a\}$$

Mỗi số nguyên dương không vượt quá $2n$ đều thuộc về một tập hợp S_a nào đó. Có n tập hợp như thế, mà ban đầu có $n+1$ số được chọn, nên Nguyên lý Dirichlet cho thấy rằng phải có hai số cùng nằm trong một tập hợp S_a nào đó. Gọi hai số đó là $2^s a$ và $2^t a$ với $0 \leq s < t$ thì thương của chúng là $2^{t-s} a$, là một số nguyên.

□

Như thường lệ, bài toán chưa kết thúc ngay tại đây, mà chúng ta đặt ra thêm một vài quan sát nữa. Việc chọn $n+1$ số trong tập hợp $\{1, 2, \cdots, 2n\}$, như đã phân tích, là vừa đủ để vượt qua ngưỡng "lớn nhất" của sự kiện không có hai số nào nguyên tố cùng nhau. Một lẽ dĩ nhiên là chúng ta muốn xác lập một ngưỡng tương tự cho sự kiện chia hết: liệu có thể chọn được tối đa bao nhiêu số, mà không có hai số nào có thương là số nguyên ?
Hơn nữa, nếu như kết hợp cả hai vấn đề, nghĩa là có thể chọn được tối đa bao nhiêu số để không có hai số nào nguyên tố cùng nhau và đồng thời không có hai số nào có thương là số nguyên, chúng ta thu được bài toán sau trong đề thi chọn Đội tuyển năm 2017 của Trường Phổ thông Năng khiếu để tham dự Kỳ thi Học sinh giỏi Quốc gia môn Toán bậc THPT.

Ví dụ 4.6 (PTNK 2017). *Xét tập hợp $S = \{1, 2, \cdots, 2017\}$. Liệu có thể chọn ra tối đa bao nhiêu số nguyên dương từ S, sao cho không có hai số nào nguyên tố cùng nhau và đồng thời không có hai số nào có thương là số nguyên ?*

Theo trí nhớ của người viết bài cũng tham dự kỳ thi năm ấy, không có thí sinh nào giải quyết được bài toán trên. Mặc dù vậy, khi phân tích kỹ, đặc biệt là về sự kiện chia

hết, các bạn có thể tìm được ngay đáp số và thậm chí là một ví dụ thoả mãn yêu cầu bài toán.
Các bài toán trên đều minh hoạ cho một bước chuyển đổi quan trọng từ những phân tích dài dòng bằng chữ thành các suy diễn gãy gọn được diễn đạt bằng ký hiệu. Vì mỗi tình huống mỗi khác, điều quan trọng nhất vẫn là đọc thật kỹ những giả thiết được đưa ra và nắm chắc những yêu cầu cần thiết. Một điều tối kỵ là không được bịa ra thêm giả định vô căn cứ để ép vào mạch suy luận. Chúng ta kết thúc bằng một bài toán thú vị, mặc dù trông có vẻ nhiều khó khăn, và phương châm vẫn là... nghĩ đơn giản thôi.

Ví dụ 4.7. *Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2023. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó ?*

Phân tích. *Một số câu hỏi sau được đặt ra khi đọc kỹ đề bài.*

a) *Giả định chia hết của bài toán rất kỳ quặc. Có cách nào diễn đạt lại mọi thứ cho rõ ràng hơn hay không, và làm sao để khai thác được điều kiện ấy ?*

b) *Liệu có thể tìm được một ví dụ với tương đối nhiều số ?*

Chúng ta tập trung giải quyết yêu cầu đầu tiên. Viết rõ lại bằng ký hiệu, đó là với $a > b$ là hai số nguyên dương phân biệt được chọn, ta phải có $a - b \nmid a + b$. Vì các số này được chọn bất kỳ và các biểu thức xuất hiện đều là bậc nhất, việc tìm kiếm một quan hệ số học giữa a và b chỉ bằng giả định trên là không khả thi. Nếu không tin, các bạn có thể thử !
Xoay sang câu hỏi thứ nhì. Thử tiếp cận vấn đề một cách tương đối ngây thơ như sau: cứ lần lượt bắt đầu từ số 1, liệu có thể lấy được những số nào tiếp theo ? Dĩ nhiên không phải lúc nào việc xử lý vấn đề theo cách tham lam cũng cho một kết quả tối ưu, nhưng ít nhất vẫn có thêm định hướng và một vài quan sát hữu ích để hiệu chỉnh khi cần thiết.

- *Không lấy được số 2 và số 3, vì ảnh hưởng của số 1.*
- *Lấy được số 4. Cũng bởi thế mà không lấy được số 5 và số 6.*
- *Lấy được số 7, rồi lại bỏ qua số 8 và số 9. Cứ như thế...*

Một quan sát về các số được thu nhận cho thấy chúng phải cách nhau ít nhất 3 đơn vị. Liệu điều này có luôn đúng ? Có thể quay về giả định của bài toán để kiểm tra.
Mọi thứ quy về việc chọn ra càng nhiều số càng tốt, mà hai số bất kỳ có hiệu từ 3 trở lên. Để chọn được nhiều số nhất, một lẽ dĩ nhiên là phải khởi đầu từ số nhỏ nhất, và các khoảng cách giữa các số cũng phải nhỏ nhất có thể. Bây giờ chỉ là xếp lại thành lời giải, và nhớ rằng vì đây là bài toán cực trị, hãy chỉ ra ví dụ.

Chứng minh. Gọi các số được chọn là $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_k \le 2023$. Trước hết, ta chứng minh rằng với $1 \le i \le k-1$ thì $a_{i+1} - a_i \ge 3$. Thật vậy:

- Nếu có chỉ số $1 \le i \le k-1$ để $a_{i+1} - a_i = 1$ thì $a_{i+1} - a_i \mid a_{i+1} + a_i$, mâu thuẫn.
- Nếu có chỉ số $1 \le i \le k-1$ để $a_{i+1} - a_i = 2$ thì chú ý rằng $a_{i+1} + a_i = 2a_i + 2$, ta cũng thu được $a_{i+1} - a_i \mid a_{i+1} + a_i$, lại là một mâu thuẫn.

Do đó nhận xét được chứng minh. Từ đó thì

$$2023 \ge a_k \ge a_{k-1} + 3 \ge a_{k-2} + 3 \cdot 2 \ge \cdots \ge a_1 + 3(k-1) \ge 1 + 3(k-1)$$

hay là $2022 \ge 3(k-1)$. Điều này cho thấy $k \le 675$. Để chọn được 675 số thoả mãn yêu cầu bài toán, với $1 \le i \le 675$, chọn $a_i = 3i - 2$. Thật vậy, với $1 \le i < j \le 675$ thì:

- $a_j - a_i = 3(j-i)$ là một bội của 3,

- $a_j + a_i = 3(j+i) - 4$ không là một bội của 3,

nên ta luôn có $a_j - a_i \nmid a_j + a_i$. Vậy có thể chọn được tối đa 675 số nguyên dương đôi một phân biệt không vượt quá 2023 mà không có tổng hai số nào chia hết cho hiệu của chúng. □

Hi vọng rằng những trình bày phía trên có thể giúp các bạn phần nào đó tự tin và vững vàng hơn trong việc suy luận để giải toán. Dưới đây là một số bài toán để luyện tập.

3. Bài tập

Bài 1. *Xét bảng ô vuông 10×10. Mỗi ô vuông của bảng được điền một số nguyên tuỳ ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung một cạnh bất kì đều không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trên bảng ít nhất 6 lần.*

Bài 2. *Cho ABC là một tam giác tuỳ ý. Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm màu đỏ có khoảng cách bằng 1, hoặc tồn tại một tam giác có ba đỉnh màu xanh mà đồng dạng với tam giác ABC.*

Bài 3. *Có 20 viên bi được xếp thành một hàng ngang trên bàn, trong đó có 10 viên bi màu xanh và 10 viên bi màu đỏ. Chứng minh rằng có thể chọn ra một bộ gồm 10 viên bi liên tiếp mà trong đó số viên bi màu xanh bằng số viên bi màu đỏ.*

Bài 4. *Cho $A = \{1, 2, 3, \cdots, 100\}$. Lấy S là tập hợp con của A sao cho các tổng hai phần tử phân biệt bất kỳ của S thì có các số dư đôi một phân biệt khi chia cho 100. Chứng minh rằng S có không quá 14 phần tử, và chỉ ra một tập hợp S có 10 phần tử.*

Bài 5. *Có một bộ các quả cân có tính chất sau:*

i) Trong bộ có ít nhất 5 quả cân có trọng lượng khác nhau.

ii) Với hai quả cân bất kỳ, tìm được hai quả cân khác có tổng trọng lượng bằng với tổng trọng lượng của hai quả cân đó.

Bộ quả cân này có ít nhất là bao nhiêu quả cân?

Bài 6. *Chọn ra k số nguyên dương phân biệt là ước của 6^{2023}.*

a) Chứng minh rằng nếu $k = 5$ thì tồn tại hai số có tích là số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu $k = 21$ thì tồn tại sáu số có tích là một luỹ thừa bậc 6.

Bài 7. *Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Chứng minh rằng khi chọn ra $n+2$ số nguyên dương từ tập hợp $S = \{1, 2, \cdots, 3n\}$, luôn tồn tại hai số x, y để $n < x - y < 2n$.*

Bài 8. *Cho tập hợp $S = \{1, 2, \cdots, 2023\}$. Xét tập hợp con $T \subseteq S$. Nếu T không chứa hai phần tử nào có hiệu trong E thì có tối đa bao nhiêu phần tử, với:*

a) $E = \{3; 6; 9\}$.

b) $E = \{4; 7\}$.

Bài 9. *Lớp 9A có 6 học sinh tham gia kỳ thi chọn đội tuyển môn Toán, và nhận được 6 điểm số khác nhau là các số tự nhiên không vượt quá 20. Gọi m là trung bình cộng các điểm số của 6 học sinh trên. Hai học sinh được gọi là lập thành một cặp hoàn hảo nếu như trung bình cộng điểm số của hai em đó lớn hơn m.*

a) *Chứng minh rằng không thể chia 6 học sinh thành 3 cặp mà mỗi cặp đều hoàn hảo.*
b) *Trong 6 học sinh trên, có thể có nhiều nhất bao nhiêu cặp hoàn hảo ?*

Bài 10. *Có 8 kì thủ thi đấu giải cờ vua Candidates 2023 theo thể thức vòng tròn một lượt. Tại mỗi trận đấu phân định thắng thua, người thắng được 1 điểm còn người thua được 0 điểm; tại mỗi trận hòa thì mỗi người được 0.5 điểm.*

a) *Chứng minh rằng sau 3 vòng đầu tiên, luôn tìm được hai người có số điểm bằng nhau.*
b) *Giả sử rằng sau khi kết thúc giải, tất cả các kì thủ đều có số điểm khác nhau. Tìm số điểm ít nhất có thể của người chiến thắng.*
c) *Giải lại bài toán khi giải đấu diễn ra theo thể thức vòng tròn hai lượt.*

Ước chung và một số áp dụng

Nguyễn Vĩnh Khang

1. Các tính chất của ước chung

Cho 2 số nguyên x, y (không đồng thời bằng 0), ta sẽ ký hiệu ước chung lớn nhất của x, y là (x, y) hoặc $\gcd(x, y)$. Nó luôn là một số nguyên dương.

Phân tích. *Nếu ta đặt $(x, y) = d$, thì $x' = \frac{x}{d}$ và $y' = \frac{y}{d}$ nguyên tố cùng nhau. Từ đó lợi dụng các tính chất liên quan đến số nguyên tố cùng nhau như (được sử dụng thẳng, không cần chứng minh)*

- *Nếu $ab \vdots c$, và $(b, c) = 1$, ta có $a \vdots c$.*
- *Nếu $a \vdots b$ và $a \vdots c$, với $(b, c) = 1$, ta có $a \vdots bc$.*
- *Nếu $(a, b) = 1$, r là ước của a, s là ước của b, ta cũng có $(r, s) = 1$.*

để phân tích bài toán tiếp. Việc đặt ước chung như vậy sẽ làm đơn giản bài toán (do ta có thể rút d ra rồi triệt tiêu, nếu được) và cho thêm dữ kiện $(x', y') = 1$.

Bài 1. *Giả sử a, b, c, n là các số nguyên dương, chứng minh những tính chất sau*

a) $\gcd(a, b, c) = \gcd(\gcd(a, b), c)$
b) $\gcd(ac, bc) = \gcd(a, b)c$
c) *Nếu* $\gcd(a, b) = 1$, *ta có* $\gcd(ab, c) = \gcd(a, c)\gcd(b, c)$
d) $\gcd(a^n, b^n) = \gcd(a, b)^n$.

Chứng minh.

Phần 1: gọi $d = \gcd(a, b, c)$ ta có d là ước của a, b, nên $\gcd(a, b) \vdots d$. Nhưng $c \vdots d$, nên ta được một chiều

$$\gcd(\gcd(a, b), c) \vdots d = \gcd(a, b, c) \quad (1.1)$$

Để chứng minh chiều còn lại, gọi $d = \gcd(\gcd(a, b), c)$. Tương tự như trên ta có d là ước của $\gcd(a, b)$, nên d cũng là ước của a, b. Nhưng d là ước của a, b, c, nên

$$\gcd(a, b, c) \vdots d = \gcd(\gcd(a, b), c) \quad (1.2)$$

Kết hợp (1.1) và (1.2), ta có đpcm.

Phần 2: nếu $d = (ac, bc)$, ta có $d \vdots c$ do c là ước chung của ac, bc. Đặt $d = kc$, ta có $(ac, bc) = kc$, và $ac, bc \vdots kc$. Nói cách khác $a, b \vdots k$, nên $(a, b) \vdots k$, và

$$c(a, b) \vdots kc = (ac, bc) \quad (2.1)$$

Mặt khác, đặt $k = (a, b)$, ta có $a, b \vdots k$, nên $ac, bc \vdots kc$. Theo định nghĩa, $(ac, bc) \vdots kc = (a, b)c$. Kết hợp với (2.1) ta có đpcm $\gcd(ac, bc) = \gcd(a, b)c$.

Phần 3: gọi $k = \gcd(a, c), l = \gcd(b, c)$, theo tính chất 2, ta được

$$\begin{cases} \gcd\left(\frac{a}{k}, \frac{c}{k}\right) & = 1 \\ \gcd\left(\frac{b}{l}, \frac{c}{l}\right) & = 1 \end{cases}$$

Mặt khác $a \vdots k, b \vdots l$, nhưng a, b lại nguyên tố cùng nhau, nên k, l cũng vậy. Kết hợp với $c \vdots k, l$, ta có $c \vdots k, l$. Để ý rằng $\frac{c}{kl}$ là ước của $\frac{c}{k}$ và $\frac{c}{l}$, nên

$$\begin{cases} \gcd\left(\frac{a}{k}, \frac{c}{kl}\right) & = 1 \\ \gcd\left(\frac{b}{l}, \frac{c}{kl}\right) & = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Ta chứng minh $\gcd(ab, c) = 1$ nếu $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(a, c) = 1$. Thật vậy, giả sử ngược lại, tức $\gcd(ab, c) \neq 1$. Khi đó tồn tại p là ước nguyên tố chung của ab, c. Nhưng $ab \vdots p$ thì ta phải có $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$, nên $\gcd(a, c) \vdots p$ hoặc $\gcd(b, c) \vdots p$ (cả 2 đều mâu thuẫn với giả thiết).

Áp dụng quan sát trên cho (3.1), ta được

$$\gcd\left(\frac{ab}{kk}, \frac{c}{kl}\right) = 1 \Leftrightarrow \gcd(ab, c) = kl = \gcd(a, c)\gcd(b, c)$$

Phần 4: ta chứng minh $\gcd(a^n, b^n) = 1$ nếu $\gcd(a, b) = 1$. Thật vậy, giả sử $\gcd(a^n, b^n) \neq 1$, khi đó a^n, b^n phải có một ước nguyên tố chung p. Sử dụng tính chất nếu $xy \vdots p$ thì $x \vdots p$ hoặc $y \vdots p$. Từ đó $a, b \vdots p$, vô lý.

Đặt $d = \gcd(a, b)$, ta có $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, nên

$$\gcd\left(\left(\frac{a}{d}\right)^n, \left(\frac{b}{d}\right)^n\right) = 1$$

Nhân d^n cho cả 2 vế, và dùng tính chất 2, ta được

$$\gcd(a, b)^n = d^n = d^n \gcd\left(\left(\frac{a}{d}\right)^n, \left(\frac{b}{d}\right)^n\right) = \gcd(a^n, b^n)$$

□

Hệ quả 1. *Giả sử a, b, c, n là các số nguyên dương, chứng minh những tính chất sau*

a) *Nếu $ab \vdots c$ và $(a, b) = 1$, tồn tại k, l sao cho $kl = c$, và $a \vdots k, b \vdots l$.*
b) *Nếu $ab = c^n$ và $(a, b) = 1$ $(n \geq 2)$, tồn tại k, l sao cho $kl = c$ và $a = k^n, b = l^n$.*

Chứng minh.
Phần 1: gọi $k = \gcd(a, c), l = \gcd(b, c)$, theo bài tập trước, ta có $kl = \gcd(a, c)\gcd(b, c) = \gcd(ab, c) = c$, và $a \vdots k, b \vdots l$ theo định nghĩa.

Phần 2: gọi $k = \gcd(a, c), l = \gcd(b, c)$, theo bài tập trước, ta có $kl = \gcd(a, c)\gcd(b, c) = \gcd(ab, c) = c$. Mặt khác

$$k^n = \gcd(a^n, c^n) = \gcd(a^n, ab) = a\gcd(a^{n-1}, b) = a$$

, ở đây $\gcd(a^{n-1}, b) = 1$ do nếu tồn tại p là ước nguyên tố chung cho a^{n-1}, b, ta phải có p là ước chung của a, b (vô lý). Chứng minh tương tự, ta cũng có $l^n = b$. Ta có đpcm. □

2. Bài tập

Bài 2 (Junior Balkan Mathematical Olympiad 2001). *Tìm ước chung lớn nhất của $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{1999}$, với $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$.*

Chứng minh. Do $A_0 = 35 = 5 \cdot 7$, nên ước chung lớn nhất, gọi là d, phải là 1 trong 4 số $\{1, 5, 7, 35\}$. Do $A_1 = 2^3 + 3^8 + 5^8 \equiv 8 + (-2)^8 \equiv 4 \pmod 5$ nên $d \neq 5, 35$. Mặt khác, theo định lý Fermat, ta có $3^6 \equiv 5^6 \pmod 7$, nên

$$A_n \equiv 8^n + (3^6)^n \cdot 9 + (5^6)^n \cdot 25 \equiv 1 + 9 + 25 \equiv 0 \pmod 7$$

Ta kết luận $d = 7$. □

Bài 3. *Chứng minh rằng nếu $d > 0$ không phải là số chính phương, thì $\sqrt{d}$ là số vô tỷ.*

Chứng minh. Để ý rằng $d = 1^2 \cdot d$ nên d luôn có thể viết thành dạng $d = x^2 y$ (với $x, y > 0$). Chọn x lớn nhất có thể, và để ý $y \neq 1$. Nếu y có ước chính phương z^2 ngoài 1, thì $d = x'^2 y'$, với $x' = xz > x$ và $y' = \frac{y}{z}$, vô lý. Như vậy y là tích các số nguyên tố khác nhau (do nếu p là ước nguyên tố của y, thì $\frac{y}{p}$ không thể nào chia hết cho p được).

*Giả sử $\sqrt{d} = \frac{a}{b}$ là một số hữu tỷ, với a, b nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Ta có

$$a^2 = b^2 d = (bx)^2 \cdot y \qquad (*)$$

nên $a^2 \vdots y$. Nhưng y chỉ là tích các số nguyên tố khác nhau, nên $a \vdots y$. Thế $a = cy$ vào $(*)$, ta được

$$c^2 y^2 = (bx)^2 y \Leftrightarrow b^2 x^2 = c^2 y$$

Để ý $c^2y \vdots b^2$, nhưng $(c,b)=1$ (do $(a,b)=1$), nên $y \vdots b^2$. Ta đã chọn sao cho y không thể nào có ước chính phương nào ngoài 1, nên $b=1$! Từ đó ta có $\sqrt{d}=a$, hay $d=a^2$, vô lý. □

Bài 4. *Giả sử a,b nguyên tố cùng nhau, a,b khác tính chẵn lẻ. Chứng minh a^m+b^n, a^m-b^n nguyên tố cùng nhau với mọi $m,n \geq 1$.*

Chứng minh. Gọi $d>0$ là một ước chung của a^m+b^n, a^m-b^n. Khi đó $\begin{cases} 2a^m = (a^m+b^n)+(a^m-b^n) \vdots d \\ 2b^n = (a^m+b^n)-(a^m-b^n) \vdots d \end{cases}$
Để ý rằng a,b khác tính chẵn lẻ, nên a^m+b^n và a^m-b^n luôn lẻ. Nhưng d là một ước chung, nên d lẻ. Như vậy $a^m, b^n \vdots d$.

Nếu $d \neq 1$, gọi p là một ước nguyên tố của d (có thể $d=p$). Khi đó $a^m, b^n \vdots p$, nên ta cũng có $a, b \vdots p$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết a,b nguyên tố cùng nhau, nên $d=1$. Nhưng d bất kỳ, nên a^m+b^n, a^m-b^n chỉ có ước chung (dương) là 1. Hay nói cách khác, a^m+b^n, a^m-b^n nguyên tố cùng nhau. □

Bài 5. *Cho 2 số hữu tỷ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ viết ở dạng tối giản (tức $(a,b)=(c,d)=1$) sao cho $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng $|b|=|d|$.*

Chứng minh. Ta có $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ là một số nguyên, nên $ad+bc \vdots b$, hay $ad \vdots b$. Nhưng a,b nguyên tố cùng nhau, nên $d \vdots b$. Chứng minh tương tự với $ad+bc \vdots d$, ta có $b \vdots d$. Như vậy $|b|=|d|$. □

Bài 6 (Spanish Mathematical Olympiad 1996).
Giả sử a,b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ là số nguyên. Nếu d là ước chung lớn nhất của a,b

a) *Chứng minh rằng $a+b \geq d^2$.*
b) *Tìm một cặp (a,b) mà $a+b=d^2$.*

Chứng minh.
(a) Đặt $a=da', b=db'$, ta có

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{d^2(a'^2+b'^2)+d(a'+b')}{d^2a'b'} \in \mathbb{Z}$$

nên $\frac{d^2(a'^2+b'^2)+d(a'+b')}{d^2}=a'^2+b'^2+\frac{a'+b'}{d}$ cũng là số nguyên. Như vậy $a'+b' \vdots d$. Nhưng a,b nguyên dương, nên $a'+b' \geq d$, hay $a+b=d(a'+b') \geq d^2$.

(b) $a=3, b=6$, thì $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=3$ và $a+b=9=\gcd(a,b)^2$. □

Bài 7 (Romanian Mathematical Olympiad 2003).
Cho n là một số chẵn nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a^n + b^n \vdots a + b$.

Chứng minh. Do n chẵn ta có $a^n - b^n \vdots a^2 - b^2 \vdots a + b$. Như vậy

$$\begin{cases} 2a^n = (a^n + b^n) + (a^n - b^n) \vdots a + b \\ 2b^n = (a^n + b^n) - (a^n - b^n) \vdots a + b \end{cases}$$

Gọi $d = (a, b)$, và $a = du, b = dv$, ta có u, v nguyên tố cùng nhau và $\gcd(a, b) = 2d^n \gcd(u^n, v^n) = 2d^n \vdots d(u + v)$. Nói cách khác, $2d^{n-1} \vdots u + v$.

Để cho ra tất cả giá trị a, b có thể, ta bắt đầu với 2 số u, v nguyên dương và nguyên tố cùng nhau. Tiếp theo chọn d bất kỳ sao cho $2d^{n-1} \vdots u + v$ (d luôn tồn tại do ta có thể chọn $d = u + v$). Khi đó $a = du, b = dv$ thỏa mãn đề bài.

Thật vậy, từ $a^n + b^n = d^n(u^n + v^n)$, ta chia làm 2 trường hợp

a) Nếu u, v đều lẻ: ta có $u^n + v^n$ chẵn, nên $a^n + b^n \vdots 2d^n \vdots d(u + v) = a + b$.

b) Nếu, không mất tính tổng quát, u chẵn, v lẻ: do $2d^{n-1} \vdots u + v$, và $u + v$ lẻ, nên $d^{n-1} \vdots u + v$. Từ đó $a^n + b^n \vdots d^n \vdots d(u + v) = a + b$.

Ta kết luận $a = du, b = dv$, với u, v nguyên tố cùng nhau sao cho $u + v$ là ước của $2d^{n-1}$. □

Bài 8 (India Mathematical Olympiad 1998).
Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, n) sao cho

$$\gcd(x, n + 1) = 1 \text{ và } x^n + 1 = y^{n+1}.$$

Chứng minh. Do $x > 0$, nên $y^{n+1} = x^n + 1 > 1$. Ta có

$$x^n = y^{n+1} - 1 = (y - 1)(y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1)$$

Do $y - 1 > 1$, ta phải có $y - 1 \vdots p$ với p là một ước nguyên tố nào đó của x. Từ đó

$$y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1 \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ số } 1} \equiv n + 1 \pmod{p}$$

Như vậy p là ước chung của x và $n + 1$, vô lý. □

Bài 9 (Bulgarian Mathematical Olympiad 2001).
Tìm tất cả các bộ (a, b, c) nguyên dương sao cho $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho a^2b, b^2c, và c^2a.

Chứng minh. Đầu tiên để ý rằng nếu d là ước chung của a, b, ta có $a^3+b^3+c^3 \vdots a^2b \vdots d^3$, nên $c \vdots d$. Như vậy nếu ta đặt $d = (a, b, c)$, và $a = du, b = dv, c = dw, u, v$ phải nguyên tố cùng nhau. Chứng minh tương tự, ta có u, v, w đôi một nguyên tố cùng nhau.

Do $a^3 + b^3 + c^3 \vdots a^2b$, ta có

$$d^3(u^3 + v^3 + w^3) \vdots d^3u^2v \Leftrightarrow u^3 + v^3 + w^3 \vdots u^2v$$

Từ đó, $u^3 + v^3 + w^3 \vdots u^2$, và $v^3 + w^3 \vdots u^2$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $u^3 + v^3 + w^3 \vdots v^2, w^2$, và $w^3+u^3 \vdots v^2, u^3+v^3 \vdots w^2$. Nhưng u, v, w nguyên tố cùng nhau đôi một, nên

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + w^3 \vdots u^2v^2w^2 \\ v^3 + w^3 \vdots u^2 \\ w^3 + u^3 \vdots v^2 \\ u^3 + v^3 \vdots w^2 \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $u \le v \le w$. Do a, b, c nguyên dương, u, v, w cũng nguyên dương, và $u^2v^2w^2 \le u^3 + v^3 + w^3 \le 3w^3$. Nói cách khác, $w \ge \frac{u^2v^2}{3}$. Mặt khác, $u^3 + v^3 \vdots w^2$, nên ta được

$$u^3 + v^3 \ge w^2 \ge \frac{u^4v^4}{9} \qquad (*)$$

Nhưng $u \le v$, nên $2v^3 \ge u^3 + v^3 \ge \frac{u^4v^4}{9}$, hay $u^4v \le 18$. Ta suy ra $u = 1$ hoặc $u = 2$. Nhưng $u = 2$ thì $v \ge 2$, nên $32 \le u^4v \le 18$, vô lý.

*Như vậy $u = 1$. Nếu $v = 1$ thì $2 \vdots w^2$, cho nên $w = 1$. Ta có bộ $(a, b, c) = (d, d, d)$ thỏa mãn. Nếu $v \ge 2$, ta phải có $w > v$, hay $w \ge v + 1 \ge 3$ do v, w nguyên tố cùng nhau. Nhưng $u^3 + v^3 + w^3 \vdots u^2v^2w^2$, nên ta có

$$1 + v^3 + w^3 \vdots v^2w^2 \Rightarrow v^2w^2 \le 1 + v^3 + w^3 \le 1 + (w-1)^3 + w^3 < 2w^3$$

Chia w^2 cho cả 2 vế, ta được $v^2 < 2w$, hay $w > \frac{v^2}{2}$. Mặt khác, ta có $v^3 + u^3 \vdots w^2$, nên

$$v^3 + 1 \ge w^2 > \frac{v^4}{4} \Leftrightarrow 4 > v^3(v-4)$$

Vậy $v \le 4$. Nhưng $v \ge 2$, ta xét các trường hợp sau

a) $v = 4$: khi đó $u^3 + v^3 = 65 \vdots w^2$, nên $w = 1$ (vô lý do $v \le w$).

b) $v = 3$: khi đó $u^3 + v^3 = 28 \vdots w^2$, nên $w \in \{1, 2\}$ (cũng vô lý như trên).

c) $v = 2$: khi đó $u^3 + v^3 = 9 \vdots w^2$, nên $w = 3$ (do $w \ge v$).

Kiểm tra lại, ta nhận $(a,b,c) = (d,2d,3d)$ và các hoán vị của nó. Ta kết luận

$$\begin{aligned}(a,b,c) = (k,k,k),&(k,2k,3k),(k,3k,2k),\\ &(2k,k,3k),(2k,3k,k),(3k,k,2k),(3k,2k,k) \qquad k \geq 1\end{aligned}$$

□

Bài 10. *Cho các số nguyên dương x,y,z sao cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Giả sử x,y,z nguyên tố cùng nhau (tức $(x,y,z)=1$), chứng minh rằng $x+y$ là một số chính phương.*

Chứng minh. Viết lại phương trình thành $x+y=\frac{xy}{z}$. Đặt $d=(x,y)$, và $x=da, y=db$, ta có $(d,z)=1$ (do $(x,y,z)=1$) và $(a,b)=1$. Thêm nữa

$$a+b=\frac{dab}{z}$$

Ta có $dab \vdots z$, và $(d,z)=1$, nên $ab \vdots z$. Do $(a,b)=1$, ta sẽ chứng minh z có thể tách thành $z=rs$ sao cho $a \vdots r$ và $b \vdots s$.

*Đặt $r=(a,z)$ và $s=(b,z)$.

- Theo định nghĩa $a \vdots r$, $b \vdots s$. Nhưng $(a,b)=1$, nên $(r,s)=1$.
- Tương tự $z \vdots r,s$. Kết hợp với điều chứng minh ở trên, ta có $z \vdots rs$.
- Mặt khác, đặt $a=kr$, $b=ls$ và $z=q(rs)$, ta có $klrs \vdots qrs$, nên $kl \vdots q$. Ta cũng có $(a,z)=r$, nên $(k,qs)=1$.

  Như vậy $kl \vdots q$ và $(k,q)=1$. Chứng minh tương tự, ta có $(l,q)=1$. Từ đó $q=1$, và $z=rs$.

Tóm tắt lại, ta có $a=kr$, $b=ls$ và $z=rs$.

*Thế vào $a+b=\frac{dab}{z}$, ta có

$$kr+ls=dkl$$

Để ý $(a,b)=1$ nên $(k,ls)=1$. Mặt khác, $ls=dkl-kr \vdots k$, cho nên $k=1$. Chứng minh tương tự, ta có $l=1$, nên $ab=rs=z$, và $a+b=\frac{dab}{z}=d$. Từ đó $x+y=d(a+b)=d^2$ là một số chính phương. □

Bài 11. *Giải phương trình nghiệm nguyên sau (theo các biến x,y,n,m) với $m,n \geq 0$.*

$$x^n+y^n=2^m$$

Chứng minh. Đặt $d=(x,y)>0$ và $x=du, y=dv$, ta có u,v nguyên tố cùng nhau và $d^n(u^n+v^n)=2^m$. Như vậy $d=2^e$ $(0 \leq e \leq \frac{m}{n})$. Đặt $k=2^{m-ne}$, ta xét phương trình sau (với u,v nguyên tố cùng nhau).

$$u^n+v^n=2^k$$

a) Nếu n chẵn:
   (a) Nếu $n = 0$: phương trình gốc trở thành $2^m = 2$, nên $m = 1$. Ta nhận bộ nghiệm $(x, y, 0, 1)$ với mọi $x, y \neq 0$.
   (b) Nếu $n \geq 2$:
      i. Nếu $k = 0$: ta có $u^n + v^n = 1$. Nhưng n chẵn, nên phương trình chỉ có 4 nghiệm $(0, \pm 1)$ và $(\pm 1, 0)$. Ta nhận bộ

$$\boxed{(x, y, m, n) = (\pm 2^e, 0, ne, n), (0, \pm 2^e, ne, n) \quad (n \text{ chẵn})}$$

      ii. Nếu $k \geq 1$: ta có $u^n + v^n$ chẵn. Kết hợp với u, v nguyên tố cùng nhau, ta được u, v cùng lẻ. Xét modulo 4, ta có $2^k = u^n + v^n \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$. Nói cách khác $k = 1$ và $u^n + v^n = 2$, hay $u, v = \pm 1$. Ta nhận bộ

$$\boxed{(x, y, m, n) = (\pm 2^e, \pm 2^e, ne + 1, n) \quad (n \text{ chẵn})}$$

b) Nếu n lẻ: ta có $2^k = (u + v)(u^{n-1} - u^{n-2}v + \cdots + v^{n-1})$, nên $u + v = 2^s$ với $s \geq 0$.
   (a) Nếu $n = 1$: ta có $u + v = 2^k$, nên ta nhận các bộ sau

$$\boxed{(x, y, m, n) = (u, 2^m - u, m, 1) \quad (u \text{ nguyên bất kỳ})}$$

   (b) Nếu $n \geq 3$:
      i. Nếu $k = 0$: ta có $u^n + v^n = 1$. Nhưng $u^n + v^n = (u + v)(u^{n-1} - u^{n-2}v + \cdots - uv^{n-2} + v^{n-1})$, cho nên $u + v = \pm 1$.

      *Với $v = 1 - u$, ta xét phương trình sau

$$u^n - (u-1)^n = 1$$

      Ta có $u = 0, 1$ là nghiệm, cho nên ta nhận các bộ sau

$$\boxed{(x, y, m, n) = (2^e, 0, ne, n), (0, 2^e, ne, n) \quad (n \text{ lẻ})}$$

      Nếu $u \geq 2$, ta chứng minh

$$u^n - (u-1)^n > 1$$

      với mọi $n \geq 2$ bằng quy nạp. Khi $n = 2$, ta có $u^2 - (u-1)^2 = 2u - 1 \geq 3 > 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n + 1$

$$\begin{aligned} u^{n+1} - (u-1)^{n+1} &= u^n + (u-1)u^n - (u-1)^{n+1} \\ &= u^n + (u-1)[u^n - (u-1)^n] \\ &\geq 2^n + (2-1) \cdot 1 > 1 \end{aligned}$$

      Nếu $u \leq -1$, ta cũng chứng minh $u^n - (u-1)^n = (1-u)^n - (-u)^n > 1$ với mọi $n \geq 2$ bằng quy nạp. Khi $n = 2$, ta có $(1-u)^n - (-u)^n =$

$-2u+1>1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n+1$

$$\begin{aligned}(1-u)^{n+1}-(-u)^{n+1} &= (1+w)^{n+1}-w^{n+1} \qquad (\text{đặt } w=-u\geq 1)\\ &= w(w+1)^n+(w+1)^n-w^{n+1}\\ &= (w+1)^n+w[(w+1)^n-w^n]\\ &\geq 2^n+1\cdot 1>1\end{aligned}$$

*Với $v=-1-u$, ta xét phương trình sau

$$u^n-(u+1)^n=1 \Leftrightarrow (u+1)^n-u^n=-1$$

Dùng những bất đẳng thức ta đã chứng minh ở trên, cộng với trường hợp $u=0,1$ không thỏa, ta kết luận trường hợp này vô nghiệm.

ii. Nếu $k\geq 1$: ta có u^n+v^n chẵn, và u,v nguyên tố cùng nhau, nên u,v cùng lẻ. Như vậy

$$u^{n-1}-u^{n-2}v+\cdots-v^{n-1}\equiv \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ số } 1}\equiv n\equiv 1 \pmod 2$$

Kết hợp với $(u+v)(u^{n-1}-u^{n-2}v+\cdots+v^{n-1})=2^k$, ta phải có

$$\begin{cases}u+v=2^k \qquad (k\geq 1)\\ u^{n-1}-u^{n-2}v+\cdots+v^{n-1}=1\end{cases}$$

Để ý $u^n+v^n=2^k=u+v$, ta sẽ chứng minh

- $(u^n-v^n)(u-v)\geq 0$ với mọi u,v và n lẻ bằng quy nạp lên n. Trường hợp $n=1$ chính là $(u-v)^2\geq 0$, còn $n=3$ là $(u^3-v^3)(u-v)=(u-v)^2(u^2+uv+v^2)\geq 0$. Giả sử nó đúng với $n-2$ và n, ta chứng minh nó cũng đúng với $n+2$

$$\begin{aligned}(u^{n+2}-v^{n+2})(u-v) &= (u^{n+2}-u^2v^n+u^2v^n-u^nv^2+u^nv^2-v^{n+2})(u-v)\\ &= u^2(u^n-v^n)(u-v)+u^2v^2(u^{n-2}-v^{n-2})(u-v)\\ &\quad +v^2(u^n-v^n)(u-v)\geq 0\end{aligned}$$

- $2(u^n+v^n)\geq (u^2+v^2)(u^{n-2}+v^{n-2})$ với mọi u,v và $n\geq 3$ lẻ. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$u^n+v^n-u^2v^{n-2}-v^2u^{n-2}\geq 0 \Leftrightarrow (u^{n-2}-v^{n-2})(u-v)\geq 0$$

  Đúng theo bất đẳng thức ta đã chứng minh ở trên.

Áp dụng vào bài toán, ta có $u+v=u^n+v^n\geq \frac{u^2+v^2}{2}\cdot(u^{n-2}+v^{n-2})\geq\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2\cdot(u^{n-4}+v^{n-4})\geq\cdots\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^{(n-1)/2}(u+v)$. Nhưng $u+v=2^k\geq 2^1>1$, nên

$$\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^{(n-1)/2}\leq 1 \Leftrightarrow u^2+v^2\leq 2$$

Xét các giá trị $u, v = 0, \pm 1$ thỏa mãn điều kiện trên, ta được các cặp $(u,v) = (0,0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$. Thử vào $u + v = u^n + v^n = 2^k$ (với $2^k \geq 2^1 = 2$), ta chỉ có đúng $u = v = 1$ và $k = 1$ thỏa. Ta nhận các bộ

$$\boxed{(x,y,m,n) = (2^e, 2^e, ne+1, n) \quad (n \geq 3 \text{ lẻ})}$$

Tổng hợp các trường hợp lại, ta kết luận các nghiệm (x,y,m,n) như sau

a) $(2^e, 0, ne, n)$, $(0, 2^e, ne, n)$, và $(2^e, 2^e, ne+1, n)$ $(e, n \geq 0)$.
b) $(-2^e, 0, ne, n)$, $(0, -2^e, ne, n)$, và $(\pm 2^e, \pm 2^e, ne+1, n)$ $(e, n \geq 0$, n chẵn$)$.
c) $(u, 2^m - u, m, 1)$ $(u \in \mathbb{Z}, m \geq 0)$

□

Bài 12. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z sao cho*

$$16xyz = d(x+y+z)^2$$

với d là ước chung của x, y, z

Chứng minh. Đặt $x = da, y = db, z = dc$, ta có $(a,b,c) = 1$. Phương trình tương đương với $16abc = (a+b+c)^2$.

*Gọi p^{2k+1} là một ước của a, p nguyên tố. Ta sẽ chứng minh p^{2k+2} cũng là ước của a.

a) Nếu $p = 2$: đặt $a = 2^{2k+1}u$, ta có

$$2^{2k+5}ubc = (2^{2k+1}u + b + c)^2$$

Nếu b chẵn thì c cũng phải chẵn (và ngược lại), nhưng điều này mâu thuẫn với a, b, c nguyên tố cùng nhau. Như vậy b, c phải lẻ. Để ý vế trái là bội của 2^{2k+5} (mũ lẻ), nên $Q^2 \vdots 2^{2k+5}$ $(Q = 2^{2k+1}u + b + c)$. Nói cách khác, $Q \vdots 2^{k+3}$ hay $Q = 2^{k+3}R$. Từ đó

$$2^{2k+5}ubc = Q^2 = 2^{2k+6}R^2$$

nên $2^{2k+5}ubc \vdots 2^{2k+6}$. Nhưng b, c lẻ, nên ta có $u \vdots 2$. Như vậy $a = 2^{2k+1}u \vdots 2^{2k+2}$.

b) Nếu $p > 2$: lập luận tương tự như trên, ta đặt $Q = a + b + c$ và $a = p^{2k+1}u$. Phương trình tương đương với

$$Q^2 = 16p^{2k+1}ubc \vdots p^{2k+1}$$

hay $Q \vdots p^{k+2}$. Ta có $16p^{2k+1}ubc = Q^2 \vdots p^{2k+2}$. Nhưng $p > 2$, nên $ubc \vdots p$.

Giả sử, không mất tính tổng quát $b \vdots p$. Khi đó $(a+b+c)^2 = 16abc \vdots p$, nên $a + b + c \vdots p$. Nhưng $a \vdots p$, nên $c \vdots p$. Ta có điều vô lý do a, b, c nguyên tố cùng nhau. Như vậy $u \vdots p$, nên $a = p^{2k+1}u \vdots p^{2k+2}$.

Như vậy nếu $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ là phân tích thừa số nguyên tố, các số mũ α_i phải chẵn (nếu α_i lẻ thì $p_i^{\alpha_i+1}$ cũng là ước của a, vô lý). Cùng với $a > 0$, ta kết luận a là số chính phương. Chứng minh tương tự, b, c cũng chính phương.

*Đặt tiếp $a = u^2, b = v^2, c = w^2$ $(u, v, w > 0)$, ta có phương trình

$$16u^2v^2w^2 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 + w^2 = 4uvw$$

Do a, b, c nguyên tố cùng nhau, u, v, w cũng phải nguyên tố cùng nhau. Mặt khác, xét modulo 4 cho cả 2 vế, ta có $u^2 + v^2 + w^2 \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$, với $u^2 + v^2 + w^2 \equiv 0 \pmod 4$ khi và chỉ khi $u^2, v^2, w^2 \equiv 0 \pmod 4$. Như vậy u, v, w đều chẵn, vô lý.

Ta kết luận phương trình vô nghiệm. $\square$

Phương trình nghiệm nguyên dạng lũy thừa

Nguyễn Thái Hưng
(SV Đại học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh)

1. Một số chú ý khi giải phương trình dạng lũy thừa

Phân tích. *Để giải phương trình nghiệm nguyên dạng lũy thừa ta chú ý một số phương pháp thường sử dụng*

- *Sử dụng đồng dư để xét tính chẵn lẻ, hay modun của nghiệm.*
- *Phân tích thành thừa số.*
- *Đánh giá bất đẳng thức.*

Do sử dụng nhiều đồng dư, do đó ta chú ý một số tính chất về đồng dư sau

Tính chất 1. *Cho a là một số nguyên tùy ý. Khi đó*

a) $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$;
b) $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$;
c) $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$;
d) $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$;
e) $a^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod{7}$;
f) $a^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod{9}$.

Tính chất 2. *Cho p là một số nguyên tố và a, b, c, n là các số nguyên dương. Ta có*

a) $a^n \vdots p \Leftrightarrow a \vdots p$;

b) Nếu $ab = p^n$ thì $\begin{cases} a = p^k \\ b = p^{n-k} \end{cases}$ với $k \in \mathbb{N}$ thỏa $0 \leq k \leq n$;

c) Nếu $ab = c^n$ và $(a, b) = 1$ thì $a = s^n$ và $b = r^n$ với $s, r \in \mathbb{N}$.

2. Bài tập có lời giải

Ví dụ 6.1. *Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3+1=4y^2$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3+1=4y^2$. Ta có

$$x^3=4y^2-1=(2y-1)(2y+1). \tag{6.1}$$

Đặt $d=(2y-1, 2y+1)$, ta có d lẻ và $\begin{cases} d \mid 2y-1 \\ d \mid 2y+1 \end{cases}$.

Do đó $d \mid 2$, suy ra $d=1$ (vì d lẻ). Như vậy $2y-1$ và $2y+1$ nguyên tố cùng nhau.
Kết hợp với (6.1) ta suy ra $2y-1=a^3$ và $2y+1=b^3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.
Dẫn đến $b^3-a^3=2$ hay $(b-a)(b^2+ba+a^2)=2$. Từ đó ta được $b=1$ và $a=-1$, suy ra $y=0$ và khi đó $x=-1$. Thử lại thỏa.
Vậy $(x, y)=(-1, 0)$. □

Ví dụ 6.2. *Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5+2023x=5^y+2$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn $x^5+2023x=5^y+2$.

Vì 5^y+2 lẻ nên x lẻ, do đó $x^5+2023x=x(x^4+2023) \vdots 4$ (vì x lẻ nên $x \equiv 1 \pmod 4$).
Tuy nhiên $x^5+2023x=5^y+2 \equiv 1^y+2 \equiv 3 \pmod 4$ (Vô lí).
Vậy không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn $x^5+2023x=5^y+2$. □

Ví dụ 6.3. *Tìm các số nguyên x và y sao cho $3^x-y^3=1$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên x và y sao cho $3^x-y^3=1$. Nhận xét $x \geq 0$.

Ta có $3^x=y^3-1=(y+1)(y^2-y+1)$, suy ra $\begin{cases} y+1=3^t \\ y^2-y+1=3^{x-t} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{N},\ t \leq x)$.

Khi đó $y=3^t-1$ và

$$(3^t-1)^2-(3^t-1)+1=3^{x-t} \Leftrightarrow 3^{2t}-3^{t+1}+3=3^{x-t}. \tag{6.2}$$

- Nếu $t=0$, từ (6.2) ta được $1=3^x$ hay $x=0$. Ngoài ra $y=3^0-1=2$.
  Thử lại ta nhận $x=0$ và $y=2$.
- Nếu $t \geq 1$, giả sử $x-t \geq 2$, khi đó $3^{x-t} \vdots 9$. Từ (6.2) ta có $3^{2t} \vdots 9$ và $3^{t+1} \vdots 9$ (do $t \geq 1$), từ đó suy ra $3 \vdots 9$ (Vô lí).
  Do đó $x-t \in \{0, 1\}$.
  - Nếu $x-t=0$ thì $y^2-y+1=1 \Leftrightarrow y(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$.
    Với $y=0$ ta tìm được $x=0$ và với $y=1$ ta có $3^x=2$ (Vô lí).
  - Nếu $x-t=1$ thì $y^2-y+1=3 \Leftrightarrow y^2-y-2=0 \Rightarrow y=2$.
    Khi đó $3^x=2^3+1=9$, dẫn đến $x=2$.

  Vậy $(x, y)=(0, 0)$ hoặc $(x, y)=(2, 1)$.

□

Ví dụ 6.4. *Tìm các số nguyên dương x và y sao cho*

$$9^x - 7^x = 2^y.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho $9^x - 7^x = 2^y$.
Nếu x lẻ thì

$$9^x - 7^x \equiv 1^x - (-1)^x \equiv 2 \pmod 8.$$

Do đó $2^y \equiv 2 \pmod 8$, suy ra $y = 1$. Khi đó $9^x - 7^x = 2 \Rightarrow x = 1$.
Nếu x chẵn, đặt $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), ta được

$$2^y = 9^{2k} - 7^{2k} = (9^k - 7^k)(9^k + 7^k).$$

Suy ra

$$\begin{cases} 9^k - 7^k = 2^t \\ 9^k + 7^k = 2^{y-t} \end{cases}$$

với $t \in \mathbb{N}^*$ và $t \le y$.

- Nếu k lẻ, khi đó $2^t \equiv 9^k - 7^k \equiv 2 \pmod 8$, do đó $t = 2$ và $k = 1$.
  Dẫn đến $x = 2$ và $2^y = 81 - 49 = 32 \Rightarrow y = 5$.
- Nếu k chẵn, ta có
  $$9^k + 7^k \equiv 1^k + (-1)^k \equiv 2 \pmod 8.$$
  Do đó $2^{y-t} \equiv 2 \pmod 8$, suy ra $y - t = 1$. Như vậy $9^k + 7^k = 2$ (Vô lí).

Vậy $(x, y) = (1, 1)$ hoặc $(x, y) = (2, 5)$. □

Ví dụ 6.5. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho luôn tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn*

$$p^n = x^3 + y^3.$$

Lời giải. Đặt $x = p^t x_1$ và $y = p^s y_1$ ($x_1, y_1, s, t \in \mathbb{N}$ và $x_1, y_1 \not\vdots\, p$).
Ta có

$$p^n = p^{3t}x_1^3 + p^{3s}y_1^3 > p^{3t} \Rightarrow n > 3t.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $t \ge s$.

Nếu $t > s$ thì $p^{n-3s} = p^{3(t-s)}x_1^3 + y_1^3 \,\vdots\, p \Rightarrow y_1^3 \,\vdots\, p$ (Vô lí).
Vậy $t = s$, do đó $p^{n-3t} = x_1^3 + y_1^3 = (x_1 + y_1)(x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2)$.

- Nếu $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = 1$ thì $x_1 = y_1 = 1$.
  Khi đó $p^{n-3t} = 2 \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ n - 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ n = 3t + 1 \end{cases}.$
  Lúc này ta được $x = y = 2^t$. Thử lại thỏa.

- Nếu $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 > 1$, ta được

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = p^k \\ x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = p^{n-3t-k} \end{cases}$$

  với $k \geq 1$, $n - 3t - k \geq 1$.

  Do đó $(x_1 + y_1)^2 - (x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2) = 3x_1y_1 \vdots p \Rightarrow 3 \vdots p \Rightarrow p = 3$.

  Ngoài ra, nếu $n - 3t - k \geq 2$ thì $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = (x_1 + y_1)^2 - 3x_1y_1 \vdots 3^2$, mà $(x_1 + y_1)^2 \vdots 3^2$ nên $3x_1y_1 \vdots 3^2 \Rightarrow x_1y_1 \vdots 3$ (Vô lí).
  Vậy $n - 3t - k = 1$ hay $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = 3$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \geq y_1$ thì ta được $x_1 = 2$ và $y_1 = 1$.
  Từ đây ta được $n - 3t = 2 \Leftrightarrow n = 3t + 2$ và $x = 2 \cdot 3^t$ và $y = 3^t$.
  Thử lại thỏa.

Vậy $p = 2$ và $p = 3$ là các số nguyên tố cần tìm. □

Ví dụ 6.6. *Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình*

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

Ta có

$$\begin{aligned}(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) &= (4^x + 5 \cdot 2^x + 4)(4^x + 5 \cdot 2^x + 6) \\ &= (4^x + 5 \cdot 2^x + 5)^2 - 1.\end{aligned}$$

Do đó $(4^x + 5 \cdot 2^x + 5)^2 - 1 - 5^y = 11879 \Leftrightarrow (4^x + 5 \cdot 2^x + 5)^2 - 5^y = 11880$.

Nếu $y \geq 1$ thì ta suy ra $4^x + 5 \cdot 2^x + 5 \vdots 5 \Rightarrow 4^x \vdots 5$. (Vô lí)
Do đó $y = 0$, khi đó

$$(4^x + 5 \cdot 2^x + 5)^2 = 11881 \Rightarrow 4^x + 5 \cdot 2^x + 5 = 109 \Leftrightarrow 4^x + 5 \cdot 2^x - 104 = 0.$$

Suy ra $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.
Vậy $x = 3$ và $y = 0$. □

Ví dụ 6.7. *Cho $M = a^2 + 3a + 1$ với a là số nguyên dương.*

a) Chứng minh rằng mọi ước của M đều là số lẻ.

b) Tìm các giá trị của a để M là lũy thừa của 5.

Lời giải.

a) Ta có $a^2 + 3a + 1 = a(a + 3) + 1$ là số lẻ. Do đó mọi ước của M đều là số lẻ.

b) Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a^2+3a+1=5^n$. Khi đó

$$a^2+3a-4=5^n-5 \Leftrightarrow (a+4)(a-1)=5(5^{n-1}-1).$$

Nếu $n>1$ thì $5^{n-1}-1>0$.

Ta lại có $(a+4)(a-1) \vdots 5$ và $a+4-(a-1)=5$ nên $\begin{cases} a+4 \vdots 5 \\ a-1 \vdots 5 \end{cases}$.

Do đó $(a+4)(a-1) \vdots 25 \Rightarrow 5(5^{n-1}-1) \vdots 25 \Rightarrow 5^{n-1}-1 \vdots 5$. (Vô lí)
Vậy $n=1$ hay $a^2+3a+1=5 \Rightarrow a=1$.
Thử lại thỏa, vậy M là lũy thừa của 5 khi và chỉ khi $a=1$.

□

Ví dụ 6.8. *Tìm số tự nhiên n sao cho 8^n+47 là số nguyên tố.*

Lời giải. Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $p=8^n+47$ là số nguyên tố. Khi đó $p>47$, ta xét các trường hợp sau:

- Xét $n=2k$ $(k \in \mathbb{N})$, khi đó

$$p^n \equiv 8^n+47 \equiv (-1)^{2k}+47 \equiv 48 \equiv 0 \pmod 3.$$

  Do đó $p \vdots 3$ nên p không là số nguyên tố (Vô lí).
- Xét $n=4k+1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, khi đó

$$p \equiv (8^4)^k \cdot 8+47 \equiv 8+47 \equiv 55 \equiv 0 \pmod 5.$$

  Do đó $p \vdots 5$ nên p không là số nguyên tố (Vô lí).
- Nếu $n=4k+3$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, khi đó

$$p \equiv (8^4)^k \cdot 8^3+47 \equiv 8^3+47 \equiv 559 \equiv 0 \pmod{13}.$$

  Do đó $p \vdots 13$ nên p không là số nguyên tố (Vô lí).

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để 8^n+47 là số nguyên tố. □

Ví dụ 6.9. *Cho phương trình $2^x+5^y=k^2$ (x, y, k là các số nguyên dương).*
a) Chứng minh rằng phương trình trên vô nghiệm khi y chẵn.
b) Tìm k để phương trình có nghiệm.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán PTNK 2022)

Lời giải.

a) Giả sử tồn tại $y \in \mathbb{N}^*$ chẵn để phương trình trên có nghiệm.
   - Với $x=1$ thì $2+5^y=k^2 \equiv 2 \pmod 5$.
     Điều này vô lý vì $k^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

- Với $x > 1$, do y chẵn nên ta đặt $y = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$.
  Khi đó
  $$2^x + 5^{2m} = k^2 \Leftrightarrow 2^x = (k - 5^m)(k + 5^m) \Rightarrow \begin{cases} k - 5^m = 2^t \\ k + 5^m = 2^{x-t} \end{cases} \ (t \geq 0).$$
  Vì $k + 5^m > k - 5^m$ nên $x - t > t$, suy ra $k = 2^{t-1} + 2^{x-t-1}$.
  Ta thấy nếu $t = 0$ thì $k = \dfrac{1}{2} + 2^{x-1} \notin \mathbb{N}$. Do đó $t \geq 1$.
  Mặt khác k lẻ và $t - 1 < x - t - 1$ nên $2^{t-1} = 1 \Rightarrow t = 1$.
  Khi đó $k - 5^m = 2 \Leftrightarrow k = 2 + 5^m$. Thay vào $2^x + 5^{2m} = k^2$, ta được
  $$2^x + 5^{2m} = (2 + 5^m)^2 \Leftrightarrow 2^x = 4 + 2 \cdot 5^m.$$
  Vì $x > 1$ nên $2^x \vdots 4$, suy ra $2 \cdot 5^m \vdots 4$ (Vô lí).
  Vậy phương trình vô nghiệm khi y chẵn.

b) Giả sử phương trình có nghiệm, khi đó y lẻ.
  - Nếu $x = 4z + 1$ $(z \in \mathbb{N})$ thì
    $$k^2 \equiv 2^x + 5^y \equiv 2^{4z} \cdot 2 + 5^y \equiv 2 \pmod 5.$$
    Điều này vô lý vì $k^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.
  - Nếu $x = 4z + 3$ $(z \in \mathbb{N})$ thì
    $$k^2 \equiv 2^{4z} \cdot 2^3 + 5^y \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5 \ \text{(Vô lí)}.$$

  Vậy x chẵn, đặt $x = 2t$ $(t \in \mathbb{N}^*)$.
  Ta có
  $$2^x + 5^y = k^2 \Leftrightarrow 5^y = (k - 2^t)(k + 2^t) \Rightarrow \begin{cases} k - 2^t = 5^s \\ k + 2^t = 5^{y-s} \end{cases} \ (s \in \mathbb{N}).$$
  Nếu $s > 0$ thì $5^{y-s} - 5^s \vdots 5$ nên $2^{t+1} \vdots 5$ (vô lý). Do đó $s = 0$.
  Khi đó $\begin{cases} k = 1 + 2^t \\ k = 5^y - 2^t \end{cases}$. Suy ra $1 + 2^t = 5^y - 2^t \Rightarrow 5^y - 1 = 2^{t+1}$.
  Nếu $t > 1$ thì $2^{t+1} \vdots 8$. Đặt $y = 2l + 1$, khi đó
  $$2^{t+1} = 5^y - 1 = 25^l \cdot 5 - 1 \equiv 5 - 1 \equiv 4 \pmod 8 \ \text{(vô lý)}.$$
  Vậy $t = 1$, suy ra $k = 3$. Với $k = 3$, ta tìm được $x = 2$ và $y = 1$.
  Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $k = 3$.

□

Ví dụ 6.10. *Cho k là số nguyên dương và $a = 3k^2 + 3k + 1$.*

a) *Chứng minh rằng $2a$ và a^2 là tổng của ba số chính phương.*

b) *Chứng minh rằng nếu a là ước của số nguyên b và b bằng tổng của ba số chính phương thì bất kì lũy thừa với số mũ nguyên dương nào của b cũng là tổng của ba số chính phương.*

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}2a = 6k^2 + 6k + 2 &= k^2 + (k^2 + 2k + 1) + (4k^2 + 4k + 1)\\ &= k^2 + (k+1)^2 + (2k+1)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2 &= \left(3k^2 + 3k - 1 + 2\right)^2 = 9k^4 + 18k^3 + 15k^2 + 6k + 1\\ &= (4k^4 + 12k^3 + 13k^2 + 6k + 1) + (4k^4 + 4k^3 + k^2) + (k^4 + 2k^3 + k^2)\\ &= (2k^2 + 3k + 1)^2 + (2k^2 + k)^2 + (k^2 + k)^2.\end{aligned}$$

b) Đặt $a^2 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$ với $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$.
Đặt $b = ca$ với c là số nguyên dương, do b bằng tổng của ba số chính phương nên $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ với b_1, b_2, b_3 là các số nguyên.
Xét số nguyên dương n bất kì, khi đó

- Nếu $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ thì

$$\begin{aligned}b^n &= c^{2k}a^{2k} = (c^k a^{k-1})^2 a^2\\ &= (c^k a^{k-1})^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\\ &= (c^k a^{k-1}a_1)^2 + (c^k a^{k-1}a_2)^2 + (c^k a^{k-1}a_3)^2.\end{aligned}$$

- Nếu $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì

$$b^n = (b^k)^2 \cdot b = (b^k)^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b^k b_1)^2 + (b^k b_2)^2 + (b^k b_3)^2.$$

Hoàn tất chứng minh.

□

3. Các bài tập rèn luyện

Bài 1. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 2011^y.$$

Bài 2. *Tìm tập nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$8^x + 15^y = 17^z.$$

Bài 3. *Tìm các số nguyên dương $x, y, z > 1$ thỏa mãn*

$$(x+1)^y - x^z = 1.$$

Bài 4. *Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $5^x - 3^y = 2$.*

Bài 5. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$2^x \cdot 3^y + 5^z = 7^t.$$

Bài 6. *Cho các số nguyên dương $m, n \geq 2$. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$x^n + y^n = 3^m.$$

Bài 7. *Cho p là một số nguyên tố và a, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $2^p + 3^p = a^n$ thì $n = 1$.*

Bài 8. *Chứng minh rằng tích của ba số nguyên liên tiếp không thể là lũy thừa với số mũ lớn hơn 1 của một số nguyên.*

Bài 9. *Cho phương trình $3x^2 - y^2 = 23^n$ với n là số tự nhiên.*

a) *Chứng minh nếu n chẵn thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên (x, y).*

b) *Chứng minh nếu n lẻ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên (x, y).*

Bài 10.

a) *Cho m là số nguyên. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 4m = 0$ thì cũng tồn tại các số nguyên a', b', c' sao cho $a' + b' + c' = 0$ và $a'b' + b'c' + a'c' + m = 0$.*

b) *Với k là số nguyên dương, chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 2^k = 0$.*

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán PTNK 2015)

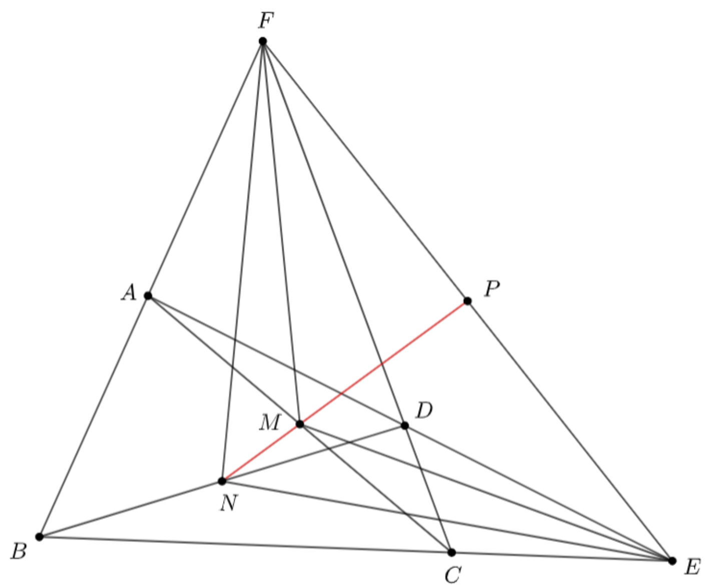
Bài tập hình học ôn thi vào 10 chuyên toán

Võ Hoàng Thành
(Sinh viên trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh)

1. Một số ví dụ

Ví dụ 7.1. *Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử E, F lần lượt là giao điểm của các cặp cạnh AD và BC, AB và CD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BD, EF. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.*

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}
S_{FMN} &= S_{FBC} - S_{FBN} - S_{BNC} - S_{CMN} - S_{FMC}\\
&= S_{FBC} - \frac{1}{2}S_{FBD} - \frac{1}{2}S_{BCD} - \frac{1}{2}S_{CNA} - \frac{1}{2}S_{FAC}\\
&= S_{FBC} - \frac{1}{2}(S_{FBD} + S_{BCD} + S_{CNA} + S_{FAC})\\
&= S_{FBC} - \frac{1}{2}(S_{FBC} + S_{ABC} - S_{ABN} - S_{BNC} + S_{FAC})\\
&= S_{FBC} - \frac{1}{2}(S_{FBC} + S_{FBC} - S_{ABN} - S_{BNC})\\
&= \frac{1}{2}(S_{ABN} + SBNC) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta được $S_{EMN} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = S_{FMN}$. Từ đây suy ra khoảng cách từ E, F đến đường thẳng MN bằng nhau, nên MN đi qua trung điểm của EF, hay M, N, P thẳng hàng. □

Phân tích. *Kết luận cuối cùng cần thêm điều kiện E, F khác phía đối với đường thẳng MN. Có nhiều cách chứng minh định lý này như sử dụng định lý Menelaus. Ở đây trình bày một cách sử dụng diện tích tam giác. Đây là một hướng giải có nhiều ứng dụng trong các bài toán so sánh các số đo (độ dài, diện tích, ...), ví dụ trong lời giải trên là so sánh khoảng cách của hai điểm đến một đường thẳng.*

Ví dụ 7.2. *(HSG cấp Tỉnh Quảng Ngãi 2023) Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di động trên đoạn OA (M khác A), vẽ đường tròn tâm K đường kính MB. Gọi I là trung điểm của đoạn MA, đường thẳng đi qua I vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại C và D. Đường thẳng CB cắt đường tròn (K) tịa P.*

a) *Chứng minh rằng ba điểm P, M, D thẳng hàng.*
b) *Chứng minh rằng PI là tiếp tuyến của đường tròn (K).*
c) *Tìm vị trí của M trên đoạn OA để diện tích tam giác IPK lớn nhất.*

Lời giải.

a) Ta có AM cắt CD tại trung điểm của mỗi đoạn thẳng và $AM \perp CD$ nên $ACMD$ là hình thoi. Suy ra $AC \parallel DM$, mà $AC \perp CB$ nên $DM \perp BC$. Ta cũng có $MP \perp PC$, từ đây ta thu được D, M, P thẳng hàng.

b) Ta có $\triangle PCD \backsim \triangle PMB$ và I, K lần lượt là trung điểm của CD, MB nên suy ra được $\triangle PID \backsim \triangle PKC$, do đó $\angle IPD = \angle KPB$. Biến đổi góc

$$\angle IPK = \angle IPD + \angle DPK = \angle KPB + \angle MPK = \angle MPB = 90^\circ.$$

Vậy IP là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) Gọi E là hình chiếu vuông góc của P lên AB. Do $AC \parallel PM$ và $CI \parallel PE$, ta có

$$\frac{PE}{CI} = \frac{PB}{CB} = \frac{MB}{AB}.$$

Đặt $AI = MI = x$ $(0 < x \leq R)$. Ta tính được $BI = 2R - x, MB = 2R - 2x, IK = R$ và $CI = \sqrt{IA \cdot IB} = \sqrt{x(2R - x)}$. Suy ra

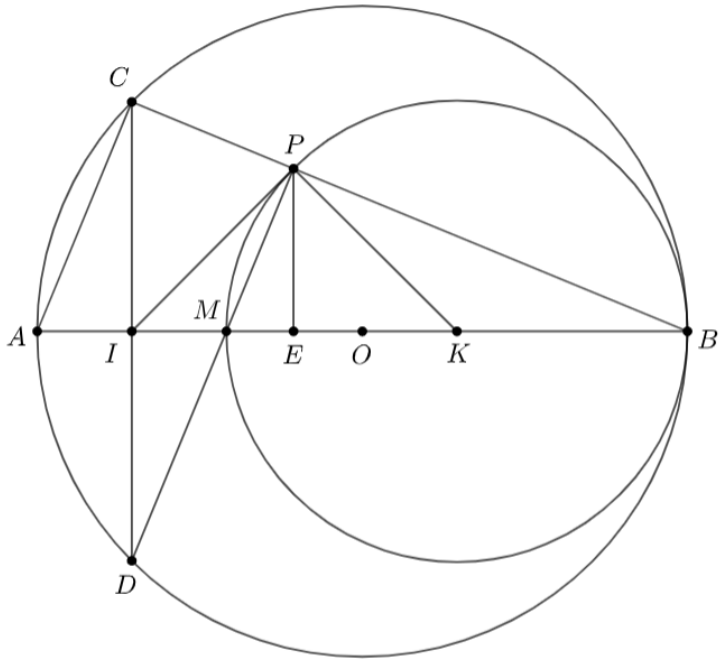
$$PE = \frac{CI \cdot MB}{AB} = \frac{(2R - 2x)\sqrt{x(2R - x)}}{2R} = \frac{(R - x)\sqrt{R^2 - (R - x)^2}}{R},$$

do đó

$$S_{IPK} = \frac{1}{2}IK \cdot PE = \frac{1}{2}R \cdot \frac{(R-x)\sqrt{R^2-(R-x)^2}}{R}$$
$$= \frac{(R-x)\sqrt{R^2-(R-x)^2}}{2} \le \frac{(R-x)^2+R^2-(R-x)^2}{4} = \frac{R^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(R-x)^2 = R^2-(R-x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}(R-x) = R \Leftrightarrow x = \frac{R(2-\sqrt{2})}{2}$.

Vậy khi M nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = R(2-\sqrt{2})$ thì diện tích tam giác IPK lớn nhất.



□

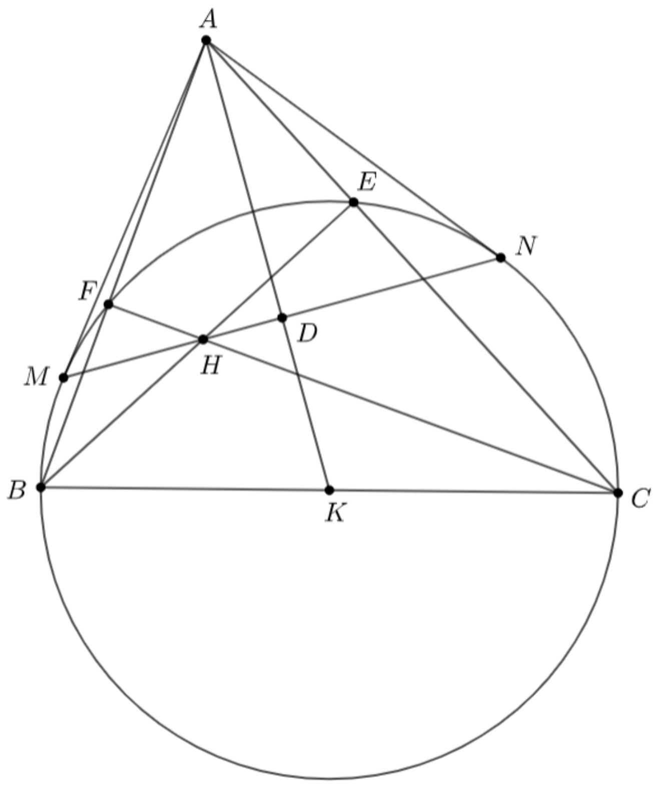
Phân tích. *Đây là một bài toán không quá khó. Một ý tưởng khá hữu dụng để giải quyết bài toán cực trị hình học chính là đặt một đại lượng thay đổi là x, sau đó đưa về một bài thuần bất đẳng thức đại số. Lúc này ta sẽ dễ sử dụng linh hoạt các kết quả như bất đẳng thức AM-GM, BCS, ... hơn.*

Ví dụ 7.3. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ đường tròn tâm K đường kính BC, cắt cạnh AB và AC lần lượt tại điểm F và E. Gọi H là giao điểm của BE và CF.*

a) Chứng minh: $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

b) Từ A vẽ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (K) (với M, N là hai tiếp điểm; N thuộc cung EC). Chứng minh: ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Lời giải.



a) Do tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\angle FBE = \angle FCE$, kéo theo $\triangle ABE \backsim \triangle ACF$. Suy ra
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AB \cdot AF = AC \cdot AE.$$

b) Gọi H là giao điểm của BE và CF. AK cắt MN tại D.
Ta có $AD \cdot AK = AN^2 = AE \cdot AC = \angle AF \cdot AB$ nên các tứ giác $BFDK, CEDK$ nội tiếp. Biến đổi góc
$$\begin{aligned}\angle FDE &= \angle FDA + \angle EDA = \angle ABK + \angle ACK\\ &= 90^\circ - \angle FCB + 90^\circ - \angle EBC\\ &= 180^\circ - (\angle HBC + \angle HCB) = \angle BHC = \angle FHE.\end{aligned}$$
Suy ra tứ giác $FHDE$ nội tiếp. Tương tự ta cũng có tứ giác $BHDC$ nội tiếp. Khi đó
$$\angle FDH = \angle FEH = \angle FEB = \angle FCB = \angle HCB = \angle HDB$$
nên DH là phân giác trong của $\angle FDB$. Mặt khác, tứ giác $FDKB$ nội tiếp có $FK = KB$ nên KD là phân giác ngoài của $\angle FDB$. Mà $DA \perp DM$ nên DM là phân giác trong của $\angle FDB$. Vậy nên D, H, M thẳng hàng, hay M, N, H thẳng hàng.

□

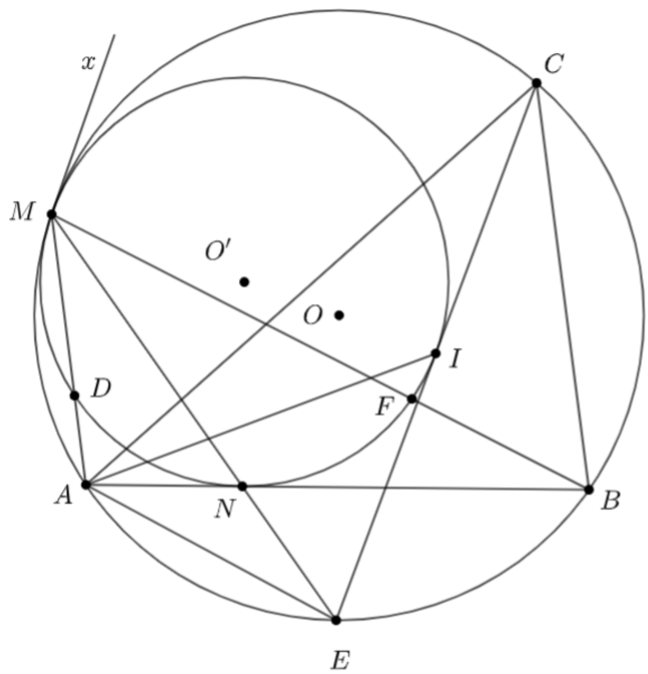
Phân tích.

a) *Ta có thể chứng minh KE, KF là các tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH và $KD \cdot KA = KM^2 = KE^2$ nên D nằm trên đường tròn đường kính AH, suy ra $HD \perp KA$. Từ đây thu được M, H, N cùng nằm trên đường thẳng qua D và vuông góc với AK.*

b) *Lời giải trên không cần K nằm trên BC, tức là lời giải vẫn đúng khi giả thiết chỉ có tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm K.*

Ví dụ 7.4. *Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc trong với O tại M và tiếp xúc với AB tại N. Gọi E là giao điểm thứ hai của MN và đường tròn (O). Tiếp tuyến EI của (O') (I là tiếp điểm) cắt lại (O) tại điểm thứ hai là C. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.*

Lời giải.



Kẻ tiếp tuyến chung Mx của hai đường tròn như hình vẽ. Gọi D, F lần lượt là giao điểm thứ hai của MA, MB và đường tròn (O'). Ta có: $\angle ADF = \angle xMC = \angle MAB$ nên $DF \parallel AB$.
Ta chứng minh được $AN^2 = AD \cdot AM$ và $BN^2 = BF \cdot BM$. Từ đây suy ra

$$\frac{AN^2}{BN^2} = \frac{AD \cdot AM}{BF \cdot BM} = \frac{AD}{BF} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{AM^2}{BM^2} \Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM},$$

nên suy ra MN là phân giác $\angle AMB$, do đó E là trung điểm cung AB. Ta suy ra được CI là phân giác $\angle ACB$.
Tam giác EAI cân tại E nên $\angle EAI = \angle EIA$. Biến đổi góc

$$\begin{aligned} 0^\circ &= \angle EAI - \angle EIA \\ &= \angle EAB + \angle IAB - (\angle IAC + \angle ACI) \\ &= (\angle IAB - \angle IAC) + (\angle EAB - \angle ACI) = \angle IAB - \angle IAC. \end{aligned}$$

Suy ra $\angle IAB = \angle IAC$, hay AI là phân giác $\angle CAB$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. □

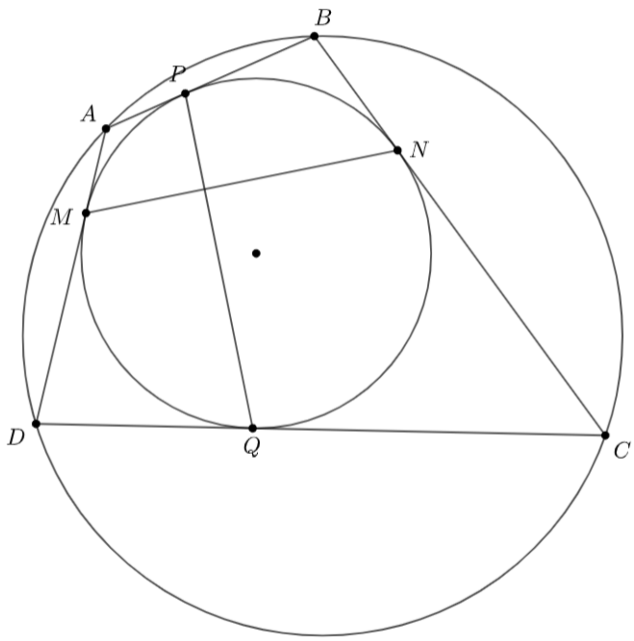
Phân tích. *Kết quả trên giúp để dựng tâm đường tròn nội tiếp trong một tam giác. Ngoài ra nó cũng là một gợi ý cho bài toán dựng hình:*

"Cho trước một đường tròn và một đoạn thẳng tiếp xúc với đường tròn đó. Dựng đường tròn đi qua hai đầu mút của đoạn thẳng và tiếp xúc với đường tròn đã cho."

Ví dụ 7.5. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn với M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp và các cạnh AD,BC,AB,CD. Chứng minh rằng $MN \perp PQ$.*

cách dựng tứ giác vừa nội tiếp, vừa ngoại tiếp

Lời giải.



Biến đổi góc

$$\begin{aligned}\angle MPQ + \angle PMN &= \angle MQD + \angle BPN = 90^\circ - \frac{\angle MDQ}{2} + 90^\circ - \frac{\angle PBN}{2}\\ &= 180^\circ - \frac{\angle MDQ + \angle PBN}{2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

Vậy $MN \perp PQ$. □

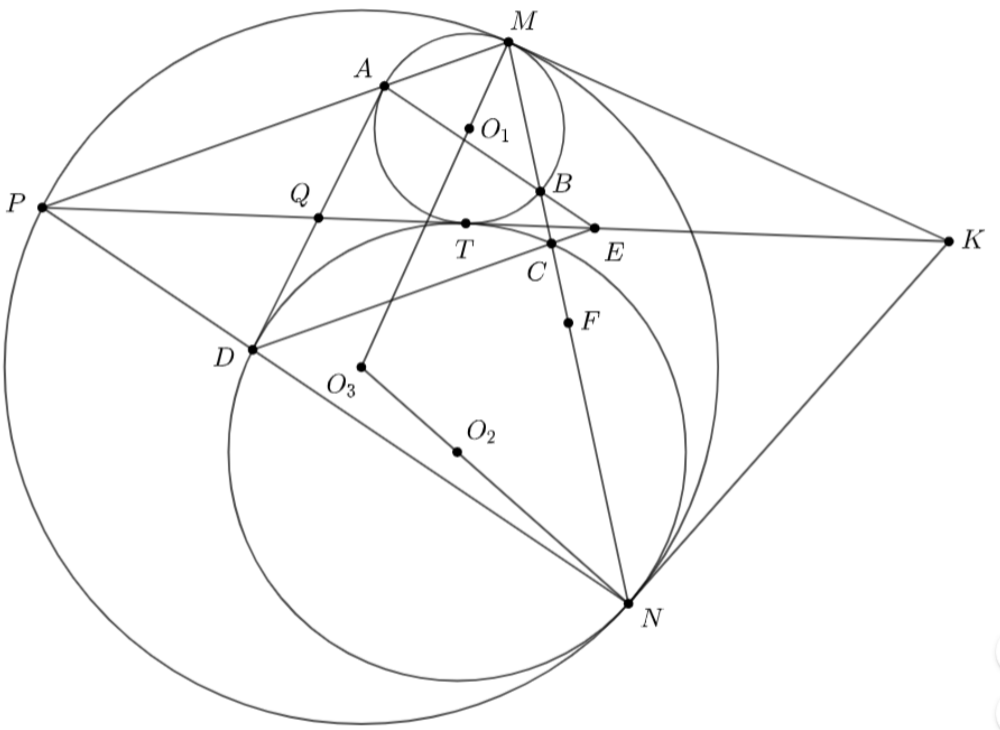
Phân tích. *Bài toán trên là một hướng dẫn để dựng một tứ giác vừa nội tiếp, vừa nội tiếp đường tròn.*

Ví dụ 7.6. *(HSG cấp Tỉnh Bến Tre 2023) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm T. Hai đường tròn này nằm trong đường (O_3) và tiếp xúc với (O_3) lần lượt tại điểm M $(M \in (O_1))$ và điểm N $(N \in (O_2))$. Tiếp tuyến chung tại T của (O_1) và (O_2) cắt (O_3) tại điểm P (P và O_3 nằm cùng phía của đường thẳng MN). Đường thẳng PM cắt (O_1) tại A $(A \neq M)$, đường thẳng PN cắt (O_2) tại D $(D \neq N)$ và đường thẳng MN cắt (O_1) và (O_2) lần lượt tại B $(B \neq M)$ và C $(C \neq N)$. Gọi E là giao điểm của AB và CD.*

a) Tứ giác $AEDP$ là hình gì? Giải thích.

b) Chứng minh rằng: $\angle EBC = \angle EDA$.

Lời giải.



a) Từ chứng minh bài 4, ta có $AB \parallel PN$ và $DC \parallel PM$ nên $AEDP$ là hình bình hành.

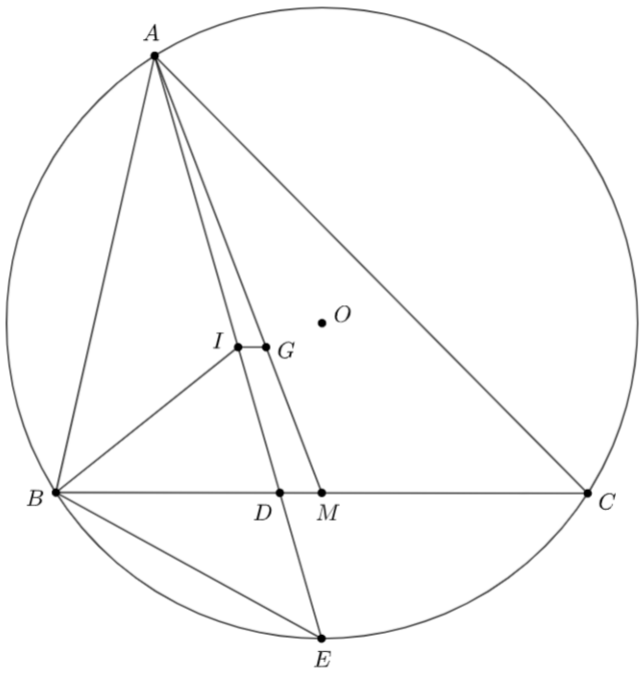
b) Tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_3) tại M cắt đường thẳng PT tại K thì $KM = KT$. Vẽ tiếp tuyến thứ hai KN' với đường tròn (O_3), suy ra $KN' = KM = KT$ nên KN' cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O_2). Từ đây thu được $N' \equiv N$.
Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng MN. Khi đó $\angle KPM = \angle FPN$. (1)
Ta có: $PA \cdot PM = PT^2 = PD \cdot PN$ nên $\triangle PAD \backsim \triangle PNM$. Bởi nên nếu gọi Q là trung điểm AD thì $\triangle PAQ \backsim PNF$, suy ra $\angle APQ = \angle FPN$. (2)
Từ (1) và (2) ta thu được $\angle KPM = \angle APQ$, suy ra P, Q, K thẳng hàng, hay 5 điểm P, Q, T, E, K cùng nằm trên một đường thẳng. Từ đó $EA \cdot EB = ET^2 = EC \cdot ED$, suy ra $\angle EBC = \angle EDA$. Hoàn tất chứng minh.

□

Phân tích. *Trong lời giải trên có sử dụng một kết quả chưa chứng minh:* $\angle KPM = \angle FPN$*. Tính chất này được phát biểu đầy đủ như sau:*
Cho tam giác PMN *không vuông có* F *là trung điểm của* MN*. Hai tiếp tuyến tại* M, N *của đường tròn ngoại tiếp tam giác* PMN *cắt nhau tại* K*. Khi đó* $\angle KPM = \angle FPN$*.*
Đây là một kết quả đẹp và có nhiều ứng dụng, phần chứng minh kết quả này xin nhường lại cho bạn đọc.

Ví dụ 7.7. *Cho tam giác* ABC*. Gọi* I, O, G *lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác* ABC*. Chứng minh rằng* $\angle AIO = 90^\circ$ *khi và chỉ khi* $IG \parallel BC$*.*

Lời giải.



AI lần lượt cắt BC và đường tròn (O) tại D, E $(E \neq A)$. Ta có $EI = EB = EC$, $\triangle EDB \backsim \triangle EBA$ và $ED \cdot EA = EB^2$. Ta có

$$\begin{aligned}\angle AIO = 90^\circ &\Leftrightarrow I \text{ là trung điểm của } AE \Leftrightarrow EA = 2EI = 2EB \\ &\Leftrightarrow EB = 2ED \Leftrightarrow AB = 2BD \Leftrightarrow AI = 2ID. \qquad (*)\end{aligned}$$

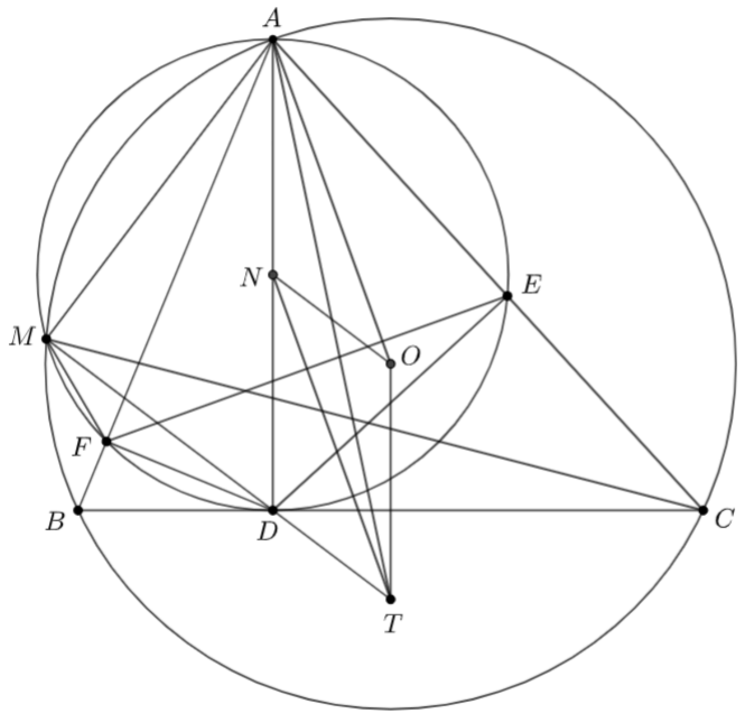
Gọi M là trung điểm của BC thì $AG = 2GM$, kết hợp với $(*)$, theo định lý Thales thì $(*)$ tương đương với $IG \parallel BC$. Hoàn tất chứng minh. □

Phân tích. *Tam giác thỏa mãn điều kiện trên có nhiều tính chất đặc biệt, một trong số đó là bài tập 14 (bên dưới). Ngoài ra, nếu gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì các đường tròn đường kính HM và OA sẽ tiếp xúc nhau.*

Ví dụ 7.8. *(HSG cấp Tỉnh Quảng Trị 2023) Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), AD là đường cao $(D \in BC)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AC và AB.*

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
b) Đường tròn đường kính AD cắt (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Chứng minh MD là phân giác của góc $\angle FMC$.
c) Chứng minh đường thẳng MD, đường trung trực của BC và đường trung trực của EF đồng quy.

Lời giải.



a) Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông ABD, ACD, ta được $AF \cdot AB = AD^2 = AE \cdot AC$. Do đó $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\angle MBD = 180^\circ - \angle MAC = \angle MDE$ và $\angle MDB = \angle MED$ nên ta thu được $\triangle MBD \backsim \triangle MDE$. Suy ra $\angle BMD = \angle EMD$. (1)
Lại có $\angle MFB = 180^\circ - \angle MFA = 180^\circ - \angle MEA = \angle MEC$ và $\angle MBF = \angle MCE$ nên $\triangle MFB \backsim \triangle MEC$. Suy ra $\angle BMF = \angle CME$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\angle FMD = \angle CMD$, hay MD là tia phân giác của $\angle FMC$.

c) Gọi T là giao điểm của đường trung trực BC và đường trung trực EF, N là trung điểm của AD. Ta có

$$\angle OAC + \angle AEF = 90^\circ - \angle ABC + \angle ABC = 90^\circ$$

nên $AO \perp EF$. N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AFDE$ nên N nằm trên đường trung trực của EF, suy ra $NT \perp FE$. Do đó $AO \parallel NT$. Kết hợp với $AN \parallel OT$ suy ra $ANTO$ là hình bình hành, cho $NDOT$ cũng là hình bình hành, suy ra $ON \parallel DT$.
Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC cắt nhau tại A, M nên $ON \perp AM$, suy ra $DT \perp AM$. Ta cũng có $MD \perp AM$, vậy nên suy ra M, D, T thẳng hàng.
Hoàn tất chứng minh.

□

Phân tích. *Cho trước tam giác ABC, trên cạnh AB, AC lần lượt lấy điểm E, F bất kỳ, cho các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, ABC cắt nhau là một mô hình thường gặp trong các đề thi tuyển sinh hay kỳ thi học sinh giỏi. Đây là một mô hình đẹp, tạo ra nhiều tứ giác nội tiếp: nếu gọi K là giao điểm của EF và BC thì $KMFB, KMEC$ cũng là các tứ giác nội tiếp (có liên quan đến điểm Miquel) và các tam giác đồng dạng, ví dụ trên bài trên là tam giác MFB và MEC. Trong nhiều bài toán, cặp tam giác đồng dạng này sẽ giúp ích rất nhiều trong biến đổi các tỉ số, ví dụ bài toán sau:*
Cho tam giác ABC không cân có (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là hình

chiếu của I lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, ABC cắt nhau tại T. TI cắt lại EF tại H. Chứng minh rằng $DH \perp EF$.

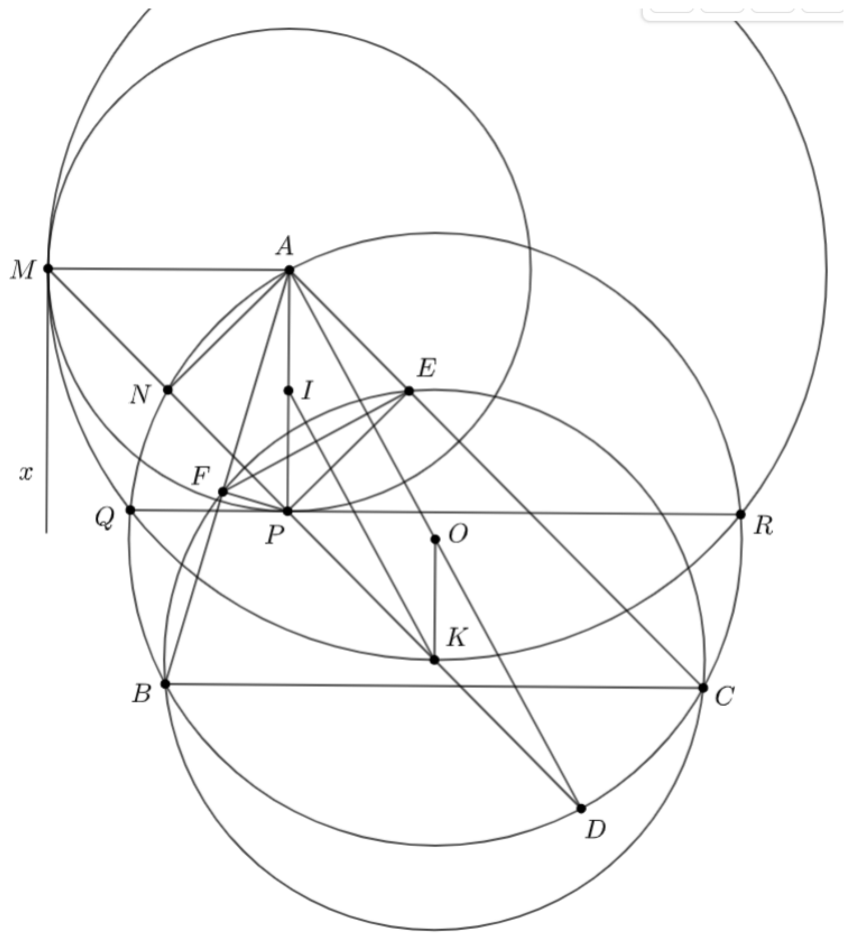
Ví dụ 7.9. *(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán KHTN 2022) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, AB. Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K).*

a) Chứng minh rằng AP vuông góc BC.

b) Chứng minh rằng $AP = 2OK$.

c) Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn tại hai điểm Q và R. Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR.

Lời giải.



a) $AFPE, BFEC$ là các tứ giác nội tiếp, ta được

$$\angle ABC + \angle FAP = \angle AEP + \angle FAP = \angle APF + \angle FAP = 90^\circ.$$

Vậy $AP \perp BC$.

b) Gọi I là trung điểm của AP thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFP$, suy ra $IK \perp EF$. Hơn nữa,

$$\angle AEF + \angle OAE = \angle ABC + 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ$$

nên $OA \perp EF$. Ta thu được $AO \parallel IK$. Thêm nữa $AP \parallel OK$ (cùng vuông góc với BC), kéo theo $AOKI$ là hình bình hành, do đó $AP = 2AI = 2OK$.

c) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O). Vì $\dfrac{OK}{AP} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{DO}{DA}$ nên suy ra K, P, D thẳng hàng và K là trung điểm của PD.
Tia KP cắt đường tròn (O) tại N và cắt đường tròn tâm A bán kính AP tại M $(M \neq P)$. Ta chứng minh đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR tại M.
Do $\angle ANP = \angle AND = 90^\circ$ nên N cũng nằm trên đường tròn đường kính AP. Tam giác APM cân tại A và $AN \perp MP$ nên N là trung điểm của MP. Ta được

$$PQ \cdot PR = PN \cdot PD = 2PN \cdot \frac{PD}{2} = PM \cdot PK,$$

suy ra tứ giác $MQKR$ nội tiếp. Mà $PQ \parallel BC, OK \perp BC$ nên $OK \perp PQ$, do đó $KP = KQ$ nên MP là phân giác $\angle QMR$.
Vẽ tiếp tuyến Mx của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ như hình vẽ. Biến đổi góc

$$\begin{aligned}\angle xMP &= \angle xMK = \angle MCK \\ &= \angle MCQ + \angle KCQ = \angle MCQ + \angle KMC = \angle MPQ = \frac{1}{2}\angle MAP.\end{aligned}$$

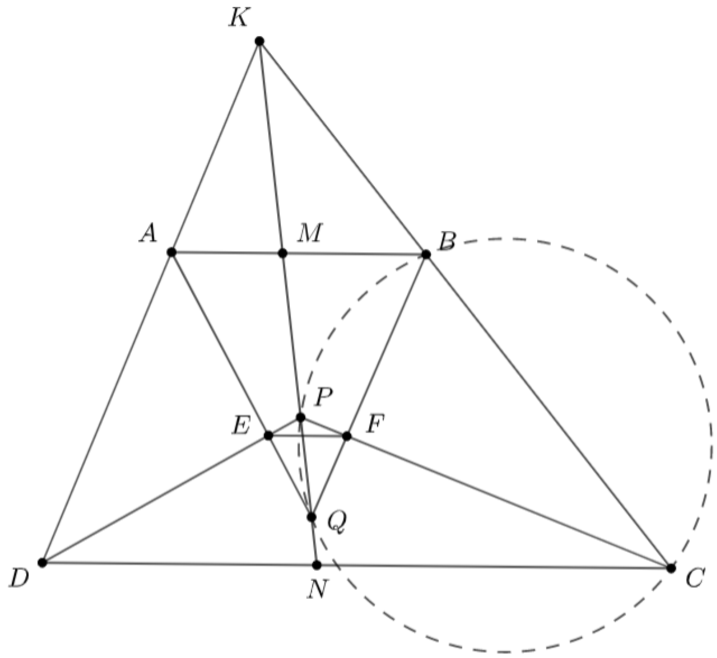
Do đó Mx cũng là tiếp tuyến của đường tròn tâm A bán kính AP. Vậy đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR có chung tiếp tuyến tại M, hay chúng tiếp xúc nhau tại M.

□

Phân tích. *Ý cuối cùng là chứng minh hai đường tròn tiếp xúc. Ta có thể chứng minh hai đường tròn đó có một tiếp tuyến chung tại giao điểm của chúng.*

Ví dụ 7.10. *Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Lấy M, N trên AB và CD sao cho $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{DN}{CN}$. Các điểm P, Q trên MN sao cho $\angle DPC = \angle ABC$ và $\angle AQB = \angle BCD$. Chứng minh rằng P, Q, B, C đồng viên.*

Lời giải.



Theo định lý Thales, ta có AD, MN, BC đồng quy tại K.
Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác KDP với cát tuyến AEQ, ta có

$$\frac{KA}{DA} \cdot \frac{DE}{PE} \cdot \frac{PQ}{KQ} = 1.$$

Tương tự, $\frac{KB}{BC} \cdot \frac{CF}{PF} \cdot \frac{PQ}{KQ} = 1$. Mà $\frac{KA}{DA} = \frac{KB}{BC}$ nên ta thu được $\frac{DE}{PE} = \frac{CF}{PF}$, suy ra $EF \parallel DC$.
Theo giả thiết, $\angle EPF + \angle EQF = \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$ nên tứ giác $EPFQ$ nội tiếp.
Ta có $\angle DPC = \angle ABC = 180^\circ - \angle BCD$ nên CB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DCP. Từ các chứng minh trên, ta được

$$\angle PQF = \angle PEF = \angle PDC = \angle BCP.$$

Vậy B, P, Q, C cùng nằm trên một đường tròn. □

Phân tích. *Đây là một bài toán không quá khó về mặt ý tưởng nhưng khá là khó xử lý các giả thiết để vẽ hình. Ta nên phân tích giả thiết và xem xét yêu cầu đề bài trước khi vẽ hình để dự đoán một số tính chất nhằm phục vụ cho việc vẽ hình. Ví dụ bài này, CB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DPC là một gợi ý để ta có thể vẽ hình.*

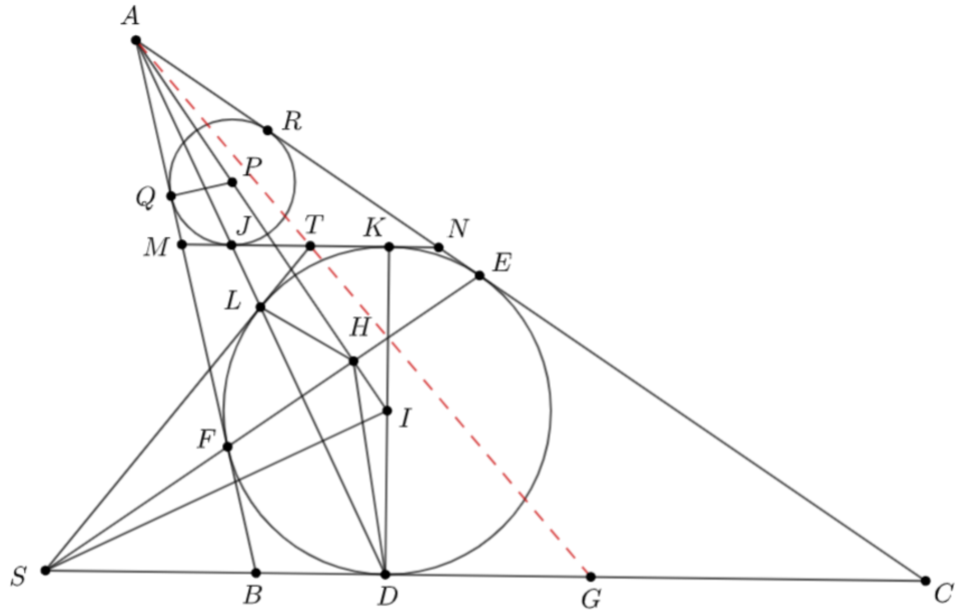
Ví dụ 7.11. *(Thi thử vào lớp 10 chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội 2022 lần 1) Cho tam giác ABC không cân, có đường tròn nội tiếp (I) (tâm I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H, S lần lượt là giao điểm của EF với các đường thẳng AI và BC; AD cắt (I) tại điểm L (L khác D).*

a) Giả sử $AB < AC$, chứng minh rằng HS là phân giác góc $\angle LHD$ và IS vuông góc với LD.

b) Kẻ đường kính DK của đường tròn (I). Đường thẳng qua K, vuông góc với DK, cắt AB, AC tại các điểm M, N tương ứng; AD cắt MN tại điểm J. Tính tỷ số $\frac{MJ}{NK}$.

c) *Xét B, C cố định còn A thay đổi (sao cho tam giác ABC không cân). Gọi T là giao điểm của SL và MN. Chứng minh rằng đường thẳng AT luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải.



a) Ta có $AH \cdot AI = AE^2 = AL \cdot AD$ nên tứ giác $LHID$ nội tiếp. Suy ra

$$\angle LHA = \angle ADI = \angle LDI = \angle ILD = \angle IHD,$$

hay $\angle LHS = \angle DHS$, do đó HS là phân giác $\angle LHD$.
Vì $\angle SHI = \angle SDI = 90^\circ$ nên tứ giác $SHID$ nội tiếp, suy ra

$$\angle ISD = \angle IHD = \angle ILD = \angle IDL.$$

Từ đây suy ra $IS \perp LD$.

b) Đường thẳng qua J vuông góc với MN cắt AI tại P. Gọi Q, R lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên AM, AN. Theo định lý Thales, ta có

$$\frac{PQ}{IF} = \frac{AP}{AI} = \frac{PJ}{ID},$$

kết hợp với $ID = IF$ suy ra $PQ = PJ$. Vậy P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác AMN. Chú ý $AQ = AR, MQ = MJ, NJ = NR$, ta có

$$2MJ = MJ + MQ = MN - JN + MA - AQ = MN + MA - (AR + NJ) = MN + MA - AN,$$

$$2KN = KN + NE = NM - MK + AE - AN = MN - AN - (MF - AF) = MN - AN + AM.$$

Vậy $MJ = KN$, hay $\dfrac{MJ}{NK} = 1$.

c) Do $IS \perp LD$ nên IS là đường trung trực của LD. S là giao điểm của phân giác $\angle LHD$ và đường trung trực của LD nên L, H, D, S đồng viên, hay L, H, D, S, I đồng viên, suy ra $\angle SLI = 90^\circ$. Vậy SI là tiếp tuyến của (I).

Kéo theo $TL = TK$, mà tam giác JLK vuông tại L nên $TK = TL = TJ$. Vậy T là trung điểm của MN.
Theo bổ đề hình thang, AT đi qua trung điểm G của BC là một điểm cố định.

□

Phân tích. *Trong lời giải trên có sử dụng một kết quả dùng để chứng minh tứ giác nội tiếp:*
Đường phân giác và đường trung trực ứng với cùng một đỉnh của tam giác cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Trên đây là một số ví dụ thể hiện một số kết quả hữu ích trong các bài toán hình học. Nhiều bài toán được trích trong một số đề thi nhằm ôn tập lại các kết quả quan trọng như bổ đề hình thang, chứng minh bằng diện tích, định lý Menelaus, ... Bên cạnh đó cũng có một số bài toán là gợi ý cho những vấn đề về dựng hình. Dưới đây là một số bài tập bổ sung để bạn đọc có thể tự luyện tập thêm.

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng AI, BI, CI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. DE, DF lần lượt cắt AC, AB tại M, N. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.*

Bài 2. *Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm M, N. Đường thẳng AN cắt CM tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNP tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh $\angle PDA = \angle QBA$.*

Bài 3. *(HSG cấp Tỉnh Sơn La 2023) Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi BD và CE là hai đường cao của $\triangle ABC$. Gọi R là giao điểm của BD và (O) (R khác điểm B), S là giao điểm của CE với (O) (S khác điểm C). Tia AO cắt BC tại M và cắt cung nhỏ BC tại N. Tia BO cắt AC tại P. Tia CO cắt AB tại F.*

a) *Chứng minh: Tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC.*
b) *Chứng minh: $DE \parallel SR$ và AN là tia phân giác của góc SAR.*
c) *Chứng minh:* $\dfrac{MB \cdot MC}{MA^2} + \dfrac{PC \cdot PA}{PB^2} + \dfrac{FA \cdot FB}{FC^2} = 1.$

Bài 4. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$*

Bài 5. *(HSG cấp Tỉnh Phú Yên 2023) Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. C là trung điểm của OA. M là một điểm thuộc (O) sao cho $MA > MB$. Đường thẳng MC cắt (O) tại D (D khác M), đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại E (E khác D), đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại F.*

a) *Chứng minh $AF = AO$.*
b) *Đường thẳng qua M song song với DE cắt AB tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng 3 điểm F, D, N thẳng hàng.*
c) *Trong trường hợp $EF = MC$, tính độ dài đoạn thẳng CH theo R.*

Bài 6. *(HSG cấp Tỉnh Bến Tre 2023) Cho tam giác ABC biết $\angle ACB = 45^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua O và vuông góc với CO cắt AC và BC lần lượt tại điểm K và điểm L. Chứng minh rằng: chu vi tam giác HKL bằng với đường kính của (O).*

Bài 7. *(HSG cấp Tỉnh Phú Yên 2023) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. Gọi E,F,G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD,ACD,ABC. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AG và EF. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{HG}=\dfrac{1}{HA}+\dfrac{1}{HE}+\dfrac{1}{HF}$.*

Bài 8. *Cho đường tròn (O), dây cung AB khác đường kính. Gọi I là trung điểm của AB. Qua I vẽ hai dây cung MN,PQ của đường tròn (O) (M,P nằm cùng phía nửa mặt phẳng bờ là AB). MQ,PN cắt lại AB lần lượt tại X,Y. Chứng minh rằng I là trung điểm của XY.*

Bài 9. *Từ một điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC hạ các đường vuông góc với các cạnh BC,CA,AB và cắt các cạnh này lần lượt tại D,E,F. Chứng minh rằng D,E,F thẳng hàng.*

Bài 10. *Cho tam giác ABC có D là trung điểm của cạnh BC. Gọi I,J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD,ACD. Gọi P,Q lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc D của các tam giác ABD,ACD. Chứng minh rằng I,J,P,Q đồng viên.*

Bài 11. *(HSG Tỉnh Tuyên Quang 2023) Cho đường tròn tâm O, đường kính $BC=2R$ cố định. Điểm A di động trên (O) sao cho A khác B,C. Gọi M là điểm đối xứng của A qua B, điểm H là hình chiếu của A trên BC và I là trung điểm của HC.*

a) *Chứng minh rằng $AH\cdot CA=AM\cdot CI$.*
b) *Chứng minh rằng $HM\perp AI$.*
c) *Đường thẳng MH cắt đường tròn (O) tại E và F ($ME<MF$). Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. Chứng minh rằng $AF^2+FG^2+GE^2+EA^2$ không đổi.*

Bài 12. *(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán Hải Dương 2008) Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$), đường cao BD,CE cắt nhau tại H, gọi I là trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDI và CDI cắt nhau tại K. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại M. Chứng minh rằng M,H,K thẳng hàng và tứ giác $BKDM$ nội tiếp.*

Bài 13. *Cho tam giác nhọn ABC nhọn tiếp đường tròn (O), M là trung điểm cung nhỏ BC. Gọi E,F lần lượt là trung điểm AC,AB. Tia OE,OF lần lượt cắt đường tròn đường kính AM tại P,Q. Đường trung trực AM cắt PQ tại D. Chứng minh rằng $AD\parallel BC$.*

Bài 14. *Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đồng thời chia đôi chu vi và diện tích của một tam giác cho trước thì đường thẳng đó luôn đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác đó.*

Bài 15. *(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán Đại học Sư phạm Hà Nội 2022) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của CE và BG.*

a) *Chứng minh rằng $\triangle EBC\backsim\triangle BCG$.*
b) *Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh rằng tứ giác tứ giác $BIDE$ nội tiếp.*
c) *Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2=KI\cdot KD$.*

Bài 16. *(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán KHTN 2018) Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp (O) có $CD\parallel BE$. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc BE sao cho $\angle MAB=\angle PAE$. Điểm K thuộc AC sao cho MK song song AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho $ML\parallel AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt BD,CE tại Q và S (Q khác B, S khác C).*

a) *Chứng minh 3 điểm K, M, Q thẳng hàng.*
b) *Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE cắt BD, CE tại T và R (T khác D, R khác E). Chứng minh M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.*
c) *Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc (O).*

Bài 17. *Cho tam giác nhọn ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm. Đường trung trực của AH cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng OA là phân giác của $\angle DOE$.*

Bài 18. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Gọi P, Q, R, S lần lượt là giao điểm của các đường phân giác trong của các cặp góc $\angle A$ và $\angle B$, $\angle B$ và $\angle C$, $\angle C$ và $\angle D$, $\angle D$ và $\angle A$ của tứ giác. Chứng minh rằng $PQRS$ là tứ giác nội tiếp và $MQ \perp NP$.*

Bài 19. *Cho tam giác ABC. Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Biết rằng $AB + AC = 2BC$. Chứng minh rằng tam giác AOI vuông.*

Bài 20. *Cho hai đường tròn có tâm là O_1, O_2 cắt nhau tại hai điểm P, Q phân biệt. Trên đường tròn (O_1) lấy A, B bất kỳ. AP, BP lần lượt cắt lại đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai là C, D. Đường thẳng AB, CD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACE, BDE luôn nằm trên một đường cố định khi A, B thay đổi.*

Bài 21. *Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M, N lần lượt là chân các đường cao kẻ từ đỉnh B và C, D là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Gọi ω_1, ω_2 lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM, BDN. Kẻ đường kính DQ của ω_1, DP của ω_2. Chứng minh rằng P, Q, H thẳng hàng.*

Bài 22. *(KSCLHSG chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2022) Cho đường tròn (O, R), đường kính AB cố định. Một điểm C di chuyển trên (O) (C khác A, B). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vẽ CH vuông góc với AB tại H.*

a) *Vẽ CM song song với BI ($M \in AI$). Lấy điểm F thuộc AB sao cho $AC = AF$. Chứng minh CM vuông góc với FM.*
b) *Lấy điểm P trên tia đối của tia AC sao cho $AP = AC$. Gọi Q là trung điểm của HB, đường thẳng PH cắt CQ tại J. Chứng minh $\angle ACH = \angle QJB$.*
c) *Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHC; đường thẳng CK cắt AB tại E. Hãy tìm vị trí điểm C trên đường tròn (O) sao cho diện tích tam giác CEF lớn nhất.*

Bài 23. *(Kiểm tra kiến thức toán chuyên 9 KHTN 2023 đợt 2) Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $DA = AB = BC$. (K) là đường tròn đi qua A và B đồng thời tiếp xúc với AD và BC. P là một điểm thuộc (K) và nằm trong hình thang. Giả sử PA, PB lần lượt cắt cạnh CD tại E, F. Giả sử BE, AF theo thứ tự cắt AD, BC tại M, N.*

a) *Chứng minh rằng ba tam giác PAB, CBF và DEA đồng dạng.*
b) *Chứng minh rằng $NF \cdot ME = NA \cdot MB$.*
c) *Chứng minh rằng $PM = PN$.*

Bài 24. *(HSG Tỉnh Nghệ An 2022 Bảng A) Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (BC khác đường kính). Điểm A thuộc cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, AB lần lượt tại D, E. Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là M; BM cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là Q; BI cắt DE tại P.*

a) *Chứng minh tứ giác $IPQM$ nội tiếp.*
b) *Chứng minh $\angle BME = \angle DMP$.*
c) *Đường tròn đi qua C tiếp xúc với AI tại I cắt BC tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh khi A di động trên (O) thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.*

Bài 25. *Cho tam giác ABC không cân có (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB. Gọi M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của IE, IF với đường tròn (I). MN cắt IB, IC lần lượt tại P, Q. EF cắt BI, CI lần lượt tại H, G. Chứng minh rằng $GP = HQ$.*

Bài 26. *(Thi thử toán chuyên ĐHSP Hà Nội 2023) Cho tam giác ABC, với $AB < AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F tương ứng là tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Đường thẳng đi qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI, BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng*
a) *$\angle KIF = \angle ACB$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*
b) *$LK \cdot BC = AI \cdot EF$.*
c) *Các đường thẳng DK, HJ, AL đồng quy.*

Bài 27. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ với $BC = DE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TB = TD, TC = TE$ và $\angle Avd = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó các điểm P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, S, Q, R nằm trên một đường tròn.*

Bài 28. *(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán PTNK 2022) Cho tam giác ABC có trực tâm H, D đối xứng với H qua A. I là trung điểm của CD, đường tròn (I) đường kính CD cắt AB tại E, F (E thuộc tia AB).*
a) *Chứng minh $\angle ECD = \angle FCH$ và $AE = AF$.*
b) *BH cắt AC tại K. Chứng minh tứ giác $EFKH$ nội tiếp và EF là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác CKE và CKF.*
c) *Chứng minh tiếp tuyến tại C của (I) và tiếp tuyến tại K của đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF cắt nhau trên đường thẳng BC.*

Một số bài toán bất đẳng thức chọn lọc ôn thi vào lớp 10 chuyên toán

Đoàn Quang Đăng - Huỳnh Trung Hiếu
(SV Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh)

1. Bài tập có lời giải

Ví dụ 8.1. *Cho* $9a^2+8ab+7b^2 \le 6$. *Chứng minh rằng* $7a+5b+12ab \le 9$.

Lời giải. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}
&7a+5b+12ab \le 7\left(a^2+\frac{1}{4}\right)+5\left(b^2+\frac{1}{4}\right)+12ab\\
&=(9a^2+8ab+7b^2)-2(a-b)^2+3\\
&\le (9a^2+8ab+7b^2)+3 \le 6+3=9.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 8.2. *Chứng minh rằng nếu* $0<b<a\le 2$ *thì* $a^2+b^2\le 5$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
5=1^2+2^2&=b^2\left(\frac{2^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}\right)+(a^2-b^2).\frac{2^2}{a^2}\\
&\ge \frac{b^2}{2}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+(a^2-b^2).\frac{2^2}{a^2}\\
&=\frac{b^2}{2}\left(\frac{2b+a}{ab}\right)^2+(a^2-b^2)\\
&\ge \frac{b^2}{2}\left(\frac{2ab}{ab}\right)^2+(a^2-b^2)\\
&=a^2+b^2.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}\\ a=2\\ 2ab=2a+b\end{cases} \iff \begin{cases} a=2\\ b=1\end{cases}.$$

□

Ví dụ 8.3. *Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng*

$$\min\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}, \frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}, \frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq abc.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{10a^2-5a+1}{a^2-5a+10} \leq a^3 \iff (a-1)^5 \geq 0.$$

Khi đó

$$\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}\right)\left(\frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}\right)\left(\frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq (abc)^3.$$

Như vậy

$$\min\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}, \frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}, \frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq abc.$$

□

Phân tích. *Ta có thể tổng quát bài toán như sau:*
Cho $x_1, x_2, ..., x_n \geq 1$ (n là một số nguyên dương cho trước). Khi đó

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(\frac{10x_i^2-5x_i+1}{x_{i+1}^2-5x_{i+1}+10}\right) \leq x_1^{\frac{3}{n}}x_2^{\frac{3}{n}}\dots x_n^{\frac{3}{n}},$$

trong đó ta quy ước $x_{n+1} = x_1$.

Ví dụ 8.4. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2}.$$

Lời giải. Áp dụng **Bất đẳng thức Bunhiacopsky**, ta có

$$(a+b+c)^2 \leq (a^2+b+c)(1+b+c)$$
$$(a+b+c)^2 \leq (a+b^2+c)(a+1+c)$$
$$(a+b+c)^2 \leq (a+b+c^2)(a+b+1)$$

Do đó

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2} \\ &\leq \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2} + \frac{1+c+a}{(a+b+c)^2} + \frac{1+a+b}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{3+2(a+b+c)}{(a+b+c)^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Như vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q là 1.

□

Phân tích. *Bài tập tương tự: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn*

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{a+b^2+c}+\frac{1}{a+b+c^2}=1.$$

Chứng minh rằng $1+\sqrt{2} \leq a+b+c \leq 3$.

Ví dụ 8.5. *Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leq \frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}-\frac{1}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right).$$

Thực hiện tương tự, ta có:

$$\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+b-\frac{1}{c}\right).$$

$$\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+c-\frac{1}{a}\right).$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được bất đẳng thức cần chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$. □

Hai bài toán dưới đây tuy chỉ áp dụng bất đẳng thức Cauchy, nhưng đòi hỏi sự khéo léo nhất định trong cách lựa chọn các thành phần tham gia bất đẳng thức Cauchy.

Ví dụ 8.6. *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{3x+z}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{3z+x}{x+y} \geq 6.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{3x+z}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{3z+x}{x+y}+4 &= \left(\frac{3x+z}{y+z}+1\right)+\left(\frac{4y}{z+x}+2\right)+\left(\frac{3z+x}{x+y}+1\right)\\
&= \frac{3x+2z+y}{y+z}+\frac{4y+2z+2x}{z+x}+\frac{3z+2x+y}{x+y}\\
&= \frac{2(x+z)+(x+y)}{y+z}+\frac{2(x+y)+2(y+z)}{z+x}+\frac{2(z+x)+(z+y)}{x+y}\\
&= \left[\frac{2(x+z)}{y+z}+\frac{2(y+z)}{z+x}\right]+\left(\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{x+y}\right)+\left[\frac{2(x+y)}{z+x}+\frac{2(z+x)}{x+y}\right]
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{2(x+z)}{y+z}+\frac{2(y+z)}{z+x}\geq 4.$$
$$\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{x+y}\geq 2.$$
$$\frac{2(x+y)}{z+x}+\frac{2(z+x)}{x+y}\geq 4.$$

Từ đó, ta có

$$\frac{3x+z}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{3z+x}{x+y}+4\geq 4+2+4$$
$$\iff \frac{3x+z}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{3z+x}{x+y}\geq 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

Ví dụ 8.7. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{6a+2c}{3b+c}+\frac{4a+3b+c}{b+c}\geq \frac{32a}{2a+b+c}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
VT &= \frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{6a+2c}{3b+c}+\frac{4a+3b+c}{b+c}\\
&= \frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{2(a+c)}{3b+c}+\frac{3b+c}{2(b+c)}+\frac{3b+c}{2(b+c)}+\frac{4a}{3b+c}+\frac{4a}{b+c}\\
&\geq 4\sqrt[4]{\frac{2a}{a+b}.\frac{a+b}{a+c}.\frac{2(a+c)}{3b+c}.\frac{3b+c}{2(b+c)}}+2\sqrt{\frac{3b+c}{2(b+c)}.\frac{4a}{3b+c}}+\frac{4a}{b+c}\\
&= 4\sqrt[4]{\frac{2a}{b+c}}+2\sqrt{\frac{2a}{b+c}}+\frac{4a}{b+c}.
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$4\sqrt[4]{\frac{2a}{b+c}}+2\sqrt{\frac{2a}{b+c}}+\frac{4a}{b+c}\geq \frac{32a}{2a+b+c}. \qquad (1)$$

Thật vậy, đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{2a}{b+c}}(t>0)$. Khi đó, bất đẳng thức (1) tương đương

$$t^4+t^2+2t\geq \frac{8t^4}{t^3+1}\iff (t^3+t+2)(t^4+1)\geq 8t^3. \qquad (2)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$t^4+1\geq 2t^2 \text{ và } t^3+t+2=(t^3+1+1)+t\geq 3t+t=4t.$$

Do đó, $(t^3+t+2)(t^4+1)\geq 2t^2.4t=8t^3$.
Từ đó, bất đẳng thức (2) đúng và bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. □

Ví dụ 8.8. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{a^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\\&\geq\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}+2bc+a(b+c)}.\end{aligned}$$

Từ đó, để chứng minh bất đẳng thức ban đầu, ta chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}+2bc+a(b+c)}\geq\frac{3}{2}. \tag{1}$$

Thật vậy, bất đẳng thức (1) tương đương với

$$(1)\iff 2a^2+a(b+c)+2(b^2-bc+c^2)\geq 3a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}.$$

Dễ thấy $b^2-bc+c^2>0$, áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 3 số thực dương $2a^2, a(b+c), 2(b^2-bc+c^2)$, ta được

$$2a^2+a(b+c)+2(b^2-bc+c^2)\geq 3\sqrt[3]{4a^3(b^3+c^3)}=3a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}.$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$. □

Phân tích. *Bài toán trên có thể xem là một đánh giá làm chặt hơn bất đẳng thức Nesbit quen thuộc:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}, \forall a,b,c>0.$$

Ví dụ 8.9. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện*

$$2(a+b+c)+ab+bc+ca=9.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{a+1}{a^2+10a+21}+\frac{b+1}{b^2+10b+21}+\frac{c+1}{c^2+10c+21}.$$

Lời giải. Đặt $x=a+1, y=b+1, z=c+1$ thì giả thiết đã cho trở thành $xy+yz+zx=12$. Khi đó

$$\begin{aligned}
M &= \frac{x}{x^2+8x+12}+\frac{y}{y^2+8y+12}+\frac{z}{z^2+8z+12}\\
&= \frac{x}{(x^2+4)+8x+8}+\frac{y}{(y^2+4)+8y+8}+\frac{z}{(z^2+4)+8z+8}\\
&\le \frac{x}{12x+8}+\frac{y}{12y+8}+\frac{z}{12z+8}
\end{aligned}$$

Đặt $P=\dfrac{x}{12x+8}+\dfrac{y}{12y+8}+\dfrac{z}{12z+8}$. Ta chứng minh $P\le\dfrac{3}{16}$ hay chứng minh $\dfrac{x}{3x+2}+\dfrac{y}{3y+2}+\dfrac{z}{3z+2}\le\dfrac{3}{4}$.

Thật vậy, thực hiện quy đồng và rút gọn, ta có:

$$\frac{x}{3x+2}+\frac{y}{3y+2}+\frac{z}{3z+2}=\frac{27xyz+12(xy+yz+zx)+4(x+y+z)}{27xyz+18(xy+yz+zx)+12(x+y+z)+8}.$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{27xyz+12(xy+yz+zx)+4(x+y+z)}{27xyz+18(xy+yz+zx)+12(x+y+z)+8}\le\frac{3}{4} \qquad (1)$$

Sử dụng điều kiện $xy+yz+zx=12$, ta có bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức

$$20(x+y+z)+96\ge 27xyz.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$12=xy+yz+zx\ge\sqrt[3]{x^2y^2z^2}, \text{ suy ra } xyz\le 8.$$

Mặt khác, ta có $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$, suy ra $x+y+z\ge 6$. Từ đó, suy ra

$$20(x+y+z)+96\ge 20.6+96=216\ge 27xyz.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=2$ hay $a=b=c=1$.

Vậy $\max M=\dfrac{3}{16}$, xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Phân tích. *Bài toán trên là dạng không mới, nhưng ta cần biến đổi giả thiết $2(a+b+c)+ab+bc+ca=9$ một cách phù hợp để đưa về dạng Cauchy quen thuộc.*

Ví dụ 8.10. *Cho số tự nhiên $n\ge 2$, n số thực $b_1,b_2,\dots,b_n$ và $n-1$ số thực dương $a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$ thỏa mãn $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=1$. Chứng minh rằng*

$$b_1^2+\frac{b_2^2}{a_1}+\frac{b_3^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_{n-1}}\ge 2b_1(b_2+b_3+\cdots+b_n).$$

Lời giải. Áp dụng **Bất đẳng thức Cauchy Schwarz,** ta có

$$b_1^2+\frac{b_2^2}{a_1}+\frac{b_3^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_{n-1}}\geq b_1^2+\frac{(b_2+b_3+\cdots+b_n)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}=b_1^2+(b_2+b_3+\cdots+b_n)^2.$$

Đặt $b=b_2+b_3+\cdots+b_n$. Khi đó, ta có

$$b_1^2+x^2\geq 2b_1x.$$

Từ các khẳng định trên, ta suy ra

$$b_1^2+\frac{b_2^2}{a_1}+\frac{b_3^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_{n-1}}\geq 2b_1\left(b_2+b_3+\cdots+b_n\right).$$

□

Ví dụ 8.11. *Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi số thực dương $x_1,x_2,\ldots,x_n$, ta có bất đẳng thức sau*

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geq n.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky, ta có

$$\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\geq 1+x_1x_2.$$

Do đó, ta có $\dfrac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}\geq\dfrac{(1+x_1^2)}{\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}=\sqrt{\dfrac{1+x_1^2}{1+x_2^2}}.$
Thực hiện tương tự, ta có

$$\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+1}}\geq\sqrt{\frac{1+x_i^2}{1+x_{i+1}^2}},\forall i=2,3,\ldots,n\text{ (quy ước }x_{n+1}=x_1).$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geq\sqrt{\frac{1+x_1^2}{1+x_2^2}}+\sqrt{\frac{1+x_2^2}{1+x_3^2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1+x_n^2}{1+x_1^2}}.\quad(1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\sqrt{\frac{1+x_1^2}{1+x_2^2}}+\sqrt{\frac{1+x_2^2}{1+x_3^2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1+x_n^2}{1+x_1^2}}\geq n\sqrt[n]{\sqrt{\frac{1+x_1^2}{1+x_2^2}}.\sqrt{\frac{1+x_2^2}{1+x_3^2}}\cdots\sqrt{\frac{1+x_n^2}{1+x_1^2}}}=n.\quad(2)$$

Từ (1) và (2), bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi $x_i=x_j,\forall i,j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$. □

Ví dụ 8.12. *Cho các số x, y, z thoả $0 \leq x < y \leq z \leq 1$ và $3x + 2y + z \leq 4$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$S = 3x^2 + 2y^2 + z^2.$$

Lời giải. Ta chứng minh $S \leq \dfrac{10}{3}$. Dấu '=' xảy ra khi $x = \dfrac{1}{3}, y = z = 1$ bằng cách xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $0 \leq x < \dfrac{1}{3}$. Vì $0 < y \leq z \leq 1$ nên

$$S \leq 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2.1^2 + 1.1^2 = \frac{10}{3}.$$

Trường hợp 2: $\dfrac{1}{3} \leq x \leq 1$. Vì $0 < x \leq y \leq z$ nên $4 \geq 3x + 2y + z > 6x$ và do đó

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow (3x-1)(3x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \leq 3x - \frac{2}{3}.$$

Lại có $y^2 \leq y, z^2 \leq z$ nên ta được

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 3x + 2y + z - \frac{2}{3} \leq 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3},$$

điều phải chứng minh.

□

Ví dụ 8.13. *Cho các số dương a, b. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b} + b + \frac{|a-b|}{b^2} + \frac{|b^2-b|}{a} \geq 2.$$

Lời giải. Đặt $\dfrac{a}{b} = c$ thì bất đẳng thức ban đầu có thể viết lại thành

$$b + c + \frac{|c-1|}{b} + \frac{|b-1|}{c} \geq 2. \tag{1}$$

Vai trò của b, c như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $b \geq c$. Xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $c \geq 1$. Khi đó $b \geq 1$. Vế trái của bất đẳng thức (1) viết lại là

$$b + c + \frac{c-1}{b} + \frac{b-1}{c} = \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(b - \frac{1}{b}\right) + \left(c - \frac{1}{c}\right) \geq 2.$$

- Trường hợp 2: $0 < c < 1$.
  + Nếu $b \geq 1$ thì vế trái của (1) có thể viết lại thành

$$b + c + \frac{b-1}{c} + \frac{1-c}{b} \geq 2. \tag{2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức (2) tương đương với

$$(b-1)+\frac{b-1}{c}+(c-1)+\frac{1-c}{b}\geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\left(1+\frac{1}{c}\right)+(c-1)\left(1-\frac{1}{b}\right)\geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\left(1+\frac{1}{c}+\frac{c-1}{b}\right)\geq 0. \tag{3}$$

Dễ thấy bất đẳng thức (3) đúng vì $b\geq 1, c>0$.
+ Nếu $0<b<1$ thì vế trái của (1) có thể viết lại thành

$$b+c+\frac{1-b}{c}+\frac{1-c}{b}\geq 2. \tag{4}$$

Bất đẳng thức (4) tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{(b-1)(c-1)}{b}+\frac{(b-1)(c-1)}{c}\geq 0. \tag{5}$$

Dễ thấy bất đẳng thức (5) đúng vì $0<b,c<1$.
Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. $\square$

Ví dụ 8.14. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\leq 2\sqrt{2}.$$

Lời giải. Ta có $1+a^2=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c), 1+b^2=(b+c)(b+a), 1+c^2=(c+a)(c+b)$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}&=\frac{1-a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{1-b^2}{(b+c)(b+a)}\\&=\frac{(1-a^2)(b+c)+(1-b^2)(c+a)}{(a+b)(b+c)(a+c)}\\&=\frac{(1-a^2)(b+c)+(1-b^2)(c+a)}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(1-a^2)(b+c)+(1-b^2)(c+a)&=a+b+2c-ab(a+b)-c(a^2+b^2)\\&=(a+b)(1-ab)+2c-c(a^2+b^2)\\&=(a+b)c(a+b)+2c-c(a+b)^2+2abc=2c(1+ab).\end{aligned}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopsky, ta có

$$1+ab\leq\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

Do đó, $(1-a^2)(b+c)+(1-b^2)(c+a)=2c(1+ab)\le 2c\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$.
Từ đó, ta có

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{2(1+c)}{\sqrt{1+c^2}}=2\sqrt{2}.\frac{1+c}{\sqrt{2(1+c^2)}}\le 2\sqrt{2}.$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, c=1$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 29. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}$ *với* x, y *là các số dương thay đổi nhưng luôn thỏa mãn* $x+y=1$.

Bài 30. *Với* a, b, c *là các số thực thỏa mãn* $1\le a, b, c\le 2$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$F=\frac{\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}}{a+b+c}.$$

Bài 31. *Với* a, b, c *là các số thực thỏa mãn* $1\le a, b, c\le 2$. *Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10.$$

Bài 32. *Với* x, y, z *là các số thực dương thỏa mãn* $x^2+y^2+z^2=3$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$F=\frac{x^2+1}{z+2}+\frac{y^2+1}{x+2}+\frac{z^2+1}{y+2}.$$

Bài 33. *Với* a, b, c *là các số thực có tổng bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a-1}{a^2+8}+\frac{b-1}{b^2+8}+\frac{c-1}{c^2+8}\ge-\frac{3}{8}.$$

Bài 34. *Cho các số thực* a, b, c *thay đổi thỏa mãn* $1\le a, b, c\le 2$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$S=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Bài 35. *Cho các số thực dương* a, b *thỏa mãn* $a^3+b^4\le a^2+b^3$. *Chứng minh* $a^3+b^3\le 2$.

Bài 36. *Cho* $0\le x, y\le 1$. *Chứng minh rằng*

$$8(x+y-1)^2-9xy(x+y-1)+xy\ge 0.$$

Bài 37. *Với* $a, b>0$ *thỏa mãn* $a+b=2$, *chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{2-a}{2+6a}}+\sqrt[3]{\frac{2-b}{2+6b}}\ge 1$$

Bài 38. *Gọi* S *là tập hợp các số nguyên* n $(n>1)$ *sao cho với* n *số thực bất kỳ thuộc khoảng* $(-2;2)$ *có tổng bằng 0 thì tổng lũy thừa bậc 4 của chúng luôn nhỏ hơn 32.*

a) *Hỏi các số nguyên 2 và 3 có thuộc* S *hay không?*

b) *Chứng minh rằng* $a\notin S$, $\forall a\in\mathbb{N}, a\ge 4$.

Phần III

Đề thi thử vào lớp 10 của Star Education

Đề thi thử môn toán chung cho tất cả thí sinh

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2 điểm)

Học sinh kẻ bảng sau vào giấy làm bài thi và ghi câu trả lời tương ứng vào ô:

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Câu trả lời										

Câu 1. *Biểu thức* $\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}}$ *xác định khi và chỉ khi:*

A. $x > -1$ B. $x \geq -1$ C. $x \in R$ D. $x \geq 0$

Câu 2. *Cho* $a, b \in R$. *Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?*

A. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

B. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *(với* $a \geq 0; b > 0$)

C. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ *(với* $a, b \geq 0$)

D. *A, B, C đều đúng.*

Câu 3. *Câu nào sau đây đúng?*

A. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

B. $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$

C. $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

D. $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

Câu 4. *Cho hàm số* $y = 3 - 2x$, *điểm* $\mathrm{A(a;b)}$ *thuộc đồ thị của hàm số* $y = 3 - 2x$ *khi:*

A. $-2a+3 = b$ B. $3 - 2b = a$ C. $3 + 2a = b$ D. $3a - 2b = 0$

Câu 5. *Cho 2 đường thẳng:* $y = -kx + 1$ *và* $y = (2k+1)x - 1$, $\left(k \neq 0; k \neq -\dfrac{1}{2}\right)$. *Hai đường thẳng cắt nhau khi:*

A. $k = -3$ B. $k \neq -3$ C. $k = -\dfrac{1}{3}$ D. $k \neq -\dfrac{1}{3}$

Câu 6. *Với giá trị nào của m thì phương trình* $x^2 - 3x + 2m = 0$ *vô nghiệm?*

A. $m > -\dfrac{9}{8}$ B. $m < -\dfrac{9}{8}$ C. $m > \dfrac{9}{8}$ D. $m < \dfrac{9}{8}$

Câu 7. *Cho tam giác* ABC *nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, biết* $\angle ACB = 45°$. *Tính độ dài dây cung AB.*

A. $AB = R$ B. $AB = 2R$ C. $AB = R\sqrt{2}$ D. $AB = R\sqrt{3}$

Câu 8. *Gọi* $(a_0; b_0)$ *là nghiệm của hệ phương trình:* $\begin{cases} \dfrac{2}{a} - \dfrac{3}{b} = 4 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{3}{2b} = -1 \end{cases}$. *Tính* $\dfrac{1}{a_0} + \dfrac{1}{b_0}$

A. 1 B. $-0,5$ C. $0,5$ D. -1

Câu 9. *Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có $\angle BAC = 75°$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M và N theo thứ tự là điểm chính giữa của hai cung nhỏ AB và AC. Dây MN cắt AB tại H, AC tại K. Tam giác AHK là tam giác gì?*

A. *Tam giác vuông*
B. *Tam giác vuông cân*
C. *Tam giác đều*
D. *Tam giác cân*

Câu 10. *Từ điểm P ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến PM với (O), M là tiếp điểm. Đường thẳng PO cắt (O) tại A và B (A ở giữa P và O). Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $\triangle PAM \backsim \triangle PMB$
B. $PM = PA \cdot PB$
C. $PM^2 = PA \cdot PO$
D. *Cả A và B đều đúng*

B. PHẦN TỰ LUẬN (8 điểm)

Bài 1. ***(1,5 điểm)***

(a) *Cho biểu thức:*

$$P(x) = \left(4 - \sqrt{x} - \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{x-4}\right) \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4.$$

Tính giá trị của $P(x)$ khi $x = 21 - 12\sqrt{3}$.

(b) *Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB < AD)$ có $AC = 13$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, D lên AC. Biết $BH = \dfrac{60}{13}$. Tính diện tích tứ giác $BHDK$.*

Bài 2. ***(2 điểm)***

(a) *Giải phương trình:* $(2x^4 - 3x^2 - 9)(\sqrt{2x+1} + x - 1) = 0$.

(b) *Đèo Hải Vân, đèo nối Huế và Đà Nẵng có chiều dài 21km với đỉnh cao nhất là 496m so với mực nước biển. Hiện nay đèo Hải Vân đã có hầm qua núi nhưng nhiều người vẫn chọn cách đi tàu để có thể thưởng ngoạn phong cảnh kỳ thú của Hải Vân - nơi được mệnh danh là "Thiên hạ đệ nhất hùng quan". Cung đường sắt Hải Vân nằm phía đông trục đường bộ (Quốc lộ 1), sát biển. Đoàn tàu sẽ đi trên triền núi, qua 18 cầu và 6 hầm chui.*
Người ta thấy rằng khi đoàn tàu chui qua hầm dài 600m của đèo Hải Vân thì mất 52 giây mới hoàn toàn ra khỏi hầm. Cũng vận tốc đó, người ta lại thấy đoàn tàu lướt qua một người đi bộ ngược chiều với nó trong 3,75 giây. Biết vận tốc người đi bộ là 3 km/h, hỏi vận tốc và chiều dài đoàn tàu là bao nhiêu?

Bài 3. ***(1,5 điểm)*** *Cho phương trình:* $x^2 + (5m+3)x + 4m^2 + 6m + 2 = 0$.

(a) *Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.*

(b) *Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $2x_1 - x_2 = 3$.*

Bài 4. **(3 điểm)** *Cho tam giác ABC vuông cân tại A cạnh a với M là trung điểm của BC. Điểm D là một điểm thuộc tia đối của tia MA sao cho $MD < MA$. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB và AC. Dựng $EH \perp MF$ (H thuộc MF).*

(a) *Chứng minh tứ giác $AHDF$ nội tiếp đường tròn tâm O và $FM \cdot FH = DF^2$.*

(b) *Chứng minh rằng $AF \cdot AC = AM \cdot AD$ và B, H, D thẳng hàng.*

(c) *Gọi S là giao điểm của MB và DE, P và Q theo thứ tự là trung điểm của BD và MF. Chứng minh $AS = BD$ và $AQ \perp QP$.*

—HẾT—

LỜI GIẢI

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2 điểm)

Câu hỏi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Câu trả lời	*A*	*B*	*C*	*A*	*D*	*C*	*C*	*B*	*D*	*A*

B. PHẦN TỰ LUẬN (8 điểm)

Bài 1. (a)
$$P(x) = \left(4 - \sqrt{x} - \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{x-4}\right)$$
$$= \left[\frac{(4-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right] \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}+2)^2 - 1}{4-x}\right]$$
$$= \frac{4-x}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{4-x}$$
$$= \sqrt{x}+3$$ **0,5đ**

Thay $x = 21 - 12\sqrt{3}$ vào $P(x)$, ta có:

$P(21-12\sqrt{3}) = \sqrt{21-12\sqrt{3}} + 3 = \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2} + 3 = 2\sqrt{3}$ **0,25đ**

(b) *Đặt $AH = x$ $(x > 0)$*

$\triangle ABC$ vuông tại B có BH là đường cao nên:

$$BH^2 = AH \cdot HC \Leftrightarrow \left(\frac{60}{13}\right)^2 = x \cdot (13 - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{144}{13} \\ x = \dfrac{25}{13} \end{array}\right.$$ **0,25đ**

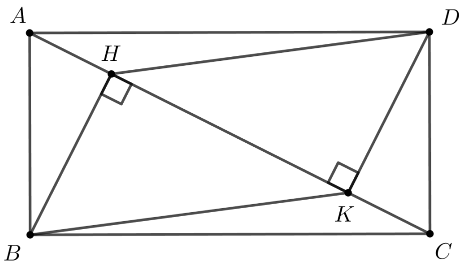
Vì $AB < BC$ suy ra $AH < HC$ nên ta loại trường hợp $AH = x = \dfrac{144}{25}$

Do đó $AH = \dfrac{25}{13}$

$\triangle ABH = \triangle CDK$ (ch.gn) suy ra $AH = CK = \dfrac{25}{13}$ và $BH = DK = \dfrac{60}{13}$

Ta có: $HK = AC - 2AH = \dfrac{119}{13}$ **0,25đ**

Diện tích tứ giác $BHDK$: $S_{BHDK} = 2S_{BHK} = BH \cdot HK = \dfrac{7140}{169}$ **0,25đ**



Bài 2. (a) $(2x^4-3x^2-9)(\sqrt{2x+1}+x-1)=0$ *(ĐKXĐ: $x \geq -\dfrac{1}{2}$)*

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^4-3x^2-9=0 & (1) \\ \sqrt{2x+1}+x-1=0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow (x^2-3)(2x^2+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3}\ (n) \\ x=-\sqrt{3}\ (l) \end{array}\right.$ **0,5đ**

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=1-x$ *(ĐK:$x \leq 1$)*

$\Leftrightarrow 2x+1=1-2x+x^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\,(n) \\ x=4\,(l) \end{array}\right.$ **0,5đ**

Vậy $S=\{0;\sqrt{3}\}$

(b) *Gọi x (m/s) là vận tốc của đoàn tàu; y (m) là chiều dài đoàn tàu. $(x, y>0)$*

Đổi đơn vị: 3 km/h = $\dfrac{5}{6}$ m/s

Đoàn tàu chui hoàn toàn khỏi hầm khi đuôi tàu chui ra khỏi hầm, nên quãng đường tàu đi sau 52 giây là: $600+y$ **0,25đ**

Đoàn tàu lướt qua người đi bộ nghĩa là đuôi tàu phải qua khỏi người đi bộ, nên tổng quãng đường của đoàn tàu và người đi bộ ngược chiều sau 3,75 giây bằng chiều dài đoàn tàu. **0,25đ**

Do đó ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 52x=600+y \\ 3,75x+3,75\cdot\dfrac{5}{6}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 52x-y=600 \\ 3,75x-y=-\dfrac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12,5 \\ y=50 \end{cases}$

0,25đ

Vậy đoàn tàu đi với vận tốc 12,5 m/s và có chiều dài 50m. **0,25đ**

Bài 3. (a) $\Delta=(5m+3)^2-4(4m^2+6m+2)=9m^2+6m+1=(3m+1)^2$ **0,25đ**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow (3m+1)^2>0 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{1}{3}$

0,25đ

Vậy $m \neq -\dfrac{1}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

(b) *Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq -\dfrac{1}{3}$*

Với $\Delta=(3m+1)^2$ suy ra phương trình có hai nghiệm

$$x=-m-1 \text{ hoặc } x=-4m-2$$

0,5đ

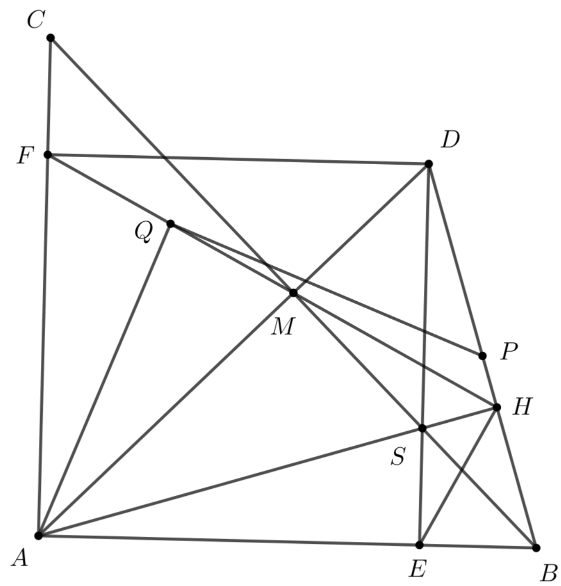
Khi $x_1=-m-1$ và $x_2=-4m-2$, ta có:

$2x_1 - x_2 = 3 \Leftrightarrow 2(-m-1) - (4m-2) = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (nhận) ***0,25đ***
Khi $x_1 = -4m-2$ và $x_2 = -m-1$, ta có:
$2x_1 - x_2 = 3 \Leftrightarrow 2(-4m-2) - (-m-1) = 3 \Leftrightarrow m = -\dfrac{6}{7}$ (nhận) ***0,25đ***
Vậy $m = \dfrac{3}{2}$ hoặc $m = -\dfrac{6}{7}$ thỏa yêu cầu bài.

Bài 4. (a) *Năm điểm A, E, H, D, F cùng thuộc đường tròn đường kính AD, vì vậy tứ giác $AHDF$ nội tiếp.* ***0,5đ***
$\triangle FMD \backsim \triangle FDH(g.g)$ Suy ra $FM \cdot FH = DF^2$ ***0,5đ***

(b) *$\triangle AFD \backsim \triangle AMC(g.g)$ Suy ra $AF \cdot AC = AM \cdot AD$.*
Theo tính chất đối xứng trục, $AF \cdot AC = AE \cdot AB$. ***0,5đ***
Suy ra $\triangle AEM \backsim \triangle ADB(c.g.c)$ suy ra tứ giác $BEMD$ nội tiếp.
Ta có: $\angle EDB = \angle EMB = \angle MEF = \angle MFE = \angle EDH$.
Vì vậy hai tia DH, DB trùng nhau suy ra B, H, D thẳng hàng. ***0,5đ***

(c) *Vì S là trực tâm của tam giác ABD nên AH đi qua S.*
$\triangle BMD = \triangle AMS(c.g.c)$ Suy ra $AS = BD$. ***0,5đ***
Ta có: $\triangle AEM \backsim \triangle ADB$ và $\triangle AEM = \triangle AFM$
Nên $\triangle AFM \backsim \triangle ADB$ Suy ra $\triangle AQM \backsim \triangle APB(c.g.c)$
Suy ra $\angle AQM = \angle APB$ suy ra tứ giác $APHQ$ nội tiếp,
suy ra $\angle AQP = \angle AHP = 90^\circ$ ***0,5đ***



Đề thi thử vào lớp 10 chuyên toán

1. Đề thi

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. *(**2,5 điểm**)*

(a) *Giải phương trình* $3x^3 + x + 3 + (8x - 3)\sqrt{2x^2 + 1} = 0.$

(b) *Cho phương trình* $(\sqrt{x} + 1)\left(x^2 - 3(m + 1)x + 2m^2 + 5m + 2\right) = 0$ *(m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn nghiệm này là bình phương nghiệm kia.*

(c) *n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 4, cho n số thực* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *thỏa mãn* $a_1 + a_2 + \cdots a_n = 0$ *và* $|a_1| + |a_2| + \cdots |a_n| = A$*. Chứng minh rằng*

$$a_n - a_1 \geq \frac{2A}{n}$$

Bài 2. *(**1,5 điểm**) Xét các số a, b, c khác 0 và đôi một phân biệt sao cho các phương trình sau đây có một nghiệm chung:*

$$ax^3 + bx + c = 0(1), bx^3 + cx + a = 0(2), cx^3 + ax + b = 0(3).$$

(a) *Chứng minh* $a + b + c = 0.$

(b) *Chứng minh rằng một trong các phương trình này có ba nghiệm (không nhất thiết phân biệt).*

Bài 3. *(**1,5 điểm**)*

(a) *Tìm số tự nhiên có hai chữ số sao cho nó bằng tổng bình phương các chữ số của nó.*

(b) *Tìm tất cả các số nguyên tố p, sao cho p có thể biểu diễn được dưới dạng* $\sqrt{\dfrac{a^2 - 4}{b^2 - 1}}$*, trong đó a, b là các số nguyên dương.*

Bài 4. *(**3,5 điểm**) Cho đường tròn* $(O; R)$ *và dây cung* $BC = R\sqrt{3}$ *cố định, A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Phân giác trong góc A cắt DE và BC lần lượt tại K, L.*

(a) *Tính* $\angle BAC$ *và* $\angle OHC$.

(b) *Chứng minh* $\dfrac{AK}{AL}$ *không đổi. Tìm vị trí của A để KL lớn nhất, tính giá trị đó theo R.*

(c) *Chứng minh đường thẳng d qua L vuông góc OA tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

(d) *Đường thẳng qua K vuông góc DE và đường thẳng qua L vuông góc BC cắt nhau tại P. Chứng minh AP luôn đi qua một điểm cố định.*

Bài 5. *(**1 điểm**) Có 10 viên bi vàng và 10 viên bi xanh được xếp thành một hàng. Chứng minh rằng tồn tại 10 viên bi liên tiếp sao cho số viên bi vàng và xanh bằng nhau.*

2. Đáp án

Bài 1. (a) *(**1 điểm**) Phương trình đã cho tương đương với*

$$\begin{aligned}
&3x\left(x^2+3\right)+(8x-3)\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=0.\\
\Leftrightarrow &3x\left(x^2+3\right)+\frac{2x^2(8x-3)}{\sqrt{2x^2+1}+1}=0\\
\Leftrightarrow &x\left[\frac{\left(3x^2+9\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)+2x(8x-3)}{\sqrt{2x^2+1}+1}\right]=0\\
\Leftrightarrow &x\left[\frac{\left(3x^2+9\right)\sqrt{2x^2+1}+18x^2+(x-3)^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}\right]=0
\end{aligned}$$

Dễ thấy $\dfrac{\left(3x^2+9\right)\sqrt{2x^2+1}+18x^2+(x-3)^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}>0$, *vậy* $x=0$ *là nghiệm duy nhất của phương trình.*

(b) *(**1 điểm**) Phương trình đã cho tương đương*

$$x^2-3(m+1)x+2m^2+5m+2=0 \Leftrightarrow x=m+2 \vee x=2m+1.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $x^2-3(m+1)x+2m^2+5m+2=0$ *có hai nghiệm không âm phân biệt, tức là*

$$\begin{cases} m+2\geq 0\\ 2m+1\geq 0\\ m+2\neq 2m+1\end{cases} \Leftrightarrow m\geq -\frac{1}{2}.$$

Do nghiệm này là bình phương nghiệm kia nên ta có 2 trường hợp.
Trường hợp 1. $(m+2)^2=2m+1 \Leftrightarrow m^2+2m+3=0$ *(vô nghiệm).*
Trường hợp 2. $(2m+1)^2=m+2 \Leftrightarrow 4m^2+3m-1=0 \Leftrightarrow m=-1$ *(loại)* $\vee m=\frac{1}{4}$ *(nhận).*

(c) *(**0,5 điểm**) Giả sử* $0\leq k\leq n$ *thỏa* $a_1\leq a_2\leq\cdots a_k\leq 0\leq a_{k+1}\leq\cdots a_n$. *Khi đó* $a_1+\cdots+a_n=0, -a_1-a_2\cdots-a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n=A$, *Suy ra* $a_1+\cdots a_k=\dfrac{-A}{2}$ *và* $a_{k+1}+\cdots a_n=\dfrac{A}{2}$. *Suy ra* $a_1\leq\dfrac{-A}{2k}$ *và* $a_n\geq\dfrac{A}{2(n-k)}$.
Suy ra $a_n-a_1\geq\dfrac{A}{2}(\dfrac{1}{n-k}+\dfrac{1}{k})\geq\dfrac{2A}{n}$.

Bài 2. (a) *(**0.75 điểm**)Gọi* x_0 *là nghiệm thực chung của ba đa thức. Khi đó ta có*

$$\begin{cases} ax_0^3+bx_0+c=0\\ bx_0^3+cx_0+a=0\\ cx_0^3+ax_0+b=0\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ba đẳng thức trên lại ta thu được

$$(a+b+c)\left(x_0^3+x_0+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x_0^3+x_0+1=0 \end{array}\right.$$

Giả sử x_0 thỏa mãn $x_0^3+x_0+1=0$, khi đó

$$ax_0^3+ax_0+a=0=ax_0^3+bx_0+c \Rightarrow ax_0+a=bx_0+c \Rightarrow x_0=\frac{c-a}{a-b}$$

Chứng minh tương tự được

$$x_0=\frac{c-a}{a-b}=\frac{a-b}{b-c}=\frac{b-c}{c-a} \Rightarrow x_0^3=1 \Rightarrow x_0=1 \text{ (vô lý)}$$

Do đó $a+b+c=0$.

(b) ***(0.75 điểm)****Do $a+b+c=0$ nên ta có 1 là nghiệm chung của ba đa thức*

$$\left\{\begin{array}{l} ax^3+bx+c=(x-1)\left(ax^2+ax-c\right) \\ bx^3+cx+a=(x-1)\left(bx^2+bx-a\right) \\ cx^3+ax+b=(x-1)\left(cx^2+cx-b\right) \end{array}\right. .$$

Vì a,b,c là ba số thực phân biệt suy ra tồn tại ít nhất hai số cùng dấu, hay trong ba số $\Delta_1=a^2+4ac, \Delta_2=b^2+4ab, \Delta_3=c^2+4cb$ có ít nhất một số dương. Kéo theo, tồn tại một đa thức có ba nghiệm thực.

Bài 3. (a) ***(0.5 điểm)*** *Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ ta có $10a+b=a^2+b^2$, suy ra a chẵn, xét trường hợp cụ thể ta có phương trình vô nghiệm.*

(b) ***(1 điểm) (0,25 điểm)****Dễ thấy, $p=2$ là một số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài, do*

$$2=\sqrt{\frac{4^2-4}{2^2-1}}$$

(0,75 điểm)*Giả sử $p>2$ là một số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, tồn tại các số nguyên dương a,b sao cho*

$$p=\sqrt{\frac{a^2-4}{b^2-1}}$$

hay

$$p^2\left(b^2-1\right)=(a-2)(a+2)$$

Do đó

$$p^2 \mid (a-2)(a+2).$$

Nhận thấy, p không thể chia hết đồng thời cả hai số $a-2$ và $a+2$, vì khi đó, sẽ có

$$p \mid (a+2)-(a-2)=4,$$

là điều vô lý, do p là số nguyên tố lớn hơn 2 . Vì thế, từ (2), do p là số nguyên tố, suy ra $p^2 \mid a-2$ hoặc $p^2 \mid a+2$. Từ đó, với lưu ý $a>2$ (dễ dàng suy ra từ (1)), ta được $a-2 \geq p^2$, hoặc $a+2 \geq p^2$; hay, $a \geq p^2+2$, hoặc $a \geq p^2-2$. Do vậy, ta có

$$2a+1>p^2-4$$

Từ (1), ta được:

$$p^2b^2 = a^2 + p^2 - 4$$

Từ (4), do $p > 2$ suy ra $p^2b^2 > a^2$(5). Hơn nữa, từ (3) và (4), ta có:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > a^2 + p^2 - 4$$
$$= p^2b^2$$

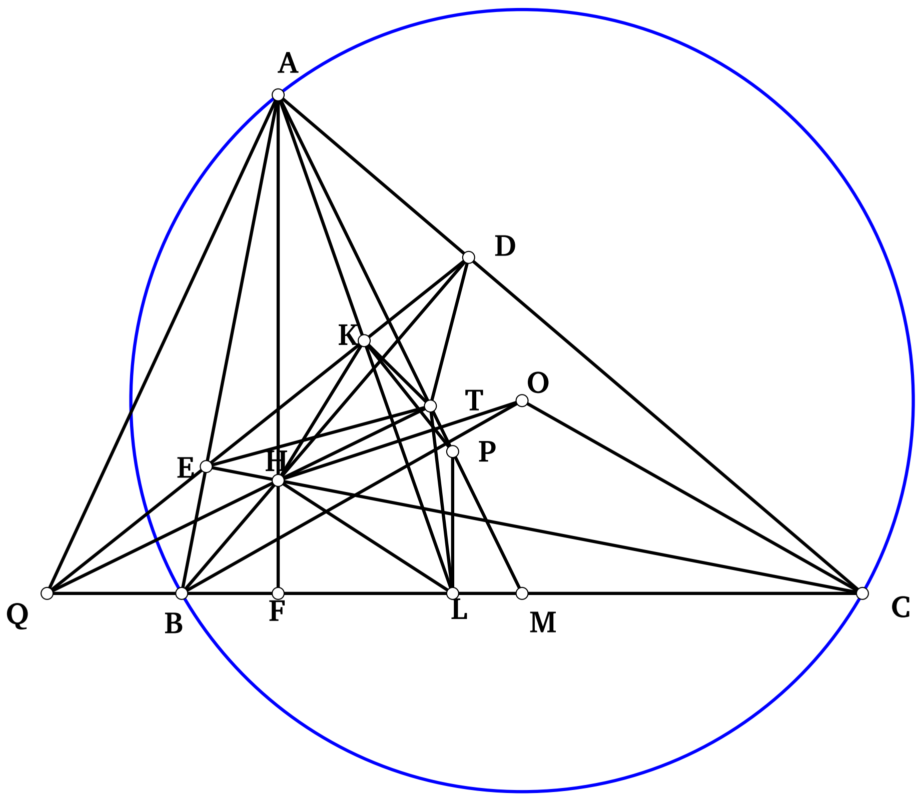
Từ (5) và (6), ta được:

$$a^2 < p^2b^2 < (a+1)^2$$

là điều vô lí, do a^2 và $(a+1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Điều vô lý nhận được ở trên cho thấy, không tồn tại số nguyên tố $p > 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy tóm lại, $p = 2$ là số nguyên tố duy nhất thỏa mãn yêu cầu dề bài.

Bài 4. (a) *(**1 điểm**)Ta có $\angle BAC = 60°$, suy ra $\angle BOC = \angle BHC = 120°$, tứ giác $BHOC$ nội tiếp, suy ra $\angle OHC = \angle OBC = 30°$.*

(b) *(**1 điểm**)Tam giác AEK và ACL đồng dạng, suy ra $\dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Khi đó $KL = \dfrac{1}{2}AL$, lớn nhất khi A là điểm chính giữa cung BC.*



(c) *(**0,5 điểm**)Gọi X là điểm chính giữa cung BC, M là trung điểm BC. Vẽ $XU \perp d$. Do $\angle BAH = \angle CAO$, suy ra $\angle ALB = \angle ALR$ (R là giao điểm của d và AO), suy ra $XU = XM$ không đổi. Nên d tiếp xúc với đường tròn tâm X bán kính XM.*

(d) ***(1 điểm)****Gọi M là trung điểm BC, Q là giao điểm của EF với BC, khi đó ta chứng minh được QH vuông góc AM tại T.*

Mặt khác MD, ME là tiếp tuyến của (AED), suy ra $\frac{TD}{TE} = \frac{AD}{AE} = \frac{KD}{KE}$ nên TK là phân giác $\angle ETD$.

Khi đó $\angle KTQ = \angle KTE + \angle ETQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A + 90^\circ - \angle B = \frac{1}{2}\angle A + \angle C = \angle KLQ$, suy ra $TKQL$ nội tiếp, do đó 5 điểm Q, K, T, P, L cùng thuộc đường tròn.

Mà $\angle ATP = 90^\circ$ suy ra T, P, M thẳng hàng.

Do đó AP qua trung điểm M của BC cố định.

Bài 5. ***(1 điểm)*** *Gọi các viên bi lần lượt xuất hiện theo thứ tự là $A_1, A_2, \cdots, A_{20}$. Với mỗi số nguyên dương $1 \le k \le 11$, gọi d_k là hiệu của số lượng bi màu xanh và số lượng bi màu đỏ trong bộ 10 bi liên tiếp là $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_{k+9}$. Yêu cầu của bài toán tương đương với việc tồn tại chỉ số $1 \le k \le 11$ để $d_k = 0$. Có các nhận xét sau:*

- *$d_1 - d_{11} = 0$. Thật vậy, hiệu này là chênh lệch giữa số bi màu xanh và số bi màu đỏ trong 20 bi đã cho, và hiệu này bằng 0 theo giả thiết.*
- *Với $1 \le k \le 11$ thì d_k là số chẵn. Thật vậy, nếu trong các bi $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_{k+9}$ có l bi màu xanh $(0 \le l \le 10)$ thì sẽ có $10 - l$ bi màu đỏ, do đó $d_k = 2l - 10$ là số chẵn.*
- *Với $1 \le k \le 10$ thì $d_k - d_{k+1} \in \{0, -2, 2\}$. Thật vậy, có các trường hợp sau xảy ra:*
  - *nếu A_k và A_{k+10} cùng màu thì $d_k - d_{k+1} = 0$;*
  - *nếu A_k màu đỏ và A_{k+10} màu xanh thì $d_k - d_{k+1} = 2$;*
  - *nếu A_k màu xanh và A_{k+10} màu đỏ thì $d_k - d_{k+1} = -2$.*

Với các nhận xét trên, có những trường hợp sau cần giải quyết:

- *Nếu $d_1 = 0$ hoặc $d_{11} = 0$ thì $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ là bộ điểm cần tìm.*
- *Ngược lại, giả sử rằng $d_1, d_{11} \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $d_1 < 0$ và $d_{11} > 0$. Gọi l là chỉ số lớn nhất để $d_l < 0$. Khi đó $d_l \le -2$ và $d_{l+1} \ge 0$. Hơn nữa:*

  $$2 \ge d_{l+1} - d_l \ge 0 - (-2) = 2,$$

  cho thấy $d_{l+1} = 0$ hay $A_{l+1}, A_{l+2}, \cdots, A_{l+10}$ là bộ bi cần tìm.

Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn.

THÀNH TÍCH TIÊU BIỂU HỌC VIÊN STAR EDUCATION

❖ Năm học 2015 – 2016

* 10 giải nhất Kỳ thi HSG thành phố môn Toán (Thủ khoa Đặng Đoàn Đức Trung).

* Hơn 100 học sinh đỗ vào PTNK và các trường chuyên tại Tp.HCM.

❖ Năm học 2016 – 2017

* Hơn 150 học sinh đỗ vào PTNK và các trường chuyên địa bàn Tp.HCM.

* 87 giải HSG Thành phố: 32 giải nhất, 30 giải nhì và 25 giải ba ở nhiều môn khác nhau, trong đó có Thủ khoa Toán - Tiêu Vĩnh Khang.

* 2 huy chương vàng Olympic 30/4: Cao Hoàng Đức và Vũ Thế Việt.

❖ Năm học 2017 – 2018

* Hơn 150 học sinh đỗ vào PTNK và các trường chuyên địa bàn Tp.HCM.

* 103 giải HSG Thành phố: 34 giải nhất, 33 giải nhì và 36 giải ba. Trong đó có các Thủ khoa, Á khoa: Lê Trung Nghĩa (Toán), Trần Song Hà Anh (Toán), Phan Hoàng Trường Thọ (Toán), Nguyễn Ngọc Vân Anh (Sinh học), Hồ Nguyễn Kỳ Trung (Á khoa Vật lý).

* 4 huy chương vàng Olympic 30/4: Nguyễn Việt Phương, Thái Tài, Nguyễn Mạc Nam Trung, Nguyễn Tiến Hoàng.

* 13 học sinh đạt giải kỳ thi HSG Quốc gia.

* Đặng Đoàn Đức Trung xuất sắc tham dự kỳ thi Tin học châu Á 2018.

❖ Năm học 2018 – 2019

* Gần 100 giải trong kỳ thi HSG Thành phố lớp 9 và lớp 12 và trên 20 giải trong kỳ thi HSG Quốc gia 2018.

* Trên 180 học sinh đỗ vào PTNK và các trường chuyên TP. HCM.

* Kỳ thi Olympic 30/4 có 5 huy chương vàng và 2 huy chương bạc môn Toán.

❖ Năm học 2019 – 2020

* Gần 100 giải trong kỳ thi HSG Thành phố lớp 9 và lớp 12.

* Trên 150 học sinh đỗ vào trường PTNK và các trường chuyên TP. HCM. Trong đó có 6 Thủ khoa và Á khoa (Nguyễn Phạm Thuận Thiên - Thủ khoa Toán PTNK; Phạm Trần Thanh Trúc - Thủ khoa Văn PTNK; Phạm Quang Minh - Thủ khoa Anh PTNK; Trương Hoàng Quân - Á khoa Lý PTNK & Thủ khoa Lý Lê Hồng Phong; Phạm Ân Trân - Á khoa Hóa & Á khoa Anh PTNK; Lư Tuấn Thành - Thủ khoa Toán THTH- ĐHSP).

* Trần Quang Hưng Thủ khoa 10 điểm môn Toán kỳ thi THPT Quốc gia 2020.

❖ Năm học 2020 – 2021

* Gần 200 giải trong kỳ thi HSG Thành phố lớp 9 và lớp 12.

* Đạt 13 giải HSG Quốc gia 2020 với 1 giải Nhất môn Toán (Phạm Hoàng Sơn), 5 giải Nhì, 4 giải Ba và 3 giải Khuyến khích ở các môn Toán, Lý, Hóa, Văn, Anh.

* Kỳ thi Olympic 30/4 có 15 huy chương Vàng - 6 huy chương Bạc - 2 huy chương Đồng với 3 Thủ khoa (Trương Công Huy Hoàng - Toán 10; Phạm Hoàng Sơn - Toán 11; Nguyễn Khắc Hồng Hải - Vật lý 10).

* Trên 200 học sinh đỗ PTNK và các trường chuyên TP. HCM. Trong đó có 3 Thủ khoa và Á khoa (Đoàn Ngọc Kim Châu - Thủ khoa Văn PTNK; Trịnh Thị Khánh Nguyên - Á khoa Toán PTNK; Đỗ Gia Huy - Á khoa Tin PTNK).

* Phạm Trần Lan Khuê - Thủ khoa đầu vào ngành Răng - Hàm - Mặt Đại học Y Dược Thành phố Hồ Chí Minh.

❖ Năm học 2021 – 2022

* Hơn 150 giải trong kỳ thi HSG Thành phố lớp 9 và lớp 12.

* Đạt 8 giải HSG Quốc gia NH 2021-2022 với 2 giải Nhất môn Toán (Phạm Hoàng Sơn, Trần Nguyễn Thanh Danh), 1 giải Nhì, 1 giải Ba và 4 giải Khuyến khích ở các môn Toán, Tin, Hóa.

* Phạm Hoàng Sơn - Thủ khoa môn Toán Kỳ thi HSG Quốc gia năm học 2021-2022, Huy chương Bạc Kỳ thi Olympic Toán Quốc tế 2022.

* Trên 180 học sinh đỗ vào PTNK. Trong đó có 2 Thủ khoa và Á khoa.

* 3 học sinh đạt điểm 10 môn Toán Kỳ thi THPT Quốc gia 2022 (Nguyễn Tuấn Khải, Nguyễn Minh Thức, Phan Anh Khôi)

❖ Năm học 2022 – 2023

* Hơn 140 giải trong kỳ thi HSG Thành phố lớp 9 và lớp 12.

* Đạt 11 giải HSG Quốc gia NH 2021-2022 với 1 giải Nhất môn Toán (Trần Nguyễn Thanh Danh), 5 giải Nhì, 1 giải Ba và 4 giải KK ở các môn Toán, Hóa.

* Kỳ thi Olympic 30/4 có 9 huy chương Vàng - 2 huy chương Bạc - 1 huy chương Đồng.