LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN NĂM HỌC 2022 - 2023

STAR EDUCATION

NGÀY 25 THÁNG 2 NĂM 2023

1. Ngày thi thứ nhất (24/02/2023)

Bài 1

Xét dãy số (a_n) thoả mãn $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ và $0 \le a_n \le 1$, với mọi $n \ge 1$.

a) Chứng minh rằng dãy (a_n) xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = (1 + 2a_1)(1 + 2^2a_2)\dots(1 + 2^n a_n)$ với mọi $n \ge 1$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải

a) Ta có: $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n} \Leftrightarrow a_{n+1}^3 = 3a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow a_{n+1}^3 - 3a_{n+1} + a_n = 0$.

Để chứng minh sự xác định duy nhất của dãy (a_n), ta đặt hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in [0, 1]$ và chứng minh phương trình $f(t) = -m$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi $m \in [0, 1]$. Thật vậy, ta có

$$f'(t) = 3t^2 - 3 \le 0, \ \ \forall t \in [0, 1].$$

Suy ra f là hàm số đơn điệu giảm trên $[0, 1]$. Mặt khác ta lại có $f(0) = 0$, $f(1) = -2$ và $-m \in [-1, 0]$ nên phương trình $f(t) = -m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[0, 1]$. Từ đây, bằng phép quy nạp đơn giản, ta có a_{n+1} được xác định duy nhất là nghiệm (thuộc đoạn $[0, 1]$) của phương trình $t^3 - 3t + a_n = 0$ $(n \ge 1)$. Vậy dãy số (a_n) xác định duy nhất.

Tiếp theo, ta nhận thấy $a_{n+1}^3 = 3a_{n+1} - a_n \le a_{n+1}$ vì $0 \le a_n \le 1$. Suy ra $a_n \ge 2a_{n+1}$. Do đó, $a_{n+1} \le \dfrac{a_n}{2} \le a_n$. Dãy (a_n) giảm và bị chặn dưới nên hội tụ theo định lý Weierstrass.

Cách khác. Đặt $u_n = \frac{a_n}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $0 \le u_n \le \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$8u_{n+1}^3 = 6u_{n+1} - 2u_n \iff u_n = 3u_{n+1} - 4u_{n+1}^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta nhận thấy rằng tồn tại $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $u_1 = \frac{1}{4} = \sin\alpha$. Suy ra

$$3u_2 - 4u_2^3 = \sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3}.$$

Xét hàm số $f(x) = 3x - 4x^3$ khả vi trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Ta có

$$f'(x) = 3 - 12x^2 \ge 0, \quad \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm. Do đó f đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Từ đẳng thức trên ta suy ra (chú ý rằng $\sin\frac{\alpha}{3} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$)

$$f(u_2) = f\left(\sin\frac{\alpha}{3}\right) \iff u_2 = \sin\frac{\alpha}{3}.$$

Hoàn toàn tương tự, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = \sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó

$$a_n = 2\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy, dãy (a_n) xác định duy nhất và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b) Trước hết ta nhắc lại một số bất đẳng thức quen thuộc, chứng minh xin dành cho bạn đọc

i) $\ln(1+x) < x$ đúng với mọi $x > 0$;

ii) $\sin x < x$ đúng với mọi $x > 0$.

Rõ ràng $b_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned}
\ln b_n &= \ln(1+2a_1) + \ln(1+2^2a_2) + \cdots + \ln(1+2^na_n)\\
&< 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^na_n\\
&= 2^2\sin\alpha + 2^3\sin\frac{\alpha}{3} + \cdots + 2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}\\
&< 2^2\left(\alpha + \frac{\alpha}{3} + \cdots + \frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\\
&= 4\alpha\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) < 12\alpha.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $b_n < e^{12\alpha}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hay dãy (b_n) bị chặn trên. Rõ ràng (b_n) là dãy tăng nên theo **Định lý hội tụ đơn điệu Weierstrass** ta suy ra (b_n) hội tụ.

$\square$

Bài 2

Cho các số nguyên a, b, c, α, β và dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng nếu $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$ thì có vô số cặp số nguyên (α, β) để $u_{2023} = 2^{2022}$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho có duy nhất một trong hai khẳng định sau là đúng:

i) Có vô số số nguyên dương m để $u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_{n_0+m}$ chia hết cho 7^{2023} hoặc 17^{2023};

ii) Có vô số số nguyên dương k để $u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_{n_0+k} - 1$ chia hết cho 2023.

Lời giải

a) Ta chứng minh

$$u_n = 2\alpha - \beta + (\beta - \alpha - 1)\cdot 2^{n-1} + n \quad (1)$$

với mọi $n \geq 1$.

Với $n = 1$ và $n = 2$, ta có

$$u_1 = 2\alpha - \beta + (\beta - \alpha - 1) + 1 = \alpha$$
$$u_2 = 2\alpha - \beta + 2(\beta - \alpha - 1) + 2 = \beta.$$

Giả sử (1) đúng với mọi $k \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), ta chứng minh (1) đúng với $n+1$. Thật vậy

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_{n+1} - 2u_n - 1 \\ &= 3\left[2\alpha - \beta + (\beta - \alpha - 1)\cdot 2^{n-1} + n\right] - 2\left[2\alpha - \beta + (\beta - \alpha - 1)\cdot 2^{n-2} + n - 1\right] - 1 \\ &= 2\alpha - \beta + (\beta - \alpha - 1)2^n + n + 1. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n+1$. Theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Khi đó $u_{2023} = 2\alpha - \beta + (\beta - \alpha - 1)2^{2022} + 2023$.

Với $t \in \mathbb{Z}$ bất kì, chọn $\alpha = (2^{2022} - 1)t - 2021$ và $\beta = t - \alpha - 2$. (2)

Suy ra $2 - \beta + \alpha = t$ và $\alpha + 2021 + (1 - 2^{2022})t = 0$, ta có

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta + (\beta - \alpha - 1)2^{2022} + 2023 &= \alpha + (2 - \beta + \alpha) + 2021 + (\beta - \alpha - 2)2^{2022} - 2^{2022} \\ &= \alpha + t + 2021 - t\cdot 2^{2022} + 2^{2022} \\ &= \alpha + 2021 + (1 - 2^{2022})t + 2^{2022} = 2^{2022}. \end{aligned}$$

Vậy với α, β thỏa (2) thì $u_{2023} = 2^{2022}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) (Chú ý: $2023 = 7 \times 17^2$)

Gọi (r_n) là dãy số dư của (u_n) khi chia cho 2023. Khi đó (r_n) là dãy tuần hoàn (Chứng minh xin dành cho bạn đọc).

Gọi $T \in \mathbb{N}^*$ là chu kì của dãy số dư (r_n). Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n_0} \vdots 7$ hoặc $u_{n_0} \vdots 17$. Ta chứng minh cho trường hợp $u_{n_0} \vdots 7$ (trường hợp còn lại làm tương tự).

  Vì $2023 \vdots 7$ nên
  $$\prod_{i=0}^{m} u_{n_0+i} \not\equiv 1 \pmod{2023}, \ \forall m \geq 1.$$
  Do đó mệnh đề ii) không thỏa mãn.

  Với mọi $l \in \mathbb{N}^*$, chọn $m = (2023l - 1)T$.

  Vì $u_{n_0+nT} \equiv u_{n_0} \pmod{2023}$, mà $7 \mid 2023$ nên $u_{n_0+nT} \equiv u_{n_0} \equiv 0 \pmod 7$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

  Do đó dãy $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots, u_{n_0+(2023l-1)T}$ có ít nhất 2023 số chia hết cho 7. Suy ra
  $$\prod_{i=0}^{m} u_{n_0+i} \text{ chia hết cho } 7^{2023}.$$
  Vậy mệnh đề i) thỏa mãn.

- Nếu $\begin{cases} u_n \not\vdots\, 7 \\ u_n \not\vdots\, 17 \end{cases}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, chọn $n_0 = 1$, rõ ràng mệnh đề i) không thỏa mãn.

  Mặt khác ta có $(u_n, 2023) = 1$, suy ra
  $$u_n^{\varphi(2023)} \equiv 1 \pmod{2023}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
  Đặt $a = \varphi(2023)$, với mọi $l \in \mathbb{N}^*$, chọn $k = laT$.

  Ta chứng minh $\prod_{i=0}^{k} u_{1+i} - 1 \vdots 2023$. Thật vậy, ta có
  $$\begin{aligned} &u_1 \equiv u_{1+T} \equiv \cdots \equiv u_{1+(la-1)T} \pmod{2023} \\ &u_2 \equiv u_{2+T} \equiv \cdots \equiv u_{2+(la-1)T} \pmod{2023} \\ &\ldots\ldots \\ &u_T \equiv u_{2T} \equiv \cdots \equiv u_{laT} \pmod{2023}. \end{aligned}$$
  Do đó
  $$u_i u_{i+T} \cdots u_{i+(la-1)T} \equiv u_i^a \equiv 1 \pmod{2023}, \ \forall i = \overline{1, T}.$$
  Từ đó ta kết luận $\prod_{i=0}^{k} u_{1+i} \equiv 1 \pmod{2023}$ hay $\prod_{i=0}^{k} u_{1+i} - 1 \vdots 2023$. Vậy mệnh đề i) đúng.

□

Bài 3

Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{kab+c^2}+\frac{1}{kbc+a^2}+\frac{1}{kca+b^2}\geq\frac{k+3}{a^2+b^2+c^2}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương (a,b,c) thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

Lời giải

Cho $a\to 0^+$ và $b=c>0$ ta được

$$\frac{2}{b^2}+\frac{1}{kb^2}\geq\frac{k+3}{2b^2}$$

hay $2+\frac{1}{k}\geq\frac{k+3}{2}$, giải ra ta được $k\leq 2$. Với $k=2$, ta cần chứng minh

$$\frac{1}{2ab+c^2}+\frac{1}{2bc+a^2}+\frac{1}{2ca+b^2}\geq\frac{5}{a^2+b^2+c^3}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương (a,b,c) thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

Trước hết ta chứng minh

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq\frac{2}{ab+bc+ac}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

đúng với mọi số thực dương a,b,c. Thật vậy, bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+2bc}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+2ac}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2+2ab}\geqslant\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+1,$$

hay

$$\frac{(b-c)^2}{a^2+2bc}+\frac{(c-a)^2}{b^2+2ca}+\frac{(a-b)^2}{c^2+2ab}\geqslant\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ac}.\qquad(1)$$

Nếu $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ thì (1) đúng.

Xét trường hợp $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$, khi đó

$$\begin{aligned}VT(1)\geqslant\frac{\left[\sum(b-c)^2\right]^2}{\sum(a^2+2bc)(b-c)^2}&=\frac{\left[\sum(b-c)^2\right]^2}{(ab+bc+ca)\left[\sum(b-c)^2\right]}\\&=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ac}.\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất.

Trở lại bài toán. Áp dụng bất đẳng thức trên, kết hợp với $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$, ta suy ra

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq\frac{2}{ab+bc+ac}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}=\frac{5}{a^2+b^2+c^2}.$$

Vậy số thực dương k lớn nhất cần tìm là 2. □

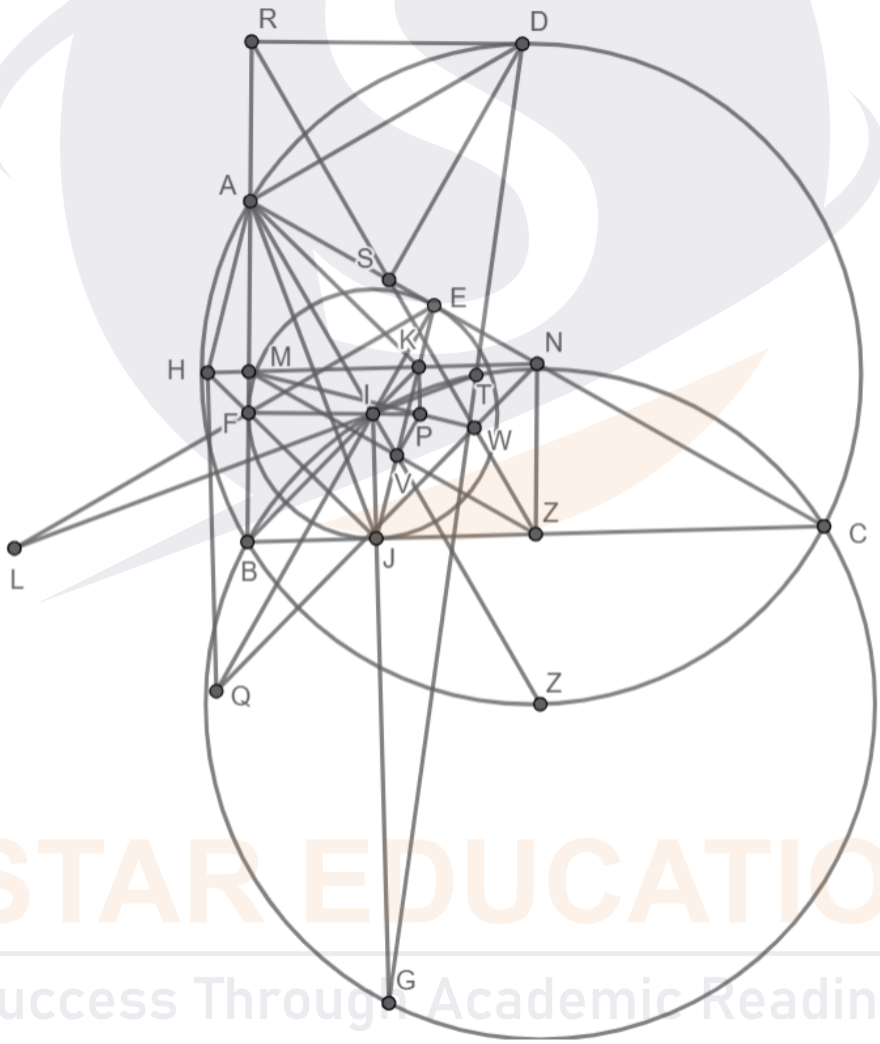
Bài 4

Cho tứ giác $ABCD$ có $DB = DC$ và nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC và J, E, F tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB. Đường thẳng MN cắt JE, JF lần lượt tại K, H; IJ cắt lại đường tròn (IBC) tại G và DG cắt lại (IBC) tại T.

a) Chứng minh rằng JA đi qua trung điểm của HK và vuông góc với IT.

b) Gọi R, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC. Lấy các điểm P, Q lần lượt trên IF, IE sao cho KP và HQ đều vuông góc với MN. Chứng minh rằng ba đường thẳng MP, NQ và RS đồng quy.

Lời giải



a) Gọi K' là giao điểm của các đường thẳng BI và EF.

$$\angle BIA = 90^\circ + \frac{\angle BCA}{2} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle BCA}{2}\right) = 180^\circ - \angle JEC = \angle AEK'.$$

Do đó tứ giác $AIK'E$ nội tiếp, suy ra $\angle AK'I = \angle AEI = 90°$, kết hợp với M là trung điểm AB suy ra tam giác MBK' cân tại M. Suy ra

$$\angle MK'B = \angle MBK' = \angle K'BC,$$

hay $MK' \parallel BC$, do đó M, N, K' thẳng hàng. Vậy nên $K' \equiv K$, suy ra $BK \perp AK$, kéo theo $KA \parallel JH$. Tương tự, $HA \parallel JK$, ta thu được $AKJH$ là hình bình hành, do đó AJ đi qua trung điểm MN.

Đường thẳng IT, BC cắt nhau tại L. Gọi Z là trung điểm cung BC không chứa A thì Z là tâm của đường tròn (BIC), mà $\angle DBZ = \angle DCZ = 90°$ nên DB, DC là tiếp tuyến của (BIC), suy ra $BTCG$ là tứ giác điều hòa. Khi đó

$$(BCLJ) = I(BCTG) = -1$$

nên L nằm trên đường thẳng EF, suy ra $IL \perp AJ$. Vậy $IT \perp AJ$.

b) Gọi Z là trung điểm BC.

Ta thấy RS là đường thẳng Simson của D đối với tam giác ABC nên dễ dàng chứng minh được R, S, Z thẳng hàng và $RS \parallel AI$.

Tiếp theo, ta chứng minh RS, MP, NQ đồng quy tại tâm nội tiếp của tam giác ZMN.

Ta có kết quả quen thuộc: AI, JE, MZ đồng quy, gọi điểm đồng quy là V. Khi đó, B, A, K, V cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

Tiếp theo, ta có:

$$\widehat{IVK} = \widehat{ABI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\widehat{IPK}. \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$\widehat{IKP} = 90^0 - \widehat{MKP} = 90^0 - \widehat{IBC} = 90^0 - \widehat{ABK} = \widehat{BAK} = \widehat{PIK}.$$

Do đó, $PI = PK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra P là tâm ngoại tiếp của tam giác IVK nên $PK = PV$.

Từ đó, ta có

$$\widehat{PVM} = \widehat{PVI} + \widehat{AVM} = \widehat{IAC} + 90^0 - \widehat{BAI} = 90^0.$$

Do đó, $PV = PK$ và PK, PV lần lượt vuông góc với MN, MZ.

Từ đó, P thuộc phân giác trong $\widehat{ZMN}$. Suy ra MP là phân giác trong $\widehat{ZMN}$.

Tương tự, ta có NQ là phân giác trong $\widehat{ZNM}$.

Do RS qua Z và $RS \parallel AI$ nên RS trùng với đường phân giác trong $\widehat{NZM}$.

Do đó, RS, MP, NQ đồng quy tại tâm nội tiếp của tam giác ZMN.

□

2. Ngày thi thứ hai (25/2/2023)

Bài 5

Xét các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2022$ và

$$f(x + g(y)) = xf(y) + (2023 - y)f(x) + g(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng f là một toàn ánh và g là một đơn ánh.

b) Tìm tất cả hàm số f, g thỏa mãn điều kiện bài toán.

Lời giải

a) Với $x, y \in \mathbb{R}$ ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề chứa biến

$$f(x + g(y)) = xf(y) + (2023 - y)f(x) + g(x).$$

Theo giả thiết bài toán, $P(x, y)$ đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ $P(0, y)$ ta suy ra

$$f(g(y)) = (2023 - y)f(0) + g(0) = 2022(2023 - y) + g(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng vế phải của đẳng thức trên là một đa thức bậc nhất theo biến y nên nhận mọi giá trị trên tập số thực, hay nói cách khác f là một toàn ánh.

Ta chứng minh g là đơn ánh. Xét $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tùy ý sao cho $g(x_1) = g(x_2)$, khi đó từ $P(0, x_1)$ và $P(0, x_2)$ ta suy ra

$$2022(2023 - x_1) + g(0) = 2022(2023 - x_2) + g(0) \text{ hay } x_1 = x_2.$$

Như vậy g là một đơn ánh, chứng minh hoàn tất.

b) Ta nhắc lại đẳng thức

$$f(g(y)) = (2023 - y)f(0) + g(0) = 2022(2023 - y) + g(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Từ $P(g(x), y)$ ta suy ra

$$f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) + (2023 - y)f(g(x)) + g(g(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (1), suy ra

$$f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) + (2023 - y)\left[2022(2023 - x) + g(0)\right] + g(g(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay đổi vai trò của x, y trong đẳng thức trên và đối chiếu với chính nó, suy ra

$$g(x)f(y) + g(g(x)) + (2023 - y)g(0) = g(y)f(x) + g(g(y)) + (2023 - x)g(0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vì f là toàn ánh nên tồn tại số thực a sao cho $f(a) = 0$. Thay $y = a$ vào (2), ta được

$$g(g(x)) = -g(0)x + g(a)f(x) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó C là hằng số. Thay lại vào (2), suy ra

$$g(x)f(y)-g(0)x+g(a)f(x)+C+(2023-y)g(0) = g(y)f(x)-g(0)y+g(a)f(y)+C+(2023-x)g(0),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thu gọn, ta được

$$g(x)f(y) + g(a)f(x) = g(y)f(x) + g(a)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = 0$ vào đẳng thức trên

$$2022g(x) + g(a)f(x) = g(0)f(x) + 2022g(a)$$

hay

$$g(x) = \frac{g(0) - g(a)}{2022}f(x) + g(a), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $g(a) = g(0)$ thì $a = 0$ hay $f(a) = f(0) = 0$, mâu thuẫn với $f(0) = 2022$. Như vậy $g(a) \neq g(0)$, từ đó suy ra g là một toàn ánh.

Do g là toàn ánh nên tồn tại b sao cho $g(b) = 0$. Từ $P(x, b)$ ta được

$$f(x) = xf(b) + (2023 - b)f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay lại vào $P(x, y)$ ta được

$$\begin{aligned} f(x + g(y)) &= xf(y) + (2023 - y)f(x) + f(x) - xf(b) + (b - 2023)f(x) \\ &= x(f(y) - f(b)) + f(x)(+1 + b - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay $y = 1 + b$ ta suy ra

$$f(x + g(1 + b)) = x(f(1 + b) - f(b)), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

hay hàm f tuyến tính trên $\mathbb{R}$, điều này cũng dẫn đến hàm g tuyến tính. Đến đây, ta chỉ cần thay lại vào $P(x, y)$ là hoàn tất, các bước còn lại xin dành cho bạn đọc.

$\square$

Bài 6

Có $n \geq 2$ lớp học tổ chức $m \geq 1$ tổ ngoại khóa cho học sinh. Lớp nào cũng có học sinh tham gia ít nhất một tổ ngoại khóa. Mọi tổ ngoại khóa đều có đúng a lớp có học sinh tham gia. Với hai tổ ngoại khóa bất kì, có không quá b lớp có học sinh tham gia đồng thời cả hai tổ này.

a) Tính m khi $n = 8$, $a = 4$, $b = 1$.

b) Chứng minh rằng $n \geq 20$ khi $m = 6$, $a = 10$, $b = 4$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của n khi $m = 20$, $a = 4$, $b = 1$.

Lời giải

a) Nếu $m = 1$, như vậy tổ ngoại sẽ có 8 lớp tham dự. Điều này mâu thuẫn. Nếu $m \geq 3$, xét 3 tổ X_1, X_2, X_3 bất kỳ ta có

$$\begin{aligned} n &\geq |X_1 \cup X_2 \cup X_3| \\ &= |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_2 \cap X_3| - |X_1 \cap X_3| + |X_1 \cup X_2 \cup X_3| \\ &\geq 4 + 4 + 4 - 1 - 1 - 1 = 9 \text{ (Mâu thuẫn)} \end{aligned}$$

Vậy $m = 2$, ta có thể lấy một trường hợp đơn giản là mỗi tổ có 4 lớp tham gia và không có lớp nào cùng tham gia 2 tổ.

b) Giả sử $n \leq 19$. Khi đó gọi S là số bộ $(A, \{B, C\})$ mà trong đó lớp A có học sinh tham gia tổ ngoại khóa B và C.
Có $C_6^2 = 15$ cặp B, C và hai tổ ngoại khóa bất kỳ thì có không quá 4 lớp đồng tham gia nên ta có $S \leq 15 \cdot 4 = 60$
Gọi $a_1, a_2, \cdots a_{19} \quad (a_i \geq 0, \forall i = \overline{1, 19})$ là số lượt tham gia tổ ngoại khóa của mỗi lớp. Có tất cả $6 \cdot 10 = 60$ lượt tham gia nên $a_1 + a_2 + \cdots a_{19} = 60$.
Quy ước: $C_0^2 = C_1^2 = 0$
Ta có:

$$S = C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + C_{a_3}^2 + \cdots C_{a_{19}}^2 = \frac{a_1 \cdot (a_1 - 1) + a_2 \cdot (a_2 - 1) + \cdots + a_{19} \cdot (a_{19} - 1)}{2}$$

Vì $S \leq 60$ nên $a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_{19}^2 \leq 60 \cdot 2 + a_1 + a_2 + \cdots a_{19} = 120 + 60 = 180$
Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$19(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_{19}^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots a_{19})^2 = 60^2$$

Do đó $a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_{19}^2 > 189$ (Mâu thuẫn).
Vậy $n \geq 20$.

c) Có tất cả $20 \cdot 4 = 80$ lượt tham gia nên sẽ có 1 lớp D có số lượt tham gia $\geq \left\lceil \frac{80}{n} \right\rceil$. Và các tổ ngoại khóa mà lớp D tham gia sẽ đều có chung 1 lớp đồng tham gia (là lớp D) và 3 lớp còn lại của các tổ ngoại khóa này hoàn toàn khác nhau. Do đó:

$$n \geq 3\left\lceil \frac{80}{n} \right\rceil + 1 \Rightarrow n - 1 \geq 3\left\lceil \frac{80}{n} \right\rceil \geq 3 \cdot \frac{80}{n} \Rightarrow n^2 - n - 240 \geq 0.$$

Suy ra $n \geq 16$.

Vậy min của n là 16. Ta có thể chỉ ra một trường hợp cụ thể: Mỗi lớp học đều tham gia vào đúng 5 tổ chức và 2 lớp học bất kỳ thì cùng tham gia vào đúng 1 tổ ngoại khóa.

Nhận xét: Với câu c, nếu ta sử dụng phương pháp đếm bằng 2 cách thì chỉ chứng minh được $m \geq 14$ và không có cách xếp nào thỏa mãn với $m = 14$ nên BĐT này không chặt. Vì vậy, ta phải tìm một phương pháp khác để đánh giá "chặt chẽ" hơn. □

Bài 7

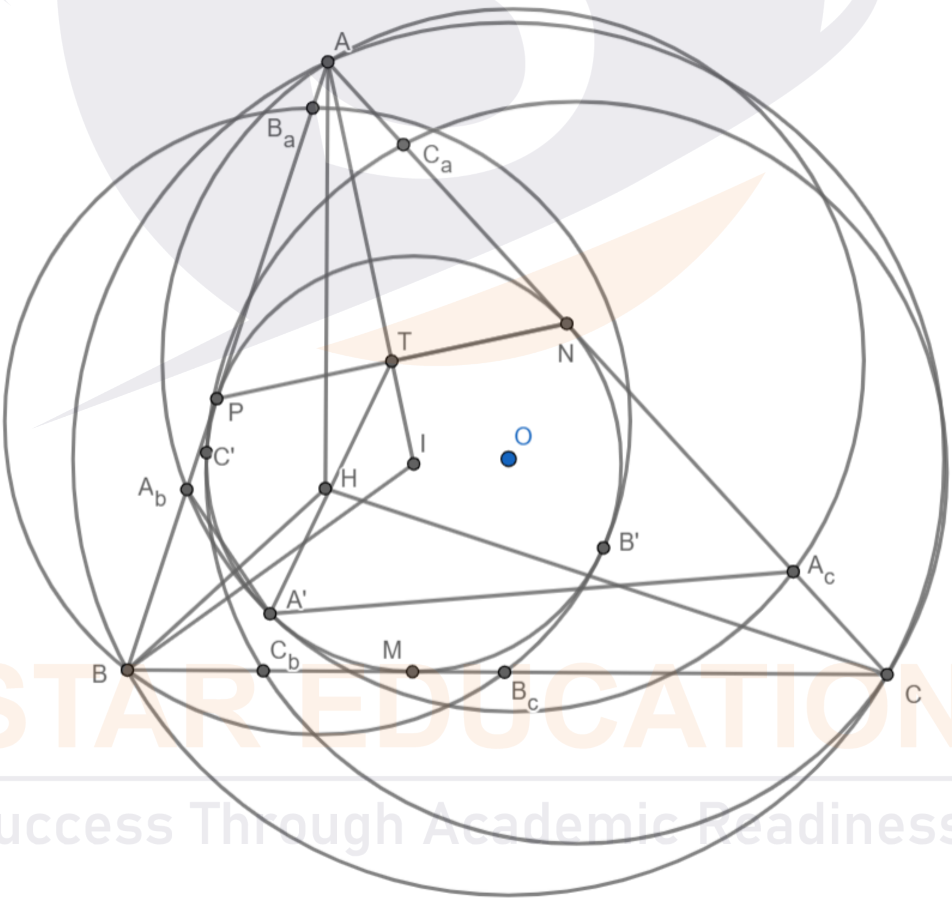
Cho tam giác nhọn, không cân ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại M, N, P. Gọi Ω_A là một đường tròn đi qua A, tiếp xúc ngoài với I tại một điểm A' và cắt lại AB, AC tương ứng tại A_b, A_c. Các đường tròn Ω_B, Ω_C và các điểm $B', B_a, B_c, C', C_a, C_b$ được xác định một cách tương tự.

a) Chứng minh rằng $B_cC_b + C_aA_c + A_bB_a \geq NP + PM + MN$.

b) Xét trường hợp A', B', C' tương ứng thuộc các đường thẳng AM, BN, CP. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh tương ứng thuộc ba đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b. Chứng minh rằng OH song song với IK.

Lời giải

a)



Xét thế hình như hình vẽ trên.

Gọi T là trung điểm của NP. Ta có (I) là đường tròn $A-$mixtilinear nội tiếp của tam giác AA_bA_c nên theo bổ đề Sawayama, T là tâm nội tiếp của tam giác AA_bA_c. Từ đó, ta có:

$$\widehat{A_bA'P} = \frac{1}{2}\widehat{AA_cA_b} = \widehat{ATA_b} - 90^0 = \widehat{PTA_b}.$$

Suy ra A_bPTA' nội tiếp, tương tự: TNA_cA' nội tiếp.

Từ đó, dễ dàng chứng minh được: $\triangle A_bA'P \sim \triangle TA'N$ đồng dạng.

Suy ra $\dfrac{A_bP}{TN} = \dfrac{A'P}{A'N} \Leftrightarrow A_bP = \dfrac{TN.A'P}{A'N}$ (1).

Tương tự: $A_cN = \dfrac{TP.A'N}{A'P}$ (2).

Từ (1) và (2), kết hợp với T là trung điểm NP suy ra:

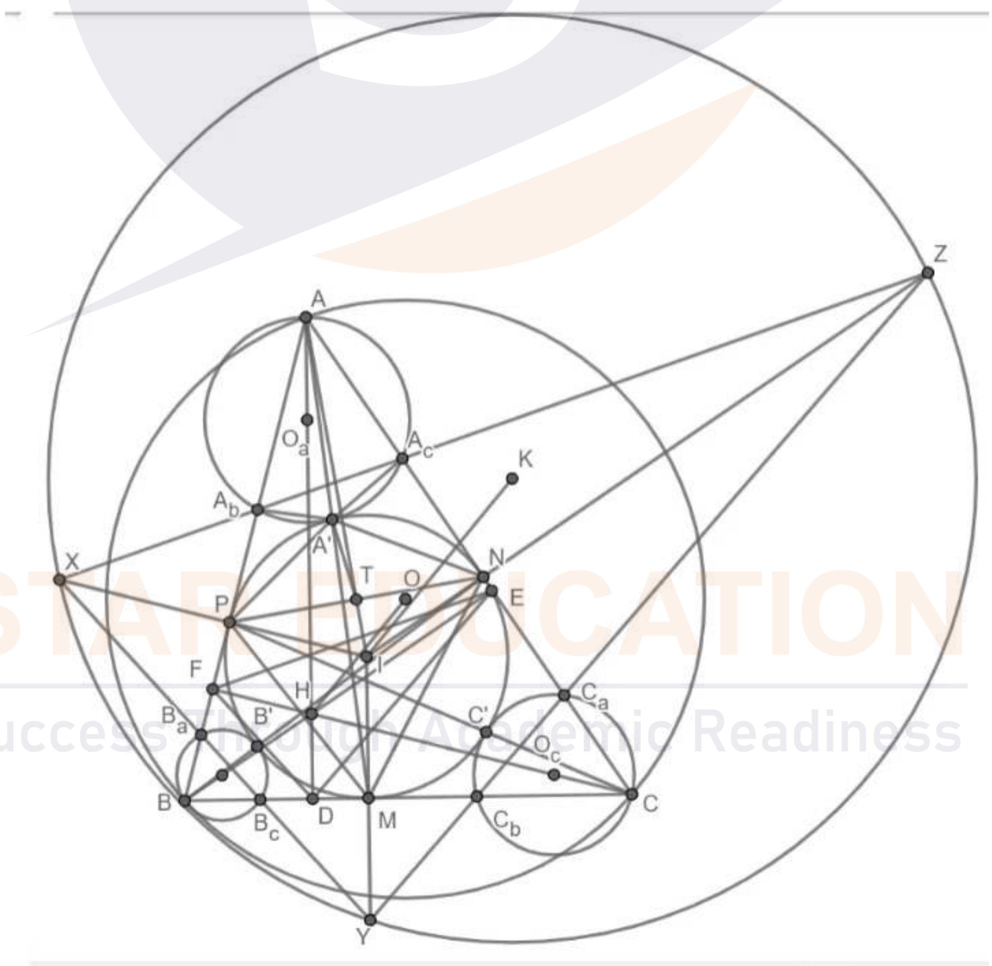
$$A_bP + A_cN = TP\left(\frac{A'P}{A'N} + \frac{A'N}{A'P}\right) \geq 2TP = NP. \ (3)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$PB_a + MB_c \geq NP \ (4), \ \ NC_a + MC_b \geq MN \ (5).$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức $(3), (4), (5)$ ta được bất đẳng thức cần phải chứng minh.

b)



Gọi giao điểm của các đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b là X, Y, Z như hình vẽ trên.
Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C của tam giác ABC.
Chứng minh tương tự câu a, ta có $\triangle A_bA'P \sim \triangle TA'N$. Suy ra $\widehat{A'A_bP} = \widehat{A'TN}$ (6).
Mặt khác, tứ giác $A'PMN$ là tứ giác điều hòa nên $A'M$ là đối trung của tam giác $A'PN$.
Từ đó, ta dễ dàng chứng minh $\triangle A'PM \sim \triangle A'TN$. Suy ra $\widehat{A'TN} = \widehat{A'PM}$ (7).
Từ (6)và (7) suy ra $\widehat{A'A_bP} = \widehat{A'PM} = \widehat{A'MC}$.
Suy ra tứ giác $A_bA'MB$ nội tiếp. Chứng minh tương tự tứ giác $A_cA'MC$ nội tiếp.
Từ đó, ta có:

$$\widehat{A_bA_cC} = \widehat{A_bA_cA'} + \widehat{A'A_cC} = \widehat{BAM} + \widehat{AMB} = 180^0 - \widehat{ABC}.$$

Suy ra tứ giác A_bA_cCB nội tiếp.
Do đó: $\widehat{AA_bA_c} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE}$.
Suy ra $A_bA_c \parallel EF$.
Chứng minh tương tự, ta thu được kết quả tam giác XYZ và tam giác FED có các cạnh tương ứng song song (8).
Theo câu a, ta có: $A_bP = \dfrac{TN.A'P}{A'N} = \dfrac{NP}{2} \cdot \dfrac{MP}{MN}$.
Tương tự: $PB_a = \dfrac{NP}{2} \cdot \dfrac{MP}{MN}$.
Do đó, $PA_b = PB_a$.
Ta lại có: $\widehat{XA_bB_a} = \widehat{AA_bA_c} = \widehat{ACB} = \widehat{BB_aB_c} = \widehat{XB_aA_b}$.
Suy ra tam giác XA_bB_a cân tại X, mà P là trung điểm của A_bB_a nên XP là phân giác trong của góc $\widehat{A_bXB_a}$ và XP vuông A_bB_a.
Từ đó, ta có XI là phân giác trong của góc $\widehat{YXZ}$.
Chứng minh tương tự, ta được I là tâm nội tiếp của tam giác XYZ.
Từ (8) suy ra tồn tại phép vị tự biến tam giác XYZ thành tam giác FDE, để ý OH là đường nối tâm ngoại tiếp và tâm nội tiếp của tam giác FDE, còn IK là đường nối tâm ngoại tiếp và tâm nội tiếp của tam giác XYZ nên OH là ảnh của IK qua phép vị tự này.
Do đó, $OH \parallel IK$.

$\square$