STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness

TẬP SAN TOÁN HỌC

Hướng tới kỳ thi tuyển sinh THPT
và kỳ thi tốt nghiệp THPT Quốc gia

Số 2 - 2019

Nguyễn Tăng Vũ - Nguyễn Ngọc Duy
Vương Trung Dũng - Lê Phúc Lữ
Lương Xuân Vinh - Võ Hữu Lê Trung - Đào Sơn Trà

Mục lục

1 Một số vấn đề về nghiệm của đa thức 3

2 Các bài toán về số chính phương 16

3 Ý tưởng chuyển đổi mô hình trong các bài toán hình học 26

4 Tứ giác điều hòa và một số ứng dụng 37

5 Đề thi thử 10 Chuyên Toán 48

6 Đề thi thử THPT Quốc gia 2019 53

NGUYỄN TĂNG VŨ - NGUYỄN NGỌC DUY - VƯƠNG TRUNG DŨNG
LÊ PHÚC LỮ - LƯƠNG XUÂN VINH - VÕ HỮU LÊ TRUNG - ĐÀO SƠN TRÀ

TẬP SAN TOÁN HỌC
STAR EDUCATION

Số 02, tháng 05 - 2019

Tập san Toán học ***STAR EDUCATION*** lần đầu ra mắt vào tháng 01/2019 được đông đảo bạn đọc đón nhận. Đó là tiền đề và động lực để chúng tôi tiếp tục đầu tư biên soạn và giới thiệu tập hai này.

Trong số này, đối tượng chủ yếu được hướng đến là các em lớp 9 chuẩn bị thi lớp 10 Chuyên và các bạn lớp 12 chuẩn bị THPT quốc gia. Bên cạnh hai đề thi thử theo đúng cấu trúc và đáp án chi tiết là các bài viết chuyên đề dành cho các bạn lớp 9 lên 10, cùng các bạn học sinh THPT chuyên, giúp các bạn dần làm quen với những kiến thức, kĩ năng mới trong giai đoạn chuyển tiếp.

Như tập trước, toàn bộ bài viết hiện thời được thực hiện bởi các giáo viên trẻ tại ***STAR EDUCATION***, những người có nhiều đam mê và gắn bó với công việc giảng dạy và chia sẻ các kiến thức về Toán phổ thông. Rất mong nhận được sự đóng góp của bạn đọc gần xa cho tập san để ngày một phong phú hơn, phục vụ tốt hơn cho cộng đồng dạy và học Toán.

Dự kiến số tiếp theo, Tập san số 03, sẽ được xuất bản vào tháng 11 tới với nội dung chủ yếu dành cho các bạn chuẩn bị thi HSG quốc gia, xin đón nhận các bài viết gửi về cho Ban biên tập. Mọi đóng góp xin gửi về các địa chỉ **nguyentangvu@gmail.com** hoặc **lephuclu@gmail.com**.

BAN BIÊN TẬP.

Một số vấn đề về nghiệm của đa thức

Vương Trung Dũng
(GV trường PTNK TPHCM)

1. Giới thiệu sơ lược

Trong những kì thi học sinh giỏi các bài toán về đa thức thường xuyên xuất hiện. Tuy nhiên trong chương trình THCS các kiến thức về đa thức chủ yếu dừng lại ở các khái niệm và các phép toán. Do đó khi vừa mới lên lớp 10 các kĩ năng của các em học sinh còn chưa cao. Bài viết này nhằm trình bày một vấn đề nhỏ về nghiệm của đa thức mà nội dung chính là Định lý Bézout và Định lý Viète, đối tượng hướng đến là các em học sinh cuối năm lớp 9 và đầu năm lớp 10.
Trong bài viết này ta kí hiệu $\mathbb{R}[x]$ là tập tất cả các đa thức có hệ số thực.

2. Cơ sở lý thuyết

Định lý 1 (Bézout)**.** Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $a \in \mathbb{R}$. Số dư khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - a$ là $f(a)$.

Chứng minh. Theo thuật toán chia Euclide, tồn tại đa thức $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ và số thực r sao cho

$$f(x) = (x-a)g(x) + r.$$

Trong đẳng thức trên thay $x = a$ vào hai vế ta được $f(a) = r$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1. *Đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = a$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $x - a$.*

Hệ quả 2. *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các nghiệm của $f(x)$ thì $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)|f(x)$. Đặc biệt nếu $\deg f = n$ thì $f(x) = c(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n), c \in \mathbb{R}$.*

Hệ quả 3. *Một đa thức bậc n có nhiều nhất là n nghiệm. Đặc biệt nếu $\deg f \le n$ có quá n nghiệm thì $f(x) = 0$.*

Hệ quả 4. *Nếu* $\deg f < n, \deg g < n$ *mà tồn tại* n *giá trị phân biệt của biến* x *sao cho* $f(x) = g(x)$ *thì* $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 1. *Biết đa thức* $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ *có 5 nghiệm phân biệt* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. *Đặt* $Q(x) = x^2 - 2$. *Tính* $Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$.

Lời giải. $P(x)$ có dạng $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$.
Ta có

$$\prod_{i=1}^{5} Q(x_i) = \prod_{i=1}^{5}(x_i^2 - 2) = \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{2} - x_i)\prod_{i=1}^{5}(-\sqrt{2} - x_i) = P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2}) = -23.$$

□

Ví dụ 2. *Cho* $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *sao cho* $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$, *với* a, b, c *là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh đa thức* $P(x)$ *không có nghiệm nguyên.*

Lời giải. Giả sử $P(x)$ có nghiệm nguyên x_0. Theo định lý Bézout

$$P(x) = (x - x_0)Q(x), \quad (1)$$

với $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Từ đó suy ra

$$1 = |P(a)| = |a - x_0||Q(a)|. \quad (2)$$

Do đó $|a - x_0| = 1$, lập luận tương tự ta được $|b - x_0| = |c - x_0| = 1$. Như vậy $a - x_0, b - x_0, c - x_0 \in \{-1, 1\}$. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai trong ba số này bằng nhau từ đó tồn tại hai trong ba số a, b, c bằng nhau, mâu thuẫn. Vậy $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

□

Định lý 2 (Viète thuận). Cho đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$, trong đó

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

trong đó $a_i \in \mathbb{R}$ và $a_n \neq 0$. Giả sử rằng $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm (không nhất thiết phân biệt) của $f(x)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Chứng minh. Định lý Viète có một ứng dụng rất lớn trong các bài toán về nghiệm của đa thức nhưng chứng minh của nó thì không hề khó. Thật vậy, vì $x_1, x_2, ..., x_n$ là các nghiệm của f nên ta có thể viết lại đa thức này dưới dạng

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n).$$

Khai triển vế phải rồi nhóm về dạng chuẩn tắc, sau đó so sánh hệ số của các số mũ tương ứng ở hai vế ta được điều phải chứng minh.
Lưu ý là định lý Viète vẫn đúng trong trường hợp f không đủ n nghiệm thực, nhưng do đối tượng của bạn đọc nên nội dung bài viết không đề cập đến.

□

Ví dụ 3. *Tìm tất cả các giá trị của a để nghiệm x_1, x_2, x_3 của đa thức $x^3 - 6x^2 + ax + a$ thỏa mãn*

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

Lời giải. Đặt $y = x - 3$, khi đó $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 3, y_3 = x_3 - 3$ là nghiệm của đa thức

$$(y + 3)^3 - 6(y + 3)^2 + a(y + 3) + a = y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + 4a - 27.$$

Theo định lý Viète

$$\sum_{i=1}^{3} y_i = -3, \sum_{1 \le i < j \le 3} y_i y_j = -9, \prod_{i=1}^{3} y_i = 27 - 4a.$$

Mặt khác theo giả thiết $\sum_{i=1}^{3} y_i^3 = 0$. Mà

$$\sum_{i=1}^{3} y_i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{3} y_i\Big)^3 - 3\Big(\sum_{1 \le i < j \le 3} y_i y_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{3} y_i\Big) + 3\prod_{i=1}^{3} y_i.$$

Dô đó điều kiện cần và đủ của a là

$$0 = (-3)^3 - 3(a - 9)(-3) + 3(27 - 4a) = -27 - 3a \Leftrightarrow a = -9.$$

□

Ví dụ 4. *Chứng minh đa thức $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + ... + 2n^{n-1}x + 2n$ không thể có đủ n nghiệm thực.*

Lời giải. Giả sử $P(x)$ có đủ n nghiệm thực $x_1, x_2, ..., x_n$. Theo định lý Viet

$$\sum_{i} x_i = -2n, \sum_{i<j} x_i x_j = 2n^2.$$

Khi đó

$$\sum_{i<j} x_i x_j = \frac{1}{2}(\sum_{i} x_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i} x_i^2 \le \frac{n-1}{2n}(\sum_{i} x_i)^2 = 2n(n-1) < 2n^2,$$

vô lí. Vậy ta có điều phải chứng minh.

□

Ta ký hiệu

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\sigma_2=\sum_{1\le i<j\le n}^{n}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},...,$$
$$\sigma_k=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

và gọi σ_k là các đa thức đối xứng bậc k của các số $x_1,x_2,...,x_n$.

Định lý 3 (Viète đảo)**.** Cho $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$. Gọi σ_k là các đa thức đối xứng bậc k của n số đã cho. Khi đó $x_1,x_2,...,x_n$ là nghiệm của phương trình

$$X^n-\sigma_1X^{n-1}+\sigma_2X^{n-2}+...+(-1)^{n-1}\sigma_1X+(-1)^n\sigma_n=0.$$

Ví dụ 5. *Gọi $a<b<c$ là 3 nghiệm của phương trình*

$$x^3-3x+1=0.$$

1. *Tính* $A=\dfrac{1-a}{1+a}+\dfrac{1-b}{1+b}+\dfrac{1-c}{1+c}$;
2. *Tìm một đa thức bậc 3 nhận a^2-2,b^2-2,c^2-2 làm nghiệm;*

Lời giải. 1. Ta có

$$A+3=\frac{1-a}{1+a}+1+\frac{1-b}{1+b}+1+\frac{1-c}{1+c}+1=2\Big(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\Big).$$

Mặt khác, đặt $x=\dfrac{1}{1+a}$, khi đó $a=\dfrac{1}{x}-1$. Vì $a^3-3a+1=0$ nên

$$\Big(\frac{1}{x}-1\Big)^3-3\Big(\frac{1}{x}-1\Big)+1=0\Leftrightarrow 3x^3-3x+1=0.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{1+a},\dfrac{1}{1+b},\dfrac{1}{1+c}$ là 3 nghiệm của phương trình trên, do đó

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=0.$$

Vậy $A=-3$.

2. Theo định lý Viète $a+b+c=0,ab+bc+ca=-3$ và $abc=-1$. Đặt $P(x)=x^3-3x+1=(x-a)(x-b)(x-c)$, ta có

$$a^2-2+b^2-2+c^2-2=a^2+b^2+c^2-6=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)-6=0.$$

Lại có

$$\begin{aligned}&(a^2-2)(b^2-2)+(b^2-2)(c^2-2)+(c^2-2)(a^2-2)\\=\;&a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-4(a^2+b^2+c^2)+12\\=\;&(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)-3.6+12\\=\;&-3.\end{aligned}$$

Cuối cùng

$$\begin{aligned} & (a^2-2)(b^2-2)(c^2-2) \\ = & (\sqrt{2}-a)(\sqrt{2}+a)(\sqrt{2}+c)(-\sqrt{2}-a)(-\sqrt{2}-b)(-\sqrt{2}-c) \\ = & P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2}) \\ = & -1. \end{aligned}$$

Theo định lý Viète đảo ta có a^2-2, b^2-2, c^2-2 là nghiệm của đa thức $x^3-3x+1=0$.

□

3. Bài tập có lời giải

Bài toán 1. Định m sao cho $F=x^3+y^3+z^3+mxyz$ chia hết cho $x+y+z$.

Lời giải. Xem F là một đa thức theo biến x. Theo giả thiết $F(x)\vdots[x-(-y-z)]$ suy ra

$$F(-y-z)=0 \Leftrightarrow (-y-z)^3+y^3+z^3+m(-y-z)yz \Leftrightarrow -yz(y+z)(3+m)=0,$$

với mọi $y,z\in\mathbb{R}$. Từ đó $m=-3$. □

Bài toán 2. Canada 2001 Cho $P(x)$ là tam thức bậc hai có các hệ số nguyên thỏa mãn đồng thời:

(a) Cả hai nghiệm đều nguyên;

(b) Tổng các hệ số là một số nguyên tố;

(c) Tồn tại số nguyên k sao cho $P(k)=55$.

Chứng minh rằng $P(x)$ có một nghiệm bằng 2 và hãy tìm nghiệm còn lại.

Lời giải. Gọi $r_1\le r_2$ là hai nghiệm. Ta có $P(x)=ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)$, từ đó $P(1)=a+b+c=a(1-r_1)(1-r_2)=p$ nên $a\in\{\pm1,\pm p\}$.
Nếu $a=p$ thì $(1-r_1)(1-r_2)=1$ nên $r_1=r_2=0$ hoặc $r_1=r_2=2$ (mâu thuẫn với (c)).
Nếu $a=-p$ thì $(1-r_1)(1-r_2)=-1$ nên $r_1=0, r_2=2$ (cũng mâu thuẫn).
Vì $P(k)=a(k-r_1)(k-r_2)=-5.11$ nên ta được

$$\begin{cases} a=1 \\ k-r_1=55 \\ k-r_2=1 \end{cases} \quad hay \quad \begin{cases} a=1 \\ k-r_1=11 \\ k-r_2=5 \end{cases}$$

Trong trường hợp đầu tiên ta được $r_2=r_1+54, b=-2r_1-54$ và $c=r_1(r_1+54)$ do đó $r_1^2+52r_1-(53+p)=0$ nên

$$r_1=\frac{-52\pm\sqrt{52^2+4(53+p)}}{2}=-26\pm\sqrt{26^2+53+p}=-26\pm\sqrt{27^2+p}.$$

Đặt $h^2 = 27^2 + p \Leftrightarrow p = (h+27)(h-27)$, vì p là nguyên tố nên $h - 27 = 1 \Rightarrow h = 28$ nhưng khi đó $p = 55$ không là số nguyên tố.
Trong trường hợp thứ hai $r_2 = r_1 + 6$ nên $b = -2r_1 - 6$ và $c = r_1(r_1+6)$, do đó $p = 10(2r_1+6) + r_1^2 + 6r_1$ hoặc

$$r_1^2 + 4r_1 - (5+p) = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm \sqrt{3^2 + p}.$$

Đặt $i^2 = 3^2 + p \Leftrightarrow p = (i+3)(i-3)$, vì p là số nguyên tố nên $i = 4$ và do đó $p = 7 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 8$. □

Bài toán 3. Cho $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, trong đó $a_k = \pm 1$. Biết $P(x)$ có n nghiệm, chứng minh rằng $n \leq 3$.

Lời giải. Giả sử $x_1, \ldots, x_n$ là các nghiệm của $P(x)$. Ta có $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3$ và $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ là nghiệm của đa thức $Q(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + 1$. Ta có $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = 3$. Suy ra

$$9 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\Big) \geq n^2.$$

Do đó $n \leq 3$. □

Bài toán 4. Cho các số thực a, b, c và phương trình $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16} + x_4^{16} = 4$. Tìm các nghiệm đó.

Lời giải. Theo định lý Viète ta có $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4$.
Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}
16 &= (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \\
&\leq 4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) \\
&\leq 4\sqrt{4(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4)} \\
&\leq 4\sqrt{4\sqrt{4(x_1^8+x_2^8+x_3^8+x_4^8)}} \\
&\leq 4\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{4(x_1^{16}+x_2^{16}+x_3^{16}+x_4^{16})}}} = 16.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$. □

Bài toán 5. VMO 1991 Giả sử đa thức $P(x) = x^{10} - 10x^9 + 39x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_1x + a_0$ với các hệ số thực $a_7, \ldots, a_0$ sao cho đa thức $P(x)$ có 10 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng các nghiệm này thuộc đoạn $[-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}]$.

Lời giải. Gọi $x_1, x_2, ..., x_{10}$ là các nghiệm của $P(x)$. Theo định lý Viète ta có

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10 \text{ và } \sum_{1\le i<j\le 10} x_i x_j = 39.$$

Do đó

$$\Big(\sum_{i=1}^{10} x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 10} x_i x_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100 - 2.39 = 22.$$

Hơn nữa

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{10} x_i + 10 = 12 \Rightarrow (x_i-1)^2 \le 12 < (3.5)^2,$$

với mọi $i = 1, 2, ..., 10$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 6. Cho các số thực a, b trong đó $a \neq 0$. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của phương trình

$$ax^4 + bx^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

không đồng thời là nghiệm thực.

Lời giải. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ lần lượt là các nghiệm của phương trình đã cho. Dễ thấy các nghiệm này đều khác 0 và có tích bằng $\frac{1}{a}$. Khi đó nghiệm của phương trình $x^4 + x^3 + x^2 + bx + a = 0$ lần lượt là

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \beta_3 = \frac{1}{\alpha_3}, \beta_4 = \frac{1}{\alpha_4}.$$

Theo định lí Viète

$$\sum_{j=1}^{4} \beta_j = -1, \sum_{1\le j<k\le 4} \beta_j \beta_k = 1.$$

Dẫn đến

$$\sum_{j=1}^{4} \beta_j^2 = \Big(\sum_{j=1}^{4} \beta_j\Big)^2 - 2\Big(\sum_{1\le j<k\le 4} \beta_j \beta_k\Big) = 1 - 2 = -1.$$

Vô lí, bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 7. Giả sử đa thức $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng:

1. $0 < 3ab \le 1$;
2. $b \ge 9a$;
3. $b \ge \sqrt{3}$.

Lời giải. 1. Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của đa thức đã cho. Khi đó theo Định lý Viète, ta có

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{a}, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{b}{a}, x_1x_2x_3=\frac{1}{a}.$$

Từ đó suy ra $a>0$ nên $b>0$, dẫn đến $ab>0$. Từ bất đẳng thức

$$(x_1+x_2+x_3)^2 \geq 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

ta được $\frac{1}{a^2} \geq 3.\frac{b}{a}$ dẫn đến $0<3ab \leq 1$.

2. Vì $(x_1+x_2+x_2)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) \geq 9x_1x_2x_3$ nên $\frac{b}{a^2} \geq \frac{9}{a}$, dẫn đến $b \geq 9a$.

3. Theo bất đẳng thức $(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 \geq 3x_1x_2x_3(x_1+x_2x+x_3)$ ta được $\frac{b^2}{a^2} \geq \frac{3}{a^2}$. Dẫn đến $b^2 \geq 3$ và vì $b \geq 0$ nên $b \geq \sqrt{3}$.

□

Bài toán 8. Cho đa thức $x^3+\sqrt{3}(a-1)x^2-6ax+b=0$ có 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$|b| \leq |a+1|^3.$$

Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của đa thức đã cho, theo định lý Viète

$$x_1+x_2+x_3=-\sqrt{3}(a-1), x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-6a, x_1x_2x_3=-b.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{|b|}=\sqrt[3]{|x_1|.|x_2||x_3|} &\leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}\\
&= \sqrt{\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}{3}}\\
&= \sqrt{\frac{3(1-a)^2+12a}{3}}\\
&= |a+1|.
\end{aligned}$$

Suy ra $|b| \leq |a+1|^3$, điều phải chứng minh. □

Bài toán 9 (Mathematical Reflections S455). Cho $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho tất cả các nghiệm của đa thức

$$P(x)=x^4-x^3+ax+b$$

có 4 nghiệm thực.

1. Chứng minh rằng $a+b \geq 0$;

2. Chứng minh rằng $P\left(-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{16}$.

Lời giải. 1. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 nghiệm của đa thức đã cho. Theo định lý Vièta ta có

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\\
&x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0\\
&-x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = a\\
&x_1x_2x_3x_4 = b.
\end{aligned}$$

Từ hai phương trình đầu ta được

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$1 = x_1^2 + (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geq x_1^2 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + (1 - x_1)^2.$$

Từ đó ta có

$$-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1.$$

Hoàn toàn tương tự $-\frac{1}{2} \leq x_2, x_3, x_4 \leq 1$. Khi đó vì $P(x) = (x - 1x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ nên dễ thấy

$$P(1) \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 0.$$

2. Bây giờ ta cần chứng minh

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{16} \Leftrightarrow a \geq 2b.$$

Nếu $b \leq 0$ thì từ $a + b \geq 0$ ta suy ra $a \geq 0$ nên hiển nhiên nhiên $a \geq 2b$. Giả sử $b > 0$, thế thì $x_1x_2x_3x_4 > 0$ và do đó ta có

$$a \geq 2b \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \leq -2. \quad (1)$$

Trong trường hợp này phải có hai nghiệm là số dương và hai nghiệm là số âm. Không mất tổng quát giả sử $x_1, x_2 > 0$ và $x_3, x_4 < 0$. Vì $-\frac{1}{2} \leq x_4 \leq 1$ nên $2x_4 + 1 \geq 0, 1 - x_4 \geq 0$ và $x_1x_2x_3 < 0$. Dẫn đến

$$\begin{aligned}
x_4^2(1 - x_4) \geq x_1x_2x_3(2x_4 + 1) &\Leftrightarrow x_4^2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \geq 2x_1x_2x_3x_4\\
&\Leftrightarrow \frac{x_4(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1x_2x_3} - \frac{1}{x_4} \geq 2\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \leq -2.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh xong.

□

Bài toán 10. Cho số tự nhiên $k > 0$ và hai số thực a, b sao cho $x^k + ax + 1$ chia hết cho $x^2 + bx + 1$ và phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$ có hai nghiệm. Chứng minh $a(a-b) = 0$.

Lời giải. Theo giả thiết tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $x^k + ax + 1 = P(x)(x^2 + bx + 1)$ (1). Gọi r_1, r_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$. Khi đó

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 + bx + 1.$$

Theo định lý Viète $\begin{cases} r_1 + r_2 = -b \\ r_1 r_2 = 1. \end{cases}$ Thay vào (1) ta được

$$0 = \sum_{i=1}^{2} \left(r_i^k + ar_i + 1 \right) = r_1^k + r_2^k + a(r_1 + r_2) + 2,$$

suy ra

$$r_1^k + r_2^k = -a(r_1 + r_2) - 2 = ab - 2$$

và do đó

$$r_1^k + r_2^k = -a(r_1 + r_2) - 2 = ab - 2.$$

Sử dụng (1) một lần nữa ta được

$$a^2 r_1 r_2 = (r_1^k + 1)(r_2^k + 1) = (r_1 r_2)^k + r_1^k + r_2^k + 1.$$

Suy ra $a^2.1 = 1^k + (ab - 2) + 1 = ab \Leftrightarrow a(a - b) = 0.$

□

Bài toán 11. Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên thỏa mãn các phương trình $P(x) = 1, P(x) = 2, P(x) = 3$ có ít nhất một nghiệm nguyên lần lượt là x_1, x_2, x_3.

1. Chứng minh x_1, x_2, x_3 là nghiệm nguyên duy nhất của các phương trình trên.
2. Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 5$ có tối đa một nghiệm nguyên.

Lời giải.

1. Vì phương trình $P(x) = 2$ nhận $x = x_2$ làm nghiệm nên

$$P(x) = (x - x_2)q(x) + 2 \quad (1).$$

Vì $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên mà x_2 nguyên nên $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Trong (1) lần lượt thay x bởi x_1, x_3 ta được

$$\begin{cases} 1 = P(x_1) = (x_1 - x_2)q(x_1) + 2 \\ 3 = P(x_3) = (x_3 - x_2)q(x_3) + 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)q(x_1) = -1 \\ (x_3 - x_2)q(x_3) = 1 \end{cases}.$$

Hơn nữa $x_1 \neq x_3$ nên $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 - x_2 = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_2 = 1. \end{cases}$

Trong hai trường hợp ta đều có $x_2 = \dfrac{x_1+x_3}{2}$. Giả sử phương trình $P(x)=2$ còn có nghiệm nguyên $x_2' \neq x_2$ áp dụng lại lập luận trên ta lại có $x_2' = \dfrac{x_1+x_3}{2} = x_2$, mâu thuẫn. Vậy phương trình này chỉ có một nghiệm nguyên duy nhất là x_2.
Tương tự cho hai phương trình còn lại.

2. Xét phương trình $P(x)=5$.
Nếu phương trình này không có nghiệm nguyên thì bài toán là hiển nhiên.
Nếu phương trình này có một nghiệm nguyên x_5 thì từ (1) suy ra

$$5 = P(x_5) = (x_5-x_2)q(x_5)+2 \Rightarrow (x_5-x_2)q(x_5) = 3.$$

Suy ra $x_5 - x_2 \in \{\pm1, \pm3\}$.
Nếu $x_5 - x_2 = \pm1$ thì x_5 phải trùng với x_1 hoặc x_3, vô lý.
Nếu $x_5 - x_2 = \pm3$. Vì phương trình $P(x)=3$ nhận x_3 làm nghiệm nên

$$P(x) = (x-x_3)r(x)+3 \Rightarrow 5 = P(x_5) = (x_5-x_3)r(x_5)+3.$$

Để ý rằng $r(x)\in\mathbb{Z}[x]$ nên từ $(x_5-x_3)r(x_5)=2$ nên $x_5-x_3\in\{\pm1,\pm2\}$. Xét hai khả năng:

- $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 - x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = -1 + x_2 \end{cases}$
  - Nếu $x_5 - x_2 = 3 \Rightarrow x_5 - x_3 = 3 = (3+x_2)-(-1+x_2) = 4$, mâu thuẫn.
  - Nếu $x_5 - x_2 = -3 \Rightarrow x_5 - x_3 = (-3+x_2)-(-1+x_2) = -2$, thỏa mãn.

  Tóm lại nếu $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_5 - x_2 = -3 \Rightarrow x_5 = x_2 - 3$. Như thế x_5 xác định theo x_1, x_2, x_3 là duy nhất.
- Tương tự nếu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_5 - x_2 = 3 \Rightarrow x_5 = x_2 + 3.$$

Như vậy nghiệm nguyên của phương trình này nếu có là duy nhất, bài toán được chứng minh xong.

□

4. Bài tập rèn luyện

1. Giả sử đa thức $P(x), Q(x), R(x), S(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn đẳng thức

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4+x^3+x^2+x+1)S(x).$$

Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho $x-1$.

2. Biết tích của hai trong bốn nghiệm của phương trình $x^4-18x^3+kx^2+200x-2016=0$ là -32. Tìm k .

3. Biết đa thức
$$P(x)=x^n-2nx^{n-1}+2n(n-1)x^{n-2}+...+a_0$$
có n nghiệm thực. Tìm tất cả các nghiệm này.

4. Giả sử đa thức $P(x)=ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+...+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$ có đúng n nghiệm dương. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm này bằng nhau.

5. Giả sử x_1,x_2 là hai trong bốn nghiệm của đa thức $P(x)=x^4+x^3-1$. Chứng minh rằng x_1x_2 là nghiệm của đa thức $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$.

6. Tìm tất cả các cặp số thực a,b sao cho các đa thức
$$P(x)=x^4+2ax^2+4bx+a^2 \text{ và } Q(x)=x^3+ax+b$$
có chung hai nghiệm thực phân biệt.

7. Cho đa thức $f(x)=3x^3-5x^2+2x-6$ có các nghiệm là α,β,γ. Tính
$$T=\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\gamma-2}\right)^2.$$

8. Gọi $r_1,r_2,...,r_7$ là các nghiệm phân biệt của đa thức $P(x)=x^7-7$. Đặt $K=\prod_{1\le i<j\le 7}(r_i+r_j)$. Tính K^2.

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải, *Đa thức*.

[2] Nguyễn Hữu Điển, *Đa thức và ứng dụng*.

[3] Titu Andresscu, Navid Safaei, Alessandro Ventullo *Polynomial Problems*.

[4] *Tạp chí Mathematical Reflections*.

Các bài toán về số chính phương

Lê Phúc Lữ
(SV Cao học ĐH KHTN TPHCM)

1. Tóm tắt lý thuyết

Số chính phương là bình phương đúng của một số tự nhiên. Từ tiếng Anh của nó là perfect square, tương ứng còn có perfect cube là lập phương đúng.

Khi chia một số chính phương n^2 cho số nguyên $m > 1$ nào đó, ta không nhận được đầy đủ các số dư $0, 1, 2, \ldots, m-1$ mà có một vài số dư nhất định, tùy thuộc vào giá trị m. Chẳng hạn khi $m = 3$ hoặc $m = 4$ thì số dư khi chia n^2 là 0 hoặc 1, khi $m = 5$ thì số dư là $0, 1, 4$.

Các kết quả quan trọng:

1. Nếu hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $(a, b) = 1$ và $ab = n^2$ thì bản thân mỗi số a, b phải là số chính phương. Tổng quát hơn, nếu $(a, b) = d$ và $ab = n^2$ thì $a = da_1^2, b = db_1^2$ với các số $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$.
2. $n^2 < k < (n+1)^2$ thì k không thể là số chính phương.

Các bài toán thường gặp về số chính phương: giải phương trình nghiệm nguyên, chứng minh đẳng thức, tìm các ràng buộc giữa các số trong đẳng thức, ... thường xuất hiện trong vai trò một bài toán số học trong các kỳ thi tuyển sinh THPT chuyên, kỳ thi HSG các cấp THPT.

2. Ví dụ minh họa

Bài toán 1. 1. Chứng minh rằng $n^2 + 3n + 4$ không chia hết cho 6.

2. Chứng minh rằng $(3n+1)(5n+3)$ không là số chính phương.

Lời giải. **1)** Xét số dư của số đã cho khi chia cho 3, ta thấy $n^2 + 1$ không bao giờ chia hết cho 3 vì n^2 khi chia cho 3 dư $0, 1$. Mà $3n + 3$ chia hết cho 3 nên $n^2 + 1 + 3n + 3$ không chia hết cho 3 và nó cũng không chia hết cho 6.

2) Giả sử $(3n+1)(5n+3) = m^2$. Đặt $d = (3n+1, 5n+3)$ thì $d | 3n+1, d | 5n+3 \to d | 5(3n+1) - 3(5n+3) = -4$ nên $d \in \{1, 2, 4\}$. Ta xét các trường hợp:

- Nếu $d = 1$ thì $3n+1, 5n+3$ đều là số chính phương. Điều này vô lý vì $5n+3$ chia 5 dư 3.

- Nếu $d = 4$ thì cũng tương tự, các số trên đều là số chính phương, cũng vô lý.
- Nếu $d = 2$ thì $3n+1 = 2x^2, 5n+3 = 2y^2$, chú ý rằng $2x^2$ chia 3 dư 0 hoặc 2, trong khi $3n+1$ chia 3 dư 1, cũng vô lý.

Do đó trong mọi trường hợp thì biểu thức trên không thể là số chính phương. □

Bài toán 2. Tìm các số nguyên dương n sao cho các biểu thức sau đây là số chính phương

1. $A = n^2 + 3n$.
2. $B = 7n + 4$.
3. $C = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$.

Lời giải. **1)** Ta thấy $n^2 < n^2 + 3n < (n+2)^2$ nên ta phải có $n^2 + 3n = (n+1)^2$, suy ra $n = 1$.

2) Đặt $7n+4 = m^2$ thì m phải chia 7 dư 2 hoặc 5 thì lần lượt viết $m = 7k+2, m = 7k-2$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Thay vào ta có

$$7n + 4 = (7k \pm 2)^2 \Rightarrow 7n = 49k^2 \pm 28k \Rightarrow n = 7k^2 \pm 4k.$$

Đó chính là tất cả các số n cần tìm.

3) Ta có

$$4C = 4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 1 < 4n^4 + 4n^3 + 9n^2 + 4n + 4 = (2n^2 + n + 2)^2,$$

mà $4C > 4n^4 + 4n^3 + n^2 = (2n^2 + n)^2$ nên ta phải có $4C = (2n^2 + n + 1)^2$ hay $n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3$. Vậy $n = 3$ là giá trị duy nhất thỏa mãn.

Chú ý rằng bài toán này hình thức đơn giản nhưng việc nhân thêm số 4 vào rồi đánh giá như trên thực sự không dễ nghĩ ra. □

Bài toán 3.
1. Cho các số nguyên a, b, c sao cho $3a + 4b = 5c$, chứng minh rằng $a^2 + b^2 - c^2$ là số chính phương.
2. Cho các số nguyên a, b thỏa mãn đẳng thức $(a-b)^2 = a + 8b - 16$. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Lời giải. **1)** Ta có đẳng thức sau

$$25(a^2 + b^2) = (3^2 + 4^2)(a^2 + b^2) = (3a + 4b)^2 + (4a - 3b)^2 = 25c^2 + (4a - 3b)^2.$$

Suy ra $a^2 + b^2 - c^2 = \left(\frac{4a-3b}{5}\right)^2$ là số chính phương (vì vế phải là bình phương của số hữu tỷ, còn vế trái là số nguyên).

2) Đẳng thức đã cho có thể viết lại thành phương trình bậc hai theo biến b như sau:

$$b^2 - 2b(a+4) + a^2 - a + 16 = 0.$$

Khi đó, ta có $\Delta' = (a+4)^2 - (a^2 - a + 16) = 9a$ phải là số chính phương, suy ra a cũng là số chính phương. □

Bài toán 4.
1. Các số nguyên dương lẻ a,b thỏa mãn $a^b b^a$ là số chính phương. Chứng minh rằng ab cũng là số chính phương.
2. Cho các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $c(ac+1)^2=(2c+b)(3c+b)$. Chứng minh rằng c là số chính phương.

Lời giải. **1)** Giả sử $a \geq b$ thì ta viết $a^b b^a = (ab)^b b^{a-b}$. Vì a,b lẻ nên $a-b$ chẵn kéo theo b^{a-b} là số chính phương. Vì thế nên $(ab)^b$ cũng chính phương, nhưng b lẻ nên phải có ab chính phương.

2) Ta có
$$(2c+b)(3c+b)=6c^2+5bc+b^2,$$
mà vế trái chia hết cho c nên $c|b^2$. Đặt $c=mn^2$ với $m,n\in\mathbb{Z}^+$ (số m không có ước chính phương nào khác 1) thì số b sẽ có dạng $b=kmn$. Đẳng thức đã cho viết lại thành
$$(amn^2+1)^2=m(2n+k)(3n+k)$$
hay $m|(amn^2+1)^2$.

Điều này cho thấy $m=1$ nên c là số chính phương. □

Bài toán 5. Tìm các số tự nhiên n sao cho các biểu thức sau đây là số chính phương
1. $M=3^n+63$.
2. $K=13+2\cdot n!$.
3. $P=1!+2!+3!+\cdots+n!$.

Lời giải. **1)** Đặt $3^n+63=m^2$. Nếu $n=0$ thì $M=64$ thỏa mãn. Số dư của M khi chia cho 4 là $(-1)^n+3$ nên phải có n chẵn, vì nếu không thì số dư trên sẽ là 2, không thỏa. Khi n chẵn, đặt $n=2k$ thì
$$3^{2k}+63=m^2 \Rightarrow 63=(m-3^k)(m+3^k).$$
Nếu $k\geq 4$ thì $m+3^k>81$,không thỏa nên $k\in\{1,2,3\}$. Thử trực tiếp, ta thấy $k=2$ thỏa, và khi đó $n=4$.

Vậy các giá trị cần tìm là $n=0, n=4$.

2) Nếu $n\geq 5$ thì K chia 5 dư 3, không thỏa.

Thử trực tiếp với $n=1,2,3,4$, ta thấy có $n=3$ thỏa vì khi đó $K=13+2\cdot 6=25$.

3) Với $k\geq 5$ thì $k!$ chia hết cho 10 nên chữ số tận cùng của P bằng với chữ số tận cùng của $1!+2!+3!+4!=1+2+6+24=33$ và là 3. Tuy nhiên, số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là $0,1,4,5,6,9$ nên không thỏa.

Thử trực tiếp với $n=1,2,3,4$ ta thấy P cũng không là số chính phương. Do đó, không tồn tại n thỏa mãn đề bài. □

Bài toán 6. 1. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $1+p\cdot 2^p$ là số chính phương.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n\cdot 2^{n-1}+1$ là số chính phương.

Lời giải. **1)** Với $p=2, p=3$ biểu thức trên tương ứng là $9, 25$ thỏa mãn đề bài.

Xét $p\geq 5$ và giả sử tồn tại $x\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $1+p\cdot 2=x^2$ thì

$$p\cdot 2^p=(x-1)(x+1).$$

Rõ ràng $x-1, x+1$ cùng tính chẵn lẻ, mà vế trái là số chẵn nên cả hai số này phải cùng chẵn. Ta viết

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=p\cdot 2^{p-2}.$$

Để ý rằng $\gcd\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)=1$ nên ta phải có $p, 2^{p-2}$ có một số là $\frac{x+1}{2}$ và số kia là $\frac{x-1}{2}$, nghĩa là hiệu của hai số phải bằng 1. Suy ra $\left|2^{p-2}-p\right|=1$. Tuy nhiên, với $p\geq 5$, bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $2^{p-2}>p+1$ nên đẳng thức trên không thể xảy ra.

Vậy tất cả các số nguyên tố cần tìm là $p=2,3$.

2) Giả sử tồn tại $k\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $n\cdot 2^{n-1}+1=k^2$ hay

$$n\cdot 2^{n-1}=(k-1)(k+1).$$

Bằng cách làm tương tự câu trên, ta thấy trong hai số $k-1, k+1$ có một số chia hết cho 4 và một số chia 4 dư 2. Do đó có hai trường hợp:

1. Nếu $k+1$ chia 4 dư 2 thì $k-1=a\cdot 2^{n-2}$ với $a\in\mathbb{Z}^+$ hay $n=a\cdot 2^{n-2}+1$. Dễ thấy $(a,n)=(2,3),(1,5)$ là các nghiệm, nếu $n>5$ thì ta có $n<2^{n-3}+1$ nên đẳng thức trên không thể xảy ra. Thử lại ta thấy chỉ có $n=5$ là thỏa mãn.

2. Nếu $k-1$ chia 4 dư 2 thì $k+1=a\cdot 2^{n-2}$ với $a\in\mathbb{Z}^+$, thay vào đẳng thức trên suy ra $n=a\cdot 2^{n-3}-1$. Dễ thấy $(a,n)=(4,3)$ là nghiệm duy nhất, thử lại ta thấy không thỏa mãn đề bài.

Vậy số nguyên dương $n=5$ là nghiệm duy nhất của bài toán. □

Bài toán 7. Giả sử rằng với n nguyên dương, ta có n^3+n^2+n+1 là số chính phương. Chứng minh rằng $\frac{n+1}{2}$ là số chính phương.

Lời giải. Ta thấy $n^3+n^2+n+1=(n+1)(n^2+1)$. Đặt $d=(n+1,n^2+1)$ thì

$$d|n+1\Rightarrow d|n^2+n,$$

mà $d|n^2+1$ nên $d|n-1$. Do đó $d|2$, kéo theo $d\in\{1,2\}$. Ta có các trường hợp:

- Nếu $d=1$ thì các số $n+1, n^2+1$ đều chính phương, vô lý vì $n^2<n^2+1<(n+1)^2$.
- Nếu $d=2$ thì đặt $n+1=2x^2, n^2+1=2y^2$. Khi đó, rõ ràng $\frac{n+1}{2}$ là số chính phương.

□

Bài toán 8. Cho các số nguyên dương a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác, không có ước nguyên dương nào chung lớn hơn 1. Giả sử rằng

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ là số chính phương hoặc là 2 lần của số chính phương.

Lời giải. Ta có

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c} = \frac{(a+b)^2-c^2-2ab}{a+b-c} = a+b+c-\frac{2ab}{a+b-c}$$

là số nguyên, kéo theo $2ab$ chia hết cho $a+b-c$. Tương tự ta cũng có $2bc$ chia hết cho $b+c-a$, còn $2ca$ chia hết cho $c+a-b$. Do đó

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \mid 8(abc)^2.$$

Đặt S là diện tích tam giác tương ứng với các cạnh a, b, c thì

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \ (*)$$

Khi đó, tồn tại số k để $8(abc)^2(a+b+c) = 16kS^2 \Rightarrow 2kS^2 = (a+b+c)(abc)^2$.

1. Nếu $\gcd(k, a+b+c) = 1$ thì $\frac{a+b+c}{2k} = \left(\frac{S}{abc}\right)^2$ là bình phương của số hữu tỷ. Nếu $2k$ là số chính phương thì $a+b+c$ cũng chính phương, từ $(*)$ suy ra đpcm, còn nếu k là số chính phương thì $\frac{a+b+c}{2}$ là số chính phương, ta cũng có đpcm.

2. Nếu $\gcd(k, a+b+c) > 1$ thì gọi p là một ước nguyên tố chung nào đó giữa k và $a+b+c$. Tuy nhiên, nếu $p > 2$ thì $p|abc$, giả sử $p|a$ thì kéo theo $p|b+c$ nên $p|b+c-a$ và $p|bc$. Suy ra $p|b, p|c$, mâu thuẫn vì a, b, c không có ước chung lớn hơn 1. Do đó, $p = 2$ và ta cũng đưa về tương tự trường hợp trên.

□

Bài toán 9. Cho các số nguyên dương a, b, c, d đôi một phân biệt sao cho $a+b = c+d = p$ với số nguyên dương lẻ $p > 3$. Chứng minh rằng $abcd$ không là số chính phương.

Lời giải. Giả sử rằng $abcd = n^2$ với số nguyên dương $n \in \mathbb{Z}^+$. Ta cũng sắp thứ tự các số $a < c < d < b$. Khi đó, ta có

$$bd + ac - ad - bc = (b-a)(d-c) > 0,$$

nên

$$ad + bc < \frac{1}{2}(ad+bc+bd+ac) = \frac{(a+b)(c+d)}{2} = \frac{p^2}{2}.$$

Ký hiệu $\gcd(ad, bc) = k \in \mathbb{Z}^+$ thì $ad = ku^2, bc = kv^2$ với $u, v \in \mathbb{Z}^+$, và $u < v, \gcd(u, v) = 1$. Từ a, b, c, d nguyên tố cùng nhau với p ta suy ra $\gcd(k, p) = 1$. Do đó

$$k(v^2 - u^2) = bc - ad = (p-a)c - a(p-c) = p(c-a).$$

Thế nên $p | v^2 - u^2$ vì $\gcd(k, p) = 1$. Suy ra, $p | v - u$ hoặc $p | v + u$. Trong cả hai trường hợp, ta đều có $u + v \geq p$. Từ đó ta có thể kết luận rằng

$$ad + bc = k(u^2 + v^2) > k\frac{(u+v)^2}{2} \geq \frac{p^2}{2}$$

theo bất đẳng thức Cô-si.

Tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với đánh giá ở trên nên $abcd$ không thể là số chính phương. □

Bài toán 10. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương sao cho $a < b \leq c < d$, $ad = bc$ và $\sqrt{d} - \sqrt{a} \leq 1$. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Lời giải. Đặt $b = a + x;\ c = a + x + y;\ d = a + x + y + z$ với $x, z > 0$ và $y \geq 0$. Ta có

$$a(a + x + y + z) = (a + x)(a + x + y) \Leftrightarrow a(z - x) = x^2 + xy$$

và

$$\sqrt{a + x + y + 1} \leq \sqrt{a} + 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 \leq 2\sqrt{a}.$$

Ta thấy rằng từ đẳng thức thứ nhất, ta có $z - x > 0$ hay $z \geq x + 1$ nên $a \leq x^2 + xy$. Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$2\sqrt{a} \leq 2\sqrt{x^2 + xy} = 2\sqrt{x(x+y)} \leq x + x + y \leq z - 1 + x + y = x + y + z - 1.$$

Đẳng thức phải xảy ra nên $y = 0 \Rightarrow a = x^2$. □

Bài toán 11. *(JBMO 2014)* Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $ab, a + b$ đều là các số chính phương, ngoài ra $16a - 9b$ là số nguyên tố.

Lời giải. Đặt $\gcd(a, b) = d$ và $a = da_1, b = db_1$ thì $\gcd(a_1, b_1) = 1$. Ta có $d(16a_1 - 9b_1)$ là số nguyên tố. Ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $d = 1$ thì $a = u^2, b = v^2$ và $p = 16u^2 - 9v^2 = (4u - 3v)(4u + 3v)$. Do đó $4u - 3v = 1, 4u + 3v = p$. Suy ra $p + 1 = 8u, p - 1 = 6v$ kéo theo p chia 8 dư 7, chia 3 dư 1 nên p chia 24 dư 7, đặt $p = 24t + 7$, thì $u = 3t + 1, v = 4t + 1$. Do đó $(3t+1)^2 + (4t+1)^2 = 25t^2 + 14t + 2$ là số chính phương.

   Tuy nhiên điều này vô lý vì $(5t+1)^2 < 25t^2 + 14t + 2 < (5t+2)^2$.

2. Nếu $16a_1 - 9b_1 = 1$ thì tồn tại $t \in \mathbb{Z}^+$ để $a_1 = 9t + 4, b_1 = 16t + 7$ nên

   $$ab = d^2 a_1 b_1 = d^2(9t+4)(16t+7) = d^2(144t^2 + 127t + 28)$$

   Tuy nhiên, $(12t+5)^2 < 144t^2 + 127t + 28 < (12t+6)^2$ với mọi $t \in \mathbb{Z}^+$ nên biểu thức trên không thể là số chính phương.

Do đó, trong mọi trường hợp, các số a, b là không tồn tại. □

Bài toán 12. *(Đề thi HSG TP Hà Nội 2017)* Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ là các số chính phương.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$, khi đó

$$x^2 < x^2 + 8y < (x+4)^2.$$

Mà x^2+8y cùng tính chẵn lẻ với x^2 nên chỉ có thể là $x^2+8y = (x+2)^2$ hay $x = 2y-1$. Khi đó $y^2 + 8x = y^2 + 16y - 8 = (y+2)^2 + 12y - 12 \geq (y+2)^2$ và $y^2 + 16y - 8 < (y+8)^2$. Tương tự, ta cũng thấy rằng $y^2 + 8x$ cùng tính chẵn lẻ với y^2 nên có các trường hợp

- Nếu $y^2 + 16y - 8 = (y+2)^2 \Rightarrow y = 1$. Khi đó $x = 1$.
- Nếu $y^2 + 16y - 8 = (y+4)^2 \Rightarrow y = 3$. Khi đó $x = 5$.
- Nếu $y^2 + 16y - 8 = (y+6)^2 \Rightarrow y = 11$. Khi đó $x = 21$.

Thử lại ta thấy đều thỏa. Vậy các cặp số cần tìm là $(x, y) = (1,1), (3,5), (11,21)$. □

Bài toán 13. *(Dựa theo đề thi tuyển sinh PTNK 2013)* Số nguyên dương n được gọi là “tốt” nếu như tổng bình phương các ước của nó (tính cả 1 và n) thì bằng $(n+3)^2$.

1. Chứng minh rằng 287 là số tốt.
2. Giả sử với hai số nguyên tố p, q nào đó (không nhất thiết phân biệt) thì $n = pq$ là số tốt, chứng minh rằng $n+2$ và $2(n+1)$ là các số chính phương.

Lời giải. **1)** Ta có $n = 287 = 7 \cdot 41$, nên tổng bình phương các ước của nó là

$$1^2+7^2+41^2+7^2\cdot 41^2 = (1^2+7^2)(1^2+41^2) = 50\cdot 1682 = 100\cdot 841 = 290^2 = (287+3)^2.$$

Suy ra $n = 287$ là số tốt.

2) Ta xét hai trường hợp sau: Nếu như $p = q$ thì các ước của $n = p^2$ là $1, p, p^2$ nên n là số tốt khi $(p^2+3)^2 = 1 + p^2 + p^4$ hay $5p^2 + 8 = 0$, vô nghiệm. Suy ra $p \neq q$ và các ước của $n = pq$ là $1, p, q, pq$. Nếu n là tốt thì $(pq+3)^2 = 1 + p^2 + q^2 + p^2q^2$ hay

$$6pq + 8 = p^2 + q^2 \rightarrow \begin{cases} 4(pq+2) = (p-q)^2 \\ 8(pq+1) = (p+q)^2 \end{cases}$$

Do $(p-q)^2$ và 4 là các số chính phương nên $n+2 = pq+2$ cũng phải là số chính phương. Tương tự, $2(n+1) = \frac{(p+q)^2}{4}$ cũng là số chính phương. □

Bài toán 14. Đặt $S = (1!)(2!)(3!)\ldots(20!)$ là tích của giai thừa của 20 số nguyên đầu tiên. Hỏi phải xóa đi trong S ít nhất bao nhiêu thừa số (mỗi thừa số ứng với 1 giai thừa) để S là một bình phương đúng?

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&1\times(1\times 2)\times(1\times 2\times 3)\times\cdots\times(1\times 2\times 3\times\cdots\times 20)\\
&=120\times 219\times 318\times\cdots\times 183\times 192\times 201. = A2\times 2\times 4\times\cdots\times 18\times 20\\
&=2\times 210\times(1\times 2\cdots\times 9\times 10)\\
&=(25\times A)2\times 10!
\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần xóa đi 1 thừa số thì tích còn lại là bình phương đúng. □

Bài toán 15. Tìm tất cả các số nguyên dương n, k sao cho $2^k + 10n^2 + n^4$ là số chính phương.

Lời giải. Đặt $m = 2^k + 10n^2 + n^4$. Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu n lẻ thì m chia 8 dư $3, 5, 7$, không thể là số chính phương. Do đó n phải chẵn.
2. Nếu $n = 2$ thì $m = 2^k + 56$. Khi đó $k \geq 4$ sẽ kéo theo m chia hết 8 chứ không chia hết cho 16, cũng không thể là số chính phương. Thử các trường hợp $k \in \{1, 2, 3\}$ ta có $k = 3$ thì $m = 64$.
3. Nếu $n \geq 4$ và n chẵn, ta có $m > (n^2+4)^2$, mà m cùng tính chẵn lẻ với n^2 nên $m \geq (n^2+6)^2$. Do đó $2^k + 10n^2 + n^4 \geq (n^2+6)^2 \Rightarrow 2^k \geq 2n^2 + 36$. Đặt $n = k\cdot 2^t$ với $t \geq 1$ và k lẻ, trong đó $t, k \in \mathbb{Z}^+$. Vì $2^k \geq 2n^2 + 36 > 2n^2 = k\cdot 2^{2t} \Rightarrow k - 2t \geq 2$. Ta có
$$m = 2^k + 10k^2\cdot 2^{2t} + k^4\cdot 2^{4t} = 2^{2t}(2^{k-2t} + 10k^2 + k^4\cdot 2^{2t})$$
chú ý rằng biểu thức trong ngoặc chia 4 dư 2 do $2^{k-2t}, k^4\cdot 2^{2t}$ đều chia hết cho 4 còn k^2 lẻ. Điều này không thể xảy ra vì m là số chính phương.

Từ đó ta thấy rằng chỉ có $(n, k) = (2, 3)$. □

Bài toán 16. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $2^{a!} + 2^{b!}$ là số chính phương.

Lời giải. Nếu $a = b = 1$ thì $2^{a!} + 2^{b!} = 4$. Còn nếu $a = b > 1$ thì $a!, b!$ là các số chẵn, đặt chúng là $2k$ thì
$$2^{a!} + 2^{b!} = 2\cdot 2^{a!} = 2^{a!+1} = 2^{2k+1},$$
không thể là số chính phương. Nếu $a \neq b$, giả sử rằng $a > b$ thì $2^{b!}(2^{a!-b!} + 1)$. Ta có các trường hợp sau

- Nếu $b = 1$ thì $2^{a!} + 2 = x^2 + 2$, không thể là số chính phương.
- Nếu $b > 1$ thì $2^{a!-b!} + 1 = x^2 + 1$, cũng không thể là số chính phương.

□

Vậy tất cả các cặp số cần tìm là $(a, b) = (1, 1)$.

Bằng cách tương tự trên, ta có thể bài toán sau: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho $2^{a!} + 2^{b!} + 2^{c!}$ là một lập phương đúng.

Bài toán 17. Hai tập hợp các số nguyên dương A, B được gọi là "liên kết" nhau nếu chúng đều khác rỗng và với mọi $a \in A$, mọi $b \in B$ thì số $ab + 1$ là chính phương.

1. Với tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, chứng minh rằng không có tập hợp B nào liên kết với A.

2. Xét hai tập hợp A, B liên kết nhau, $a_1, a_2 \in A;\ b_1, b_2 \in B$ sao cho $a_1 > a_2, b_1 > b_2$. Chứng minh rằng $a_1 b_1 > 13 a_2 b_2$.

Lời giải. **1)** Giả sử tồn tại tập hợp B liên kết với A thì xét $n \in B$. Ta phải có $n + 1 = x^2, 4n + 1 = y^2$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ nào đó. Khi đó

$$x^2 y^2 = (n+1)(4n+1) = 4n^2 + 5n + 1.$$

Chú ý rằng $(2n+1)^2 < 4n^2 + 5n + 1 < (2n+2)^2$ nên đây không thể là số chính phương, vô lý.

Do đó, không tồn tại tập hợp B nào thỏa mãn.

2) Vì $a_1 > a_2, b_1 > b_2$ nên $(a_1 b_1 + 1)(a_2 b_2 + 1) > (a_1 b_2 + 1)(a_2 b_1 + 1)$ hay

$$\sqrt{(a_1 b_1 + 1)}\sqrt{(a_2 b_2 + 1)} > \sqrt{(a_1 b_2 + 1)}\sqrt{(a_2 b_1 + 1)}.$$

Chú ý rằng biểu thức dưới dấu căn đều là các số chính phương nên cả hai vế đều nguyên và ta có

$$\sqrt{(a_1 b_1 + 1)}\sqrt{(a_2 b_2 + 1)} \geq \sqrt{(a_1 b_2 + 1)}\sqrt{(a_2 b_1 + 1)} + 1.$$

Bình phương và khai triển, ta đi đến

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2\sqrt{(a_1 b_2 + 1)(a_2 b_1 + 1)} + 1 > a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2},$$

nên ta có

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq 4\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2} \text{ hay } \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} + 1 \geq 4\sqrt{\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}}.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}}$ thì $t^2 - 4t + 1 \geq 0$ hay $t \geq 2 + \sqrt{3}$ nên

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} > (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} > 7 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 13.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

3. Bài tập áp dụng

1. Ký hiệu $A = \underbrace{111\ldots11}_{2m \text{ chữ số}}, B = \underbrace{444\ldots44}_{m \text{ chữ số}}$. Chứng minh rằng $A+B+1$ là số chính phương. Tìm chữ số hàng đơn vị của $\sqrt{A+B+1}$.

2. Chứng minh rằng số các ước của số nguyên dương n là lẻ khi và chỉ khi n là số chính phương. Từ đó chỉ ra rằng số các ước của số $n^{2018}+3$ là số chẵn với mọi $n > 1$.

3. Tìm tất cả các số tự nhiên x để các số sau đây là số chính phương:

   a) $n = x^2 + 7x + 4$.

   b) $m = x^3 + 16$.

   c) $k = 7^x + 15$.

4. Cho n là số tự nhiên khác 0 và d là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng $n^2 + d$ không phải là số chính phương.

5. Tìm tất cả các số nguyên a để phương trình $x^2 - (3+2a)x + 40 - a = 0$ có nghiệm nguyên x.

6. *(Bài toán về phương trình Pytago)* Giả sử các số nguyên dương x, y, z không có ước nguyên tố chung và $x^2 + y^2 = z^2$. Chứng minh rằng tồn tại $m, n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $z = m^2 + n^2$ và số xyz chia hết cho 60.

7. Chứng minh rằng không tồn tại n nguyên dương sao cho $(n^2+1)(5n^2+9)$ là số chính phương.

8. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d sao cho tích của ba số bất kỳ trong đó là số chính phương. Chứng minh rằng mỗi số a, b, c, d cũng đều là số chính phương.

9. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $\gcd(a, b, c) = 1$ và $a|bc, b|ca, c|ab$. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a}$ là số chính phương.

10. Cho hai số nguyên dương ab nguyên tố cùng nhau sao cho ab chia hết cho $a-b$. Chứng minh rằng $a-b$ là số chính phương.

11. Giả sử $2^9 + 2^6 + 2^n$ là số chính phương với n nguyên dương nào đó. Chứng minh rằng $n = 10$.

12. *(Hàn Quốc, 2011)* Cho các số nguyên dương x, y nguyên tố cùng nhau và $x+3y^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x^2 + 9y^4$ không thể là số chính phương.

Ý tưởng chuyển đổi mô hình trong các bài toán hình học

Đào Sơn Trà
(SV ĐH Sư Phạm TPHCM)

1. Giới thiệu ý tưởng

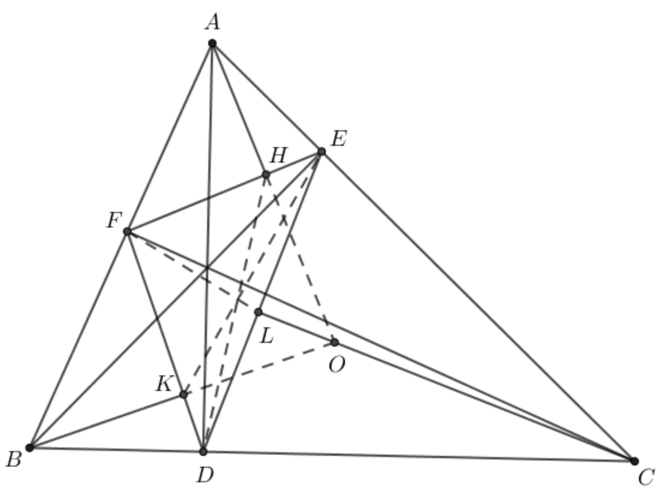
Trong tam giác ABC nhọn có D, E, F là các chân đường cao và H là trực tâm. Khi đó:

- H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
- A, B, C là tâm bàng tiếp của tam giác DEF.

Từ đây ta có thể đổi giữa hai mô hình "bàng tiếp - trực tâm" để xem cách tiếp cận nào thuận lợi hơn để xử lý bài toán. Tất nhiên trong tình huống tam giác tù hoặc vuông cũng có các kết quả tương tự nhưng để đơn giản, ta không đề cập ở đây. Trong các ví dụ, bài tập bên dưới, ta quy ước xét các tam giác nhọn, không cân:

Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF. Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên EF, DF, DE. Chứng minh rằng các đường thẳng DH, EK, FL đồng quy; các đường thẳng AH, BK, CL đồng quy.*

Ta phát biểu lại bài toán như sau: *Cho tam giác DEF có A, B, C lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc D, E, F. Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên EF, DF, DE. Chứng minh rằng DH, EK, FL đồng quy và AH, BK, CL cũng đồng quy.*



Chứng minh.

Sau khi chuyển đổi mô hình ta có thể dễ dàng chứng minh được ý a) DH, EK, FL đồng quy (tại điểm Nagel của tam giác DEF) bằng cách kết hợp tính chất đường tròn bàng tiếp và định lý Ceva.

Với ý b) ta có: EF là phân giác $\angle DEF$ nên $\angle FEA = \angle DEC$ suy ra

$$90^\circ - \angle FEA = 90^\circ - \angle DEC \Rightarrow \angle HAC = \angle LCA$$

Gọi O là giao điểm của HA và CL. Khi đó:

$$\angle AOC = 180^\circ - 2\angle HAC = 2(90^\circ - \angle HAC) = 2\angle BAC$$

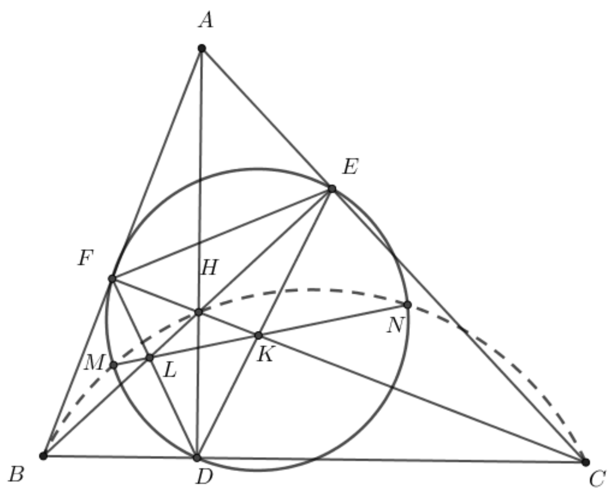
nên AH, CL, BK đồng quy tại tâm (ABC).

□

Ví dụ 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có BE, CF là hai phân giác cắt nhau tại I. EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN bằng $2R$.*

Ở ví dụ này không xuất hiện trực tiếp yếu tố "trực tâm" hay "tâm bàng tiếp" nhưng ta vẫn có thể vận dụng ý tưởng trên bằng cách xem tâm nội I của tam giác ABC là trực tâm của tam giác tạo bởi 3 tâm đường tròn bàng tiếp. Cụ thể, ví dụ trên tương đương với bài toán sau:

Cho tam giác ABC nội tiếp $(O;R)$ có đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K, L lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(CH, DE), (BH, DF)$. KL cắt đường tròn Euler của tam giác ABC tại M, N. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN bằng R.



Chứng minh. Do tứ giác $BDHF$ và $DCEH$ nội tiếp nên ta có:

$$\overline{LD}.\overline{LF} = \overline{LH}.\overline{LB} \Rightarrow \mathscr{P}_{L/(DEF)} = \mathscr{P}_{L/(BHC)}$$

$$\overline{KC}.\overline{KH} = \overline{KD}.\overline{KE} \Rightarrow \mathscr{P}_{K/(DEF)} = \mathscr{P}_{K/(BHC)}$$

suy ra LK là trục đẳng phương của (DEF) và (BHC) nên M, N nằm trên (BHC).

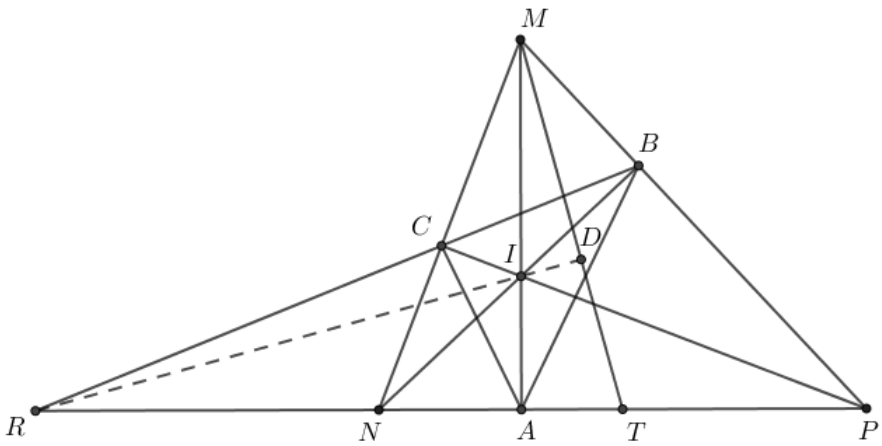
Theo tính chất quen thuộc thì (BHC) đối xứng với (ABC) qua BC nên bán kính (HMN) cũng bằng R. □

2. Bài tập vận dụng

Bài toán 1. Cho tam giác (ABC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC. Giả sử BC cắt NP tại R và T là trung điểm cung lớn BC của (O). Chứng minh rằng $MT \perp IR$ với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải. Bài toán được phát biểu lại như sau:

Cho tam giác MNP có I là trực tâm và A, B, C lần lượt là chân đường cao kẻ từ M, N, P. BC cắt NP tại R. Gọi T là trung điểm cung lớn BC của (ABC). Chứng minh $MI \perp IR$.



Dễ thấy (ABC) là đường tròn $Euler$ của tam giác MNP và T là trung điểm NP. Ta sẽ chứng minh IR là trục đẳng phương của (TM) và (BC).

Ta có:

$$\overline{RA}.\overline{RT} = \overline{RC}.\overline{RB} \Rightarrow \mathscr{P}_{R/(NP)} = \mathscr{P}_{R/(MT)}$$

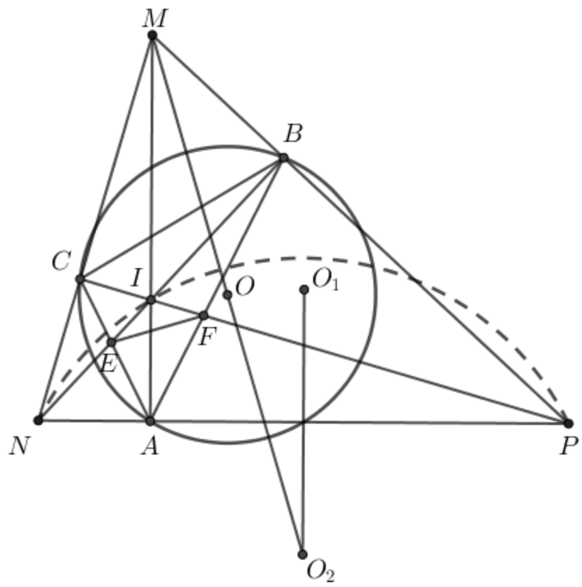
$$\overline{IA}.\overline{IM} = \overline{IB}.\overline{IN} \Rightarrow \mathscr{P}_{I/(NP)} = \mathscr{P}_{I/(MT)}$$

Vậy IR là trục đẳng phương của (MT) và (NP) nên $IR \perp MT$ □

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có phân giác $BE, CF (E \in AC, F \in AB)$. Giả sử (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi M là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh $MO \perp EF$.

Lời giải. Ta phát biểu lại bài toán trên dưới mô hình trực tâm như sau:

Cho tam giác MNP có I là trực tâm và MA, NB, PC là các đường cao. Gọi NB cắt AC tại E, AB cắt PC tại F. Gọi O là tâm đường tròn $Euler$ của tam giác MNP. Chứng minh $MO \perp EF$.



Gọi O_2 là tâm ngoại tiếp tam giác NIP thì dễ thấy rằng O_2 đối xứng với O_1 qua NP. Gọi T là trung điểm NP thì $MI = 2O_1T = O_1O_2$. Mà $O_1O_2 \parallel MI$ nên kéo theo tứ giác MIO_2O_1 là hình bình hành. Vì thế nên MO_2 đi qua trung điểm của IO_1, cũng chính là tâm đường tròn Euler O của tam giác MNP.

Tiếp theo, ta thấy rằng

$$\overline{EA}.\overline{EC} = \overline{EN}.\overline{EI} \Rightarrow \mathscr{P}_{E/(O)} = \mathscr{P}_{E/(O_2)}$$
$$\overline{FA}.\overline{FB} = \overline{FN}.\overline{FI} \Rightarrow \mathscr{P}_{F/(O)} = \mathscr{P}_{F/(O_2)}$$

Suy ra EF là trục đẳng phương của (O) và (O_2) nên $EF \perp OO_2$.

Từ hai điều trên, ta có EF vuông góc với MO.

□

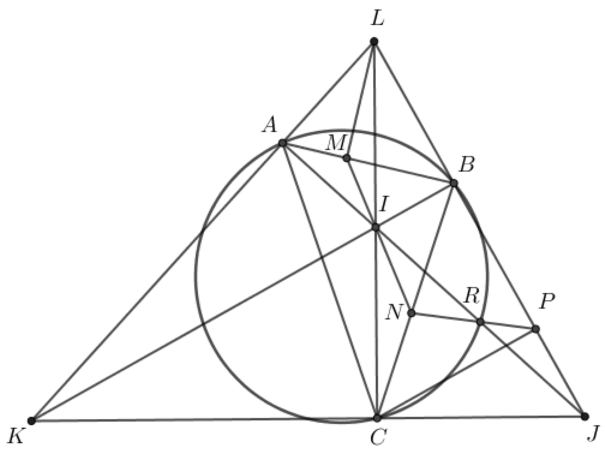
Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp I. Đường tròn bàng tiếp (L) của đỉnh C của tam giác ABC tiếp xúc với AB tại M. MI cắt BC tại N. P là hình chiếu của C lên LB. Chứng minh rằng AI và NP cắt nhau trên (O).

Lời giải. Bài toán được phát biểu lại như sau:

Cho tam giác JKL có các đường cao JA, KB, LC. Gọi I là trực tâm tam giác JKL. Gọi M là hình chiếu của L lên AB, P là hình chiếu của C lên JL. MI cắt BC tại N. Chứng minh rằng NP cắt JA trên đường tròn $Euler$ của tam giác JKL.

Gọi R là giao điểm của JA và NP. Dễ thấy việc chứng minh R nằm trên đường tròn $Euler$ của tam giác JKL tương đương với việc chứng minh R là trung điểm IJ.

Ta có $\Delta LAB \sim \Delta CJB$ mà LM, CP lần lượt là các đường cao nên $\frac{BM}{MA} = \frac{BP}{PJ}$ suy ra $MP \parallel AJ$.

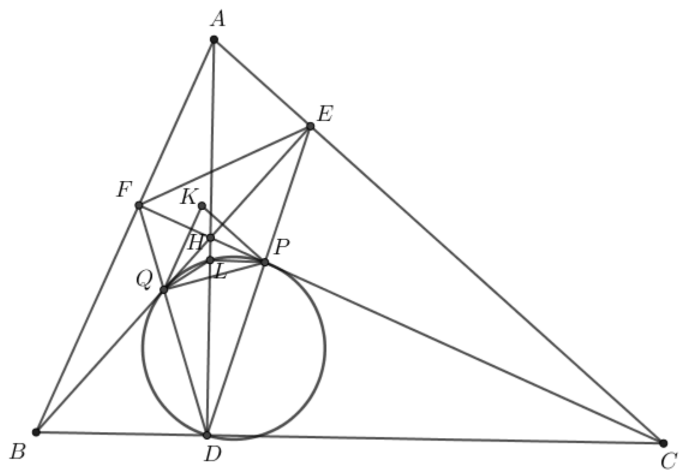


Do M, I, N thẳng hàng nên $P(BI, MN) = B(PI, MN) = B(JK, AC) = -1$ kết hợp với $MP \parallel AJ$ suy ra R là trung điểm IJ. Bài toán đã được chứng minh. □

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có đường cao BD, CE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng AI đi qua tâm $Euler$ của tam giác IDE.

Lời giải. Dựa vào bổ đề ở **bài tập 2** ta có thể chuyển bài toán về mô hình sau:

Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi P, Q là giao điểm của các cặp đường thẳng $(CH, DE), (BH, DF)$. Lấy K là trực tâm tam giác HPQ. Gọi L là tâm (PKQ). Chứng minh L nằm trên AD.



Ta có:

$$\angle LQP = \frac{180^\circ - \angle QLP}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle QKP}{2} = 90^\circ - \angle QKP = \angle HPK = \angle HCA = \angle LDP$$

Suy ra $QLPD$ nội tiếp. Lại có $LP = LQ$ nên DL là phân giác góc EDF nên L thuộc AD. Vậy bài toán đã được chứng minh. □

Bài toán 5. ***(Chọn đội tuyển 30/4 PTNK 2016)*** Cho (O) và dây cung BC cố định, điểm C di động. Gọi I, I_a, I_b lần lượt là tâm nội tiếp, tâm bàng tiếp góc A, B của tam giác ABC. Gọi M là điểm đối xứng với I qua O.

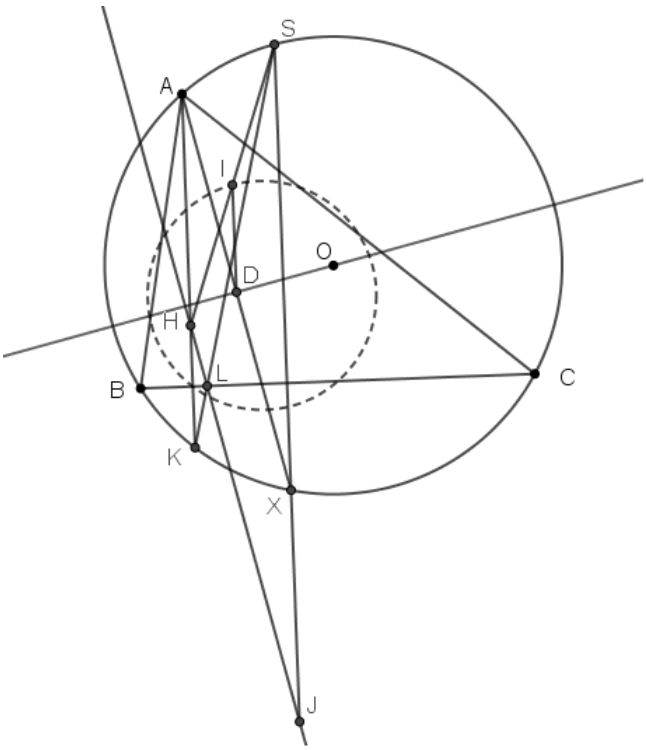
1. Chứng minh rằng $MI_a = MI_b$.

2. Gọi H, K là hình chiếu của I_b, I_a lên OI. Đường thẳng qua H vuông góc với BI_a cắt đường thẳng qua K vuông góc với AI_b ở T, chứng minh rằng T thuộc đường tròn cố định.

Lời giải. Nhận xét: Khi chuyển đổi sang mô hình trực tâm, giả sử I_c là tâm bàng tiếp góc C của tam giác ABC. Ta có I, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn $Euler$ tam giác $I_aI_bI_c$ nên M là tâm $(I_aI_bI_c)$ từ đó $MI_a = MI_b$. Vậy ta đã giải quyết được ý a) của bài toán.

Ý b) của bài toán sau khi chuyển đổi mô hình, ta có thể dự đoán được T di chuyển trên đường tròn $Euler$ của tam giác $I_aI_bI_c$. Đó là kết quả về cực trực giao của một đường thẳng đi qua tâm ngoại tiếp được phát biểu bởi bài toán sau:

Cho tam giác ABC có đường thẳng d đi qua tâm ngoại tiếp O. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên d. Chứng minh rằng đường thẳng qua D, E, F vuông góc với BC, CA, AB đồng quy trên đường tròn $Euler$ của tam giác ABC.



Gọi l là đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với d. Gọi S là điểm anti-Steiner của l. J là điểm đối xứng của S qua BC và X là giao điểm của SJ và (O). K là điểm đối xứng với H qua BC.

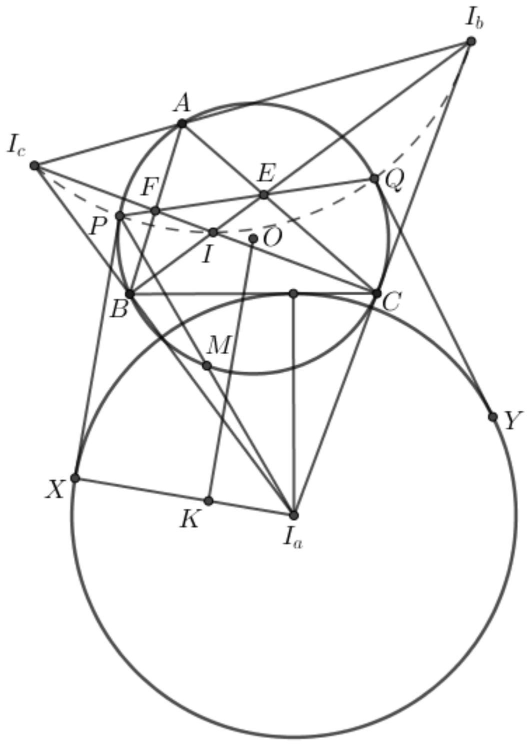
Ta có:

$$\angle AXS = \angle AKS = \angle KHJ$$

suy ra $HJ \parallel AX$.
Do đó, D nằm trên AX hay D là trung điểm AX. Suy ra đường thẳng qua D vuông góc với BC đi qua trung điểm I của SH và nằm trên đường tròn *Euler* của tam giác ABC. □

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Gọi XP, YQ là tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (I_a)-đường tròn bàng tiếp góc A ($P, Q \in (O)$, $X, Y \in (I_a)$). Chứng minh P, Q, E, F thẳng hàng.

Lời giải. Gọi I_b, I_c là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C để chuyển về mô hình trực tâm thì theo ví dụ I.2 ta cần chứng minh I, I_c, I_b, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.



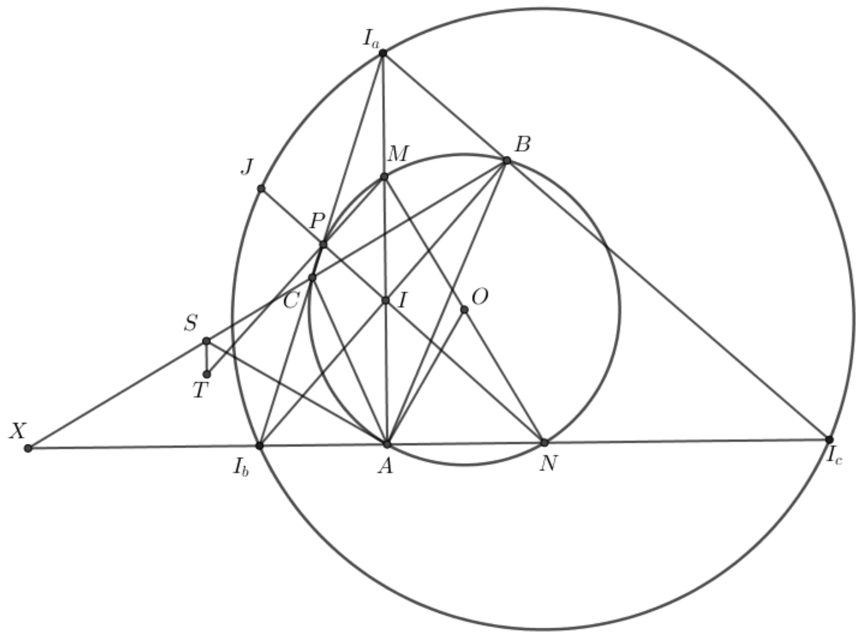
Gọi M là giao điểm của I_aP với (ABC), K là hình chiếu của O lên XI_a.

Theo hệ thức *Euler* ta có:
$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$$
suy ra
$$PX^2 = OK^2 = OI_a^2 - KI_a^2 = R^2 + 2Rr_a - (r_a - R)^2 = 4Rr_a - r_a^2$$
ta thu được $PI_a^2 = 4Rr_a$. Mà $I_aP \cdot I_aM = BI_a^2 = OI_a^2 - R^2 = 2Rr_a$. Suy ra M là trung điểm PI_a.

Do $(O), I$ là đường tròn *Euler* và trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$ nên theo **Bài tập 2** ta có: $V_{I_a}{}^2 : (O) \to (II_bI_c); M \to P$ mà $M \in (O)$ nên $P \in (II_bI_c)$.

Tương tự thì $Q \in (II_bI_c)$ nên ta có được điều phải chứng minh. □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N là điểm chính giữa cung BC và cung BAC của (O). NI cắt (O) lần thứ hai tại P. MP cắt trung trực AI tại T. Gọi S là giao điểm tiếp tuyến tại A của (O) với BC. Chứng minh rằng $TS \parallel AI$.



Lời giải.
Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC để chuyển về mô hình trực tâm. Gọi X là giao điểm của BC và I_bI_c. J là giao điểm của (I_aBIC) với $(I_aI_bI_c)$ thì ta có N, I, J thẳng hàng.

Tứ giác toàn phần $BCI_bI_cI_aX$ nội tiếp nên J là điểm Miquel và I_a, J, X thẳng hàng mà $\angle IJI_a = 90°$ suy ra tứ giác $AIJX$ nội tiếp.

Ta có:

$$\angle MPJ = \angle I_aJI = 90°$$

suy ra $MP \parallel I_aJ$. Lại có M là trung điểm JI_a nên P là trung điểm IJ. Suy ra T là tâm $(AIJX)$. Ta thu được $TX = TA$.

Mà S là tâm $A-Apollonius$ của tam giác ABC nên $SX = SA$. Vậy ST là trung trực của XA nên $ST \perp XA$ suy ra $ST \parallel AI$. □

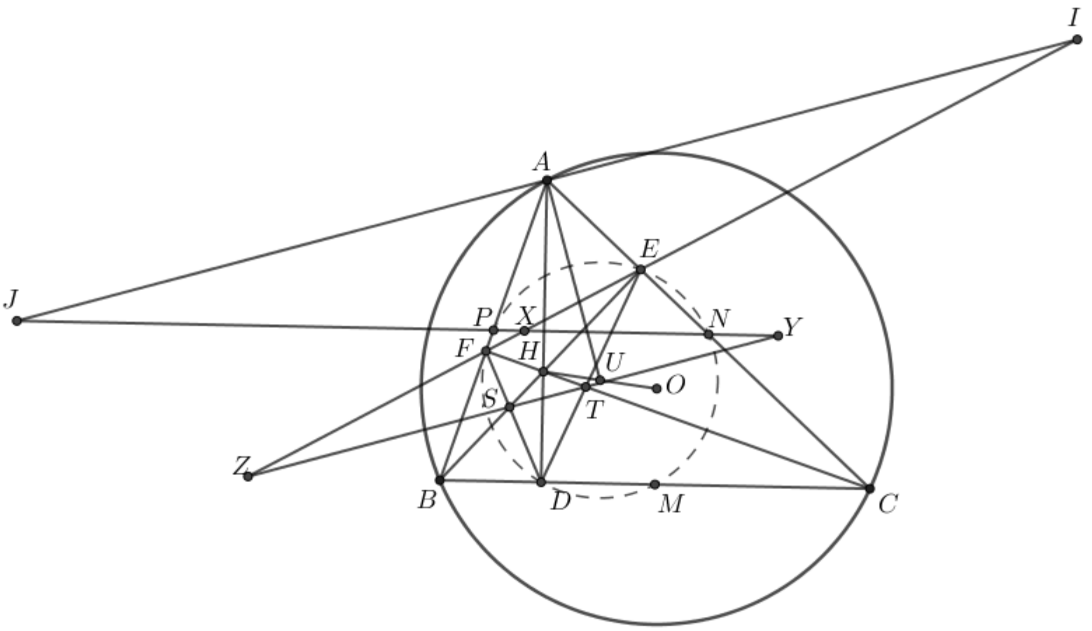
Bài toán 8. ***(Trích VN TST 2019)*** Cho tam giác ABC ngoại tiếp (O) và nội tiếp (I). Gọi E, F là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BI, AC), (CI, AB)$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm cung ABC và ACB. PQ cắt BC, EF tại G và H. EF cắt BC ở K. Chứng minh rằng tiếp tuyến ứng với G của tam giác GHK vuông góc với OI.

Lời giải. Đây là một bài toán hay và khó. Nếu không có cách tiếp cận chuyển đổi mô hình thích hợp thì việc xử lý các tính chất sẽ gặp nhiều khó khăn. Vận dụng ý tưởng ở Ví dụ I.2 ta chuyển bài toán về mô hình trực tâm như sau:

Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi BH, CH cắt FD, ED lần lượt tại S, T. ST cắt PN tại Y và cắt EF tại Z.

Gọi X là giao điểm của PN và EF, K là trung điểm YZ. Chứng minh rằng: XK vuông góc với đường thẳng $Euler$ của tam giác ABC.
Ta có:
$$\overline{XN}.\overline{XP} = \overline{XE}.\overline{XF} \Rightarrow \mathscr{P}_{X/(APN)} = \mathscr{P}_{X/(AEF)}$$
suy ra AX là trục đẳng phương của (APN) và (AEF) nên $AX \perp OH$.

Gọi U là tâm $Euler$ của tam giác ABC thì theo **Bài tập 2** ta có $AU \perp ST$.



Qua A kẻ đường thẳng song song với YZ cắt EF tại I và cắt PN tại J thì $AU \perp IJ$, áp dụng định lý con bướm cho tứ giác $FPEN$ nội tiếp ta thu được $AJ = AI$. Từ đó suy ra AX đi qua trung điểm YZ dẫn đến A, X, K thẳng hàng nên XK vuông góc với OH. Vậy ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 9. ***(Trích VN TST 2016)*** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, A di động trên cung BC của (O). Các phân giác BE, CF cắt nhau tại I. BE, CF cắt đường tròn (O) tại K, L. AI cắt KL tại P. Gọi Q là một điểm trên EF sao cho $QP = QI$. J nằm trên (BIC) sao cho $IJ \perp IQ$. Chứng minh rằng trung điểm IJ di chuyển trên một đường tròn cố định.

Lời giải. Tiếp tục với ý tưởng Ví dụ I.2 Ta dựng I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC để chuyển về mô hình trực tâm thì ta thu được L, K lần lượt là trung điểm của II_c và II_b.

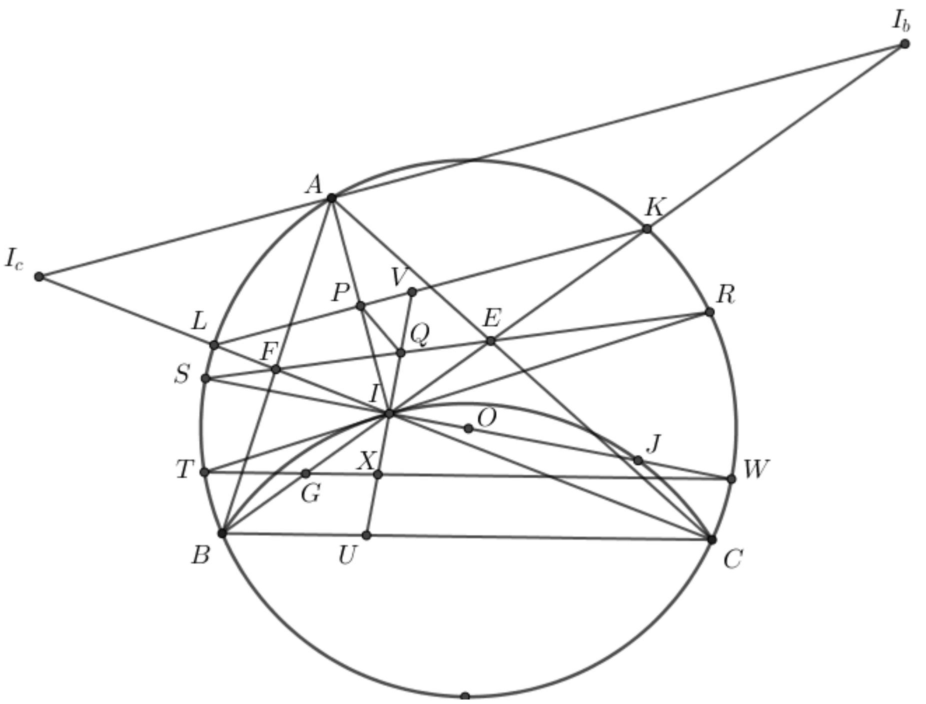
Gọi R, S là giao điểm của EF với (O)(như hình vẽ). RI, SI cắt đường tròn (O) lần thứ hai tại T, W. TW cắt BI tại G. Đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt LK, BC, SR, TW tại V, U, Q', X.

Theo ví dụ 2,ta có $S, R \in (II_bI_c)$. Do đó:
$$\angle GTR = \angle ISR = \angle II_bR$$

suy ra tứ giác GTI_bR nội tiếp. Ta thu được

$$IG \cdot II_b = IT \cdot IR = IB \cdot IK = \frac{1}{2} IB \cdot II_b$$

suy ra TW đi qua trung điểm IB. Tương tự: TW cũng đi qua trung điểm IC nên TW là đường trung bình của tam giác IBC.



Áp dụng định lý con bướm cho hai dây cung LC, BK cắt nhau tại I, ta được $IV = IU$. Tiếp tục áp dụng định lý con bướm cho hai dây cung SW, TR, ta được $IX = IQ'$.

Mà X là trung điểm IU nên Q' là trung điểm IV do đó $IQ' = Q'V = Q'P$ suy ra $Q \equiv Q'$. Vậy $OI \perp IQ$. Gọi O_1 là trung điểm cung BC không chứa A thì O_1 là tâm (BIC). Gọi M là trung điểm IJ khi đó ta có $\angle OMO_1 = 90°$ nên M nằm trên (OO_1), là đường tròn cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

3. Bài tập tự luyện

1. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N, P là trung điểm của EF, FD, DE và K là tâm nội tiếp tam giác MNP. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ $A \to EF, B \to DF, C \to DE$. Chứng minh rằng

$$x^2 - KA^2 = y^2 - KB^2 = z^2 - KC^2.$$

2. Cho tam giác ABC có T là trung điểm BC và X, Y là tâm bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. Giả sử TX cắt AB, AC lần lượt tại M, N, còn TY cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng M, N, P, Q là các đỉnh của một hình thang ngoại tiếp được đường tròn.

3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có tâm nội tiếp I, tâm bàng tiếp góc A là J. Trên các đường thẳng JB, JC lần lượt lấy M, N sao cho $MA = MJ$ và $NA = NJ$. Đường thẳng MN cắt IB, IC ở E, F. Chứng minh rằng trung tuyến đỉnh I của tam giác IEF chia đôi cung BAC của (O).

4. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường tròn (BHC) cắt đường tròn Euler của tam giác ABC ở M, N. Chứng minh rằng $AM = AN$.

5. *(Bài toán về điểm Bevan)* Cho tam giác ABC có I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C. Khi đó, ký hiệu X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$, cũng chính là điểm Bevan của tam giác ABC. Gọi O, I, G, H lần lượt là tâm ngoại tiếp, tâm nội tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng O là trung điểm của XI và G là trọng tâm của HIX.

Tứ giác điều hòa và một số ứng dụng

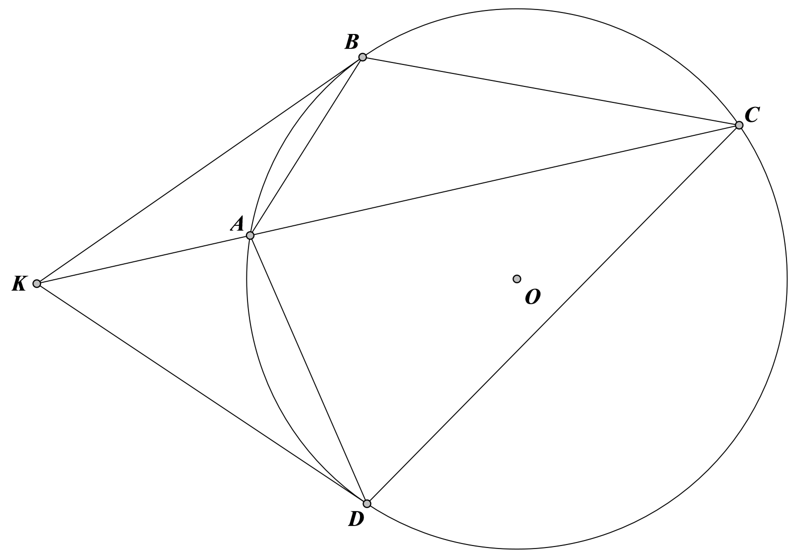
Võ Hữu Lê Trung
(SV ĐH Sư Phạm TPHCM)

1. Một số tính chất của tứ giác điều hòa

Định nghĩa 1. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) được gọi là tứ giác điều hòa nếu* $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CB}{CD}$ *hoặc với mọi M thuộc (O) thì $M(ACBD) = -1$.*

Dưới đây là ví dụ cụ thể hơn về nhận dạng của tứ giác điều hòa trong các bài toán:

Ví dụ 1. *Cho đường tròn (O) và K nằm ngoài (O), KB và KD lần lượt là các tiếp tuyến đến (O), cát tuyến KAC. Khi đó $ABCD$ là tứ giác điều hòa.*



Các tính chất của Tứ giác điều hòa đã được đề cập và chứng minh trong rất nhiều tài liệu. Bài viết này chỉ hệ thống lại và không chứng minh:

a) Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác điều hòa $ABCD$ ta có:

$$AC \cdot BD = 2AB \cdot CD = 2AD \cdot CB.$$

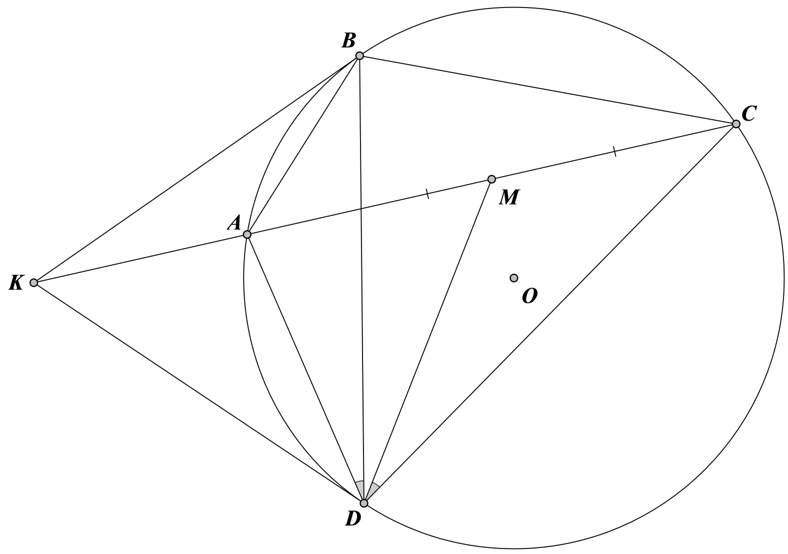
b) Tứ giác $ABCD$ điều hòa khi và chỉ khi tiếp tuyến tại A, C của (O),BD đồng quy hoặc đôi một song song.

c) Tứ giác điều hòa $ABCD$ nội tiếp (O). Khi đó (O) trực giao với đường tròn Apollonius tỉ số k dựng trên đoạn AC.

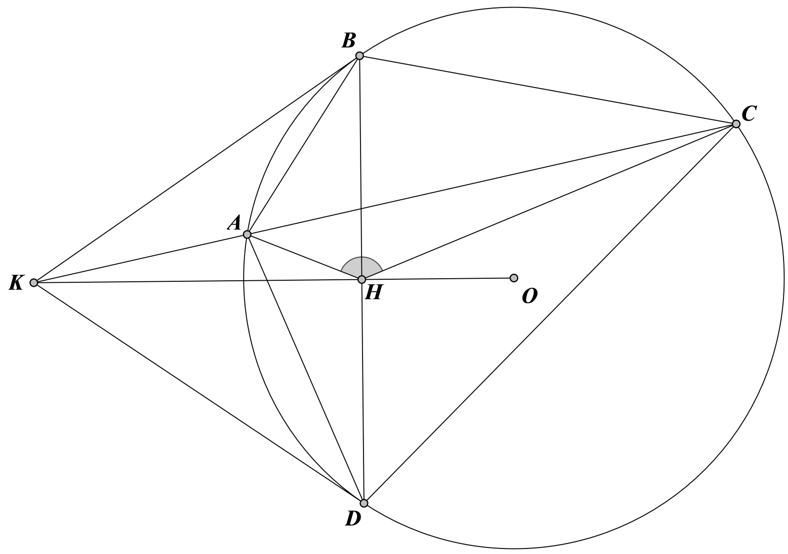
d) Cho tứ giác điều hòa $ABCD$. Gọi N là giao điểm của AC và BD. Khi đó

$$\frac{NA}{NC} = \left(\frac{BA}{BC}\right)^2 = \left(\frac{DA}{DC}\right)^2$$

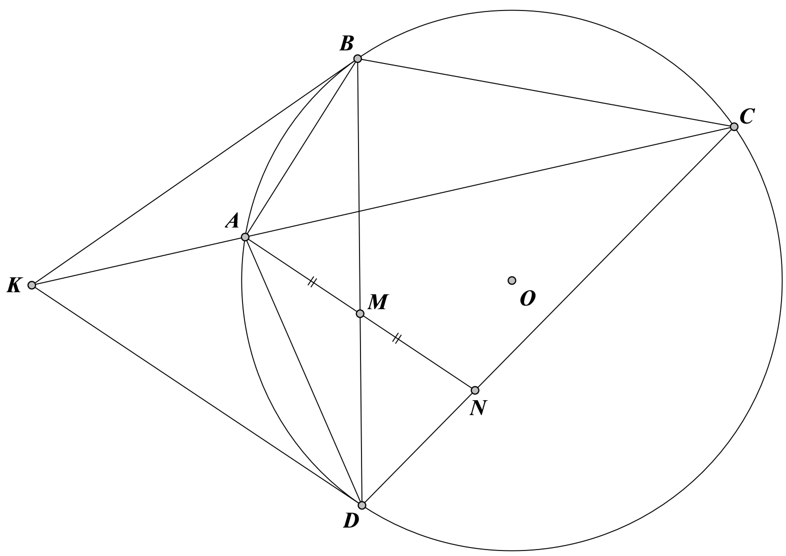
e) Cho tứ giác điều hòa $ABCD$. GọiM là trung điểm của AC. Ta chứng minh được$\angle ADB = \angle MDC$. Từ đó ta có thể chứng minh BD là đường đối trung của $\Delta ABC, \Delta ADC$ còn AC là đường đối trung $\Delta BAD, \Delta BCD$.



f) Cho tứ giác điều hòa $ABCD$ nội tiếp (O), K là giao điểm của 2 tiếp tuyến tạiB và D. Gọi H là giao điểm của OK và BD. Khi đó HB là phân giác AHB.



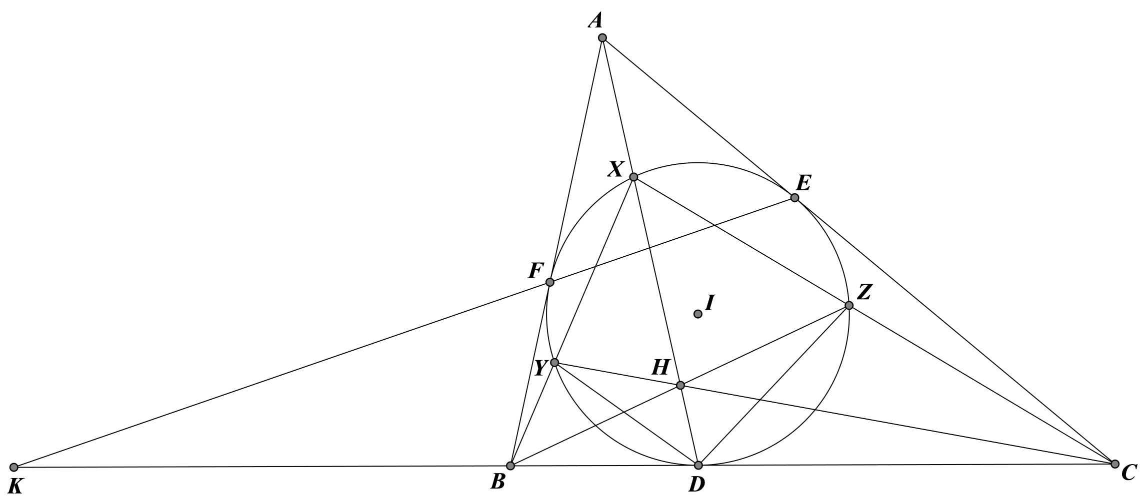
g) Cho tứ giác điều hòa $ABCD$, K là giao điểm hai tiếp tuyến tại B và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với KD, cắt BD tạiM, CD tại N. Khi đó, M là trung điểm AN.



Tính chất g) là bài toán phát triển từ một định lí của hàng điểm điều hòa: Trên đường thẳng d cho 4 điểm A, C, B, D theo thứ tự đó. S là một điểm không thuộc d. một đường thẳng song song với SA theo thứ tự cắt các tia SB, SC, SD tại Y, X, Z. Chứng minh rằng $(ABCD) = -1$ khi và chỉ khi $YX = YZ$.

2. Ứng dụng tứ giác điều hòa

Bài toán 1. Cho tam giác ABC $(AB \neq AC)$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. AD cắt (I) tại X; BX, CS theo thứ tự cắt (I) tại Y, Z. Chứng minh rằng AX, BZ, CY đồng quy.



Chứng minh. Gọi K là giao điểm của BC và EF.
Ta có thể chứng mình được $DEXF$ là tứ giác điều hòa. Từ đó, ta chứng mình được KX

tiếp xúc với (I) tại X.Mặt khác, ta cũng chứng minh được $FYDX$ và $ZEXD$ là tứ giác điều hòa. Từ đó theo định lí Ptolemy, ta có:

$$DY \cdot FX = DX \cdot FY = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot XY,$$
$$DZ.EX = DX.EZ = \frac{1}{2} \cdot DE.XZ.$$

Nên $\frac{DY}{DZ} \cdot \frac{FX}{EX} = \frac{DF}{DE} \cdot \frac{XY}{XZ}$ mà $\frac{FX}{EX} = \frac{FD}{ED}$ (tứ giác $DFXE$ điều hòa), ta có: $\frac{DY}{DZ} = \frac{XY}{XZ}$
Do đó, $DYXZ$ là tứ giác điều hòa $\Longrightarrow K, Y, Z$ thẳng hàng.

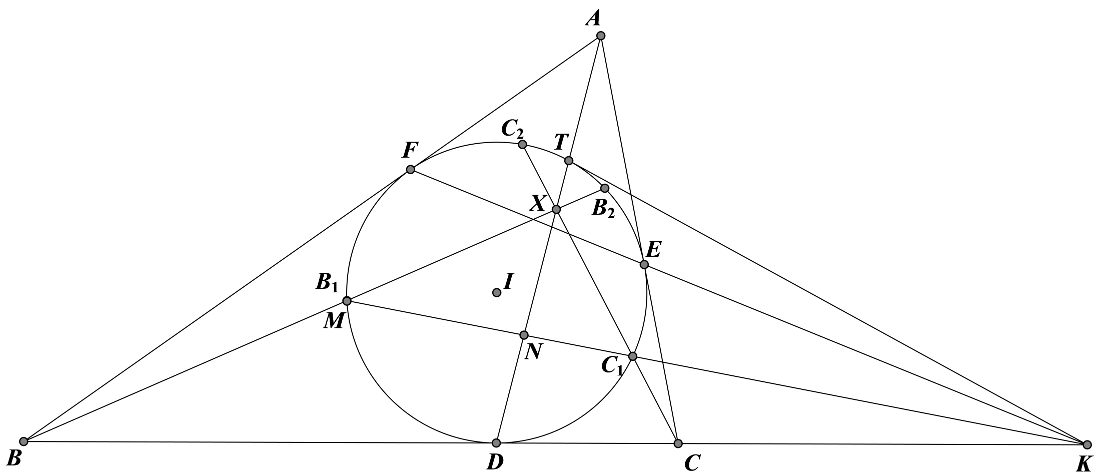
Gọi $H = BZ \cap CY$. Ta có $X(KHCB) = -1$. Mặt khác, theo định lí Ceva, ta cũng chứng minh được AD, CF, BE đồng quy.

Do đó, $(KDCB) = -1$ từ đó $X(KDCB) = -1$. Ta có: $X(KHCB) = X(KDCB) = -1$
$\longrightarrow XK$ trùng XD. Nên AX, BZ, CY đồng quy. □

Qua bài toán trên, ta có thể thấy một ứng dụng của tứ giác điều hòa trong việc giải quyết các vấn đề về chứng minh đồng quy. Cụ thể hơn, dựa vào việc phát hiện tứ giác $DEXF$ điều hòa dẫn đến việc phát triển các ý tưởng và đi đến chứng minh cuối cùng.

Với bài toán trên, ta đặt câu hỏi nếu X di động trên AD thì tính chất đưa ra còn đùng hay không? Ta cùng đến với mở rộng của bài toán trên như sau:

Bài toán 2. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với tại D. Điểm X thuộc đoạn AD, các đường thẳng XB, XC lần lượt cắt (O) tại $B_1, B_2; C_1, C_2$ $(BB_1 < BB_2; CC_1 < CC_2)$. Chứng minh rằng BC, B_1C_1, B_2C_2 đồng quy.



Lời giải. Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của AC, AB với (I). $T = AD \cap (I)$. $K = BC \cap EF$
Theo định lí Ceva, ta chứng minh được AD, BE, CF đồng quy. Từ đó, ta có được $(BCDK) = -1$.
Ta chứng minh được $DFTE$ là tứ giác điều hòa, mà $K = BC \cap EF$.
$\Longrightarrow KT$ là tiếp tuyến của (I) tại T.
Gọi M, N lần lượt là giao điểm của với (I) và AD.

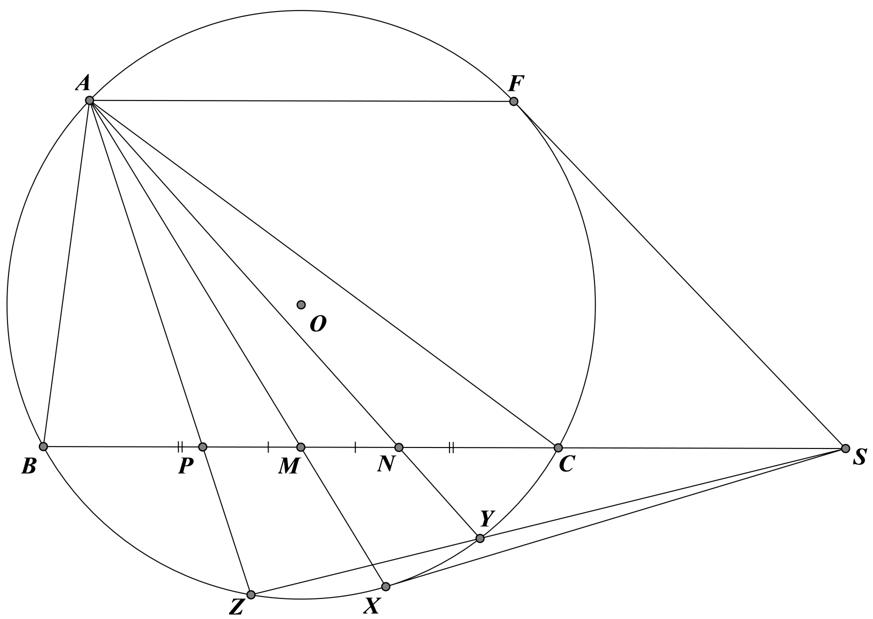
Ta có: KT, KD lần lượt là tiếp tuyến của $(I) \Longrightarrow K, M, C_1$ thẳng hàng (gt) từ đó ta có $DMTC_1$ là tứ giác điều hòa. Điều này dẫn đến

$$T(KNC_1M) = -1 \Leftrightarrow (KNC_1M) = -1 \Leftrightarrow X(KDCB) = -1$$

Mà $X(KDCB) = -1 \Longrightarrow XB$ trùng với XM nên B_1 trùng M dẫn đến $K; B_1; C_1$ thẳng hàng.
Chứng minh tương tự: $B_2; C_2; K$ thẳng hàng.
Vậy BC, B_1C_1, B_2C_2 đồng quy tại K.

□

Bài toán 3. Cho tam giác ABC không cân tại A, nội tiếp đường tròn (O), M là trung điểm của BC. Các điểm N, P thuộc đoạn BC sao cho $MN = MP$. Các đường thẳng AM, AN, AP theo thứ tự cắt (O) tại X, Y, Z. Chứng minh rằng: BC, YZ và tiếp tuyến tại X của (O) đồng quy.



Nhận xét. Với giả thiết đưa ra là M là trung điểm của PN à BC. Ta chợt nghĩ đến tính chất g) đã nêu. Từ đó, ta nghĩ đến cách vẽ thêm yếu tố phụ:

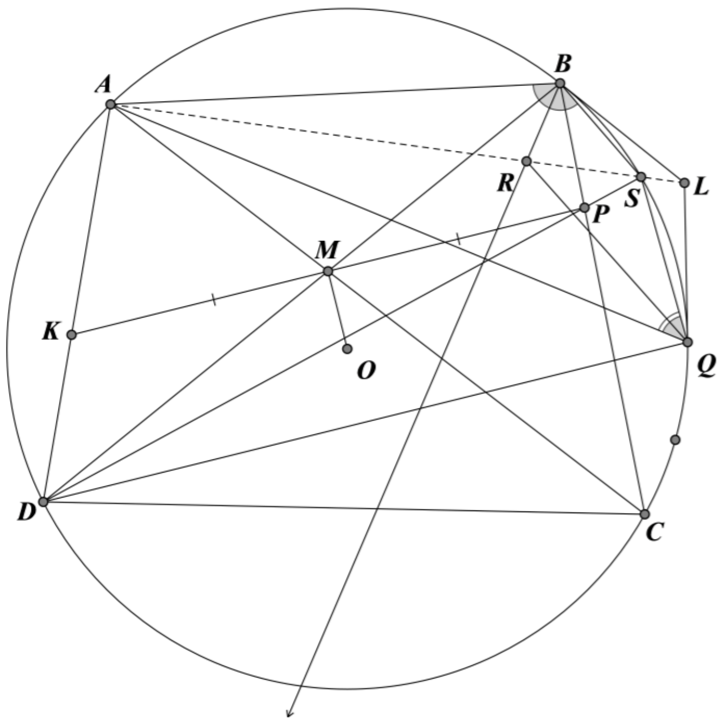
Lời giải. Lấy K thuộc (O) sao cho $AK \parallel BC$. (*)
Gọi S là giao điểm các tiếp tuyến tại K, X của (O).
Từ (*) kết hợp với điều kiện $MB = MC$, $MN = MP$, ta suy ra:

$$A(BCXK) = -1 \text{ và } A(YZXK) = -1$$

Suy ra các tứ giác $BXCK$, $ZXYK$ điều hòa.
Từ đó dẫn đến BC, YZ cùng đi qua S. (Tính chất b)). Điều đó có nghĩa là BC, YZ và tiếp tuyến với (O) tại X đồng quy. □

Nhận xét. Tính chất g) đã nêu cho ta khá nhiều ý tưởng về việc sử dụng yếu tố phụ để làm xuất hiện các tứ giác điều hòa còn ẩn mình trong những hình vẽ và qua đó làm sáng tỏ hơn bức tranh về lời giải bài toán. Để bạn đọc thấy rõ hơn ta cùng đến với bài toán sau:

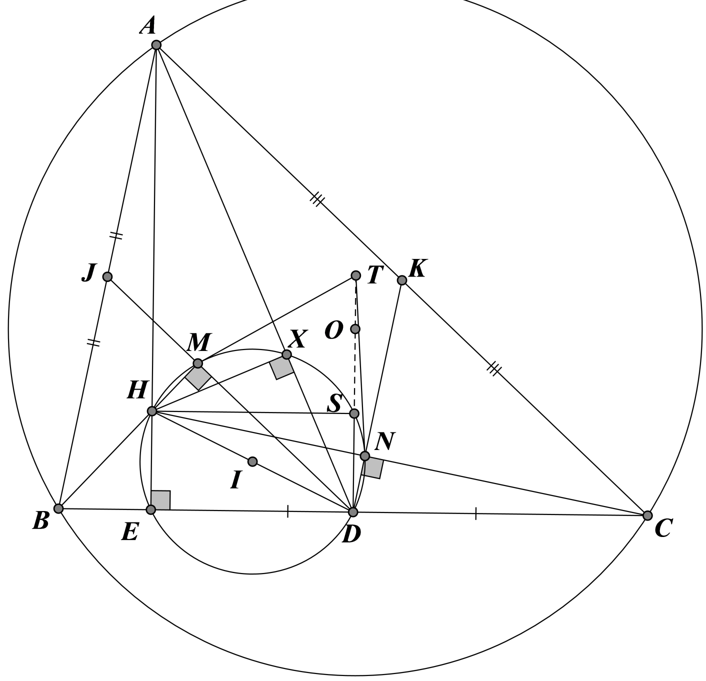
Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). M là giao điểm của AC và BD. P là điểm trên BC sao cho PM vuông góc với OM. DP cắt (O) tại S. Q là điểm thuộc (O) sao cho DQ vuông góc với OM. R là giao điểm của đường phân giác $\angle ABS; \angle AQS$. L là giao điểm của tiếp tuyến tại B và Q của (O). Chứng minh A, R, S, L thẳng hàng.



Nhận xét. Dựa theo yêu cầu bài toán, ta có thể nhận thấy điều cần làm để chứng minh A, R, S, L thẳng hàng là ta phải chứng minh $ABSQ$ là tứ giác điều hòa. Và thật tuyệt vời, từ giả thiết $OM \perp DQ$ ta liên tưởng đến Bài toán Con Bướm và tính chất g), điều đó giúp ta nhận ra yếu tố phụ của bài toán.

Lời giải. Gọi K là giao điểm của MP và AD. Theo bài toán con bướm ta có M là trung điểm của KP. Tao có: M là trung điểm của KP và $DQ \parallel KP$ (cùng vuông góc với OM).
Theo tính chất g) $D(ASBQ) = -1$ suy ra $ABSQ$ là tứ giác điều hòa.
Thêm vào đó, R là giao điểm của phân giác $\angle ABS, \angle AQS$ và L là giao điểm 2 tiếp tuyến tại B, Q (giả thiết).
Suy ra: A, R, S, L thẳng hàng. □

Bài toán 5 (Vietnam TST 2012). Trên mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C trên đường tròn này sao cho BC không là đường kính của (O). Gọi A là một điểm di động trên đường tròn (O) và A không trùng với hai điểm B, C. Gọi D, K, J lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và E, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, DJ, DK.
Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN luôn cắt nhau tại điểm T cố định khi A thay đổi trên (O).



Nhận xét. Bài toán yêu cầu ta chứng minh T là điểm cố định. Điểm cố định khi nó thuộc một đường thẳng cố định, và có một giá trị độ dài không đổi ứng với một điểm cố định. Nhìn vào hình vẽ, ta có thể dự đoán được là T sẽ thuộc vào đường thẳng OD. Muốn được như vậy, dựa vào giả thiết là T là giao điểm 2 tiếp tuyến tại M, N; ta dẫn tới suy nghĩ là ta sẽ chứng minh giao điểm của OD và (I); các điểm M, N, D tạo thành tứ giác điều hòa.

Lời giải. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta xét trường hợp H nằm trong tam giác, các trường hợp còn lại xét tương tự.
Trước hết, ta chứng minh rằng T nằm trên đường thẳng OD. Ta chứng minh H nằm trên các đường thẳng BM và CN nên các điểm D, M, N, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính HD.
Đường thẳng qua H, song song với BC cắt đường thẳng OD tại điểm S. Do nên S cũng thuộc đường tròn đường kính HD. Gọi X là hình chiếu của H lên AD thì X cũng thuộc đường tròn này.

- Ta chứng minh các tứ giác $DMSN, XMEN$ là các tứ giác điều hòa.

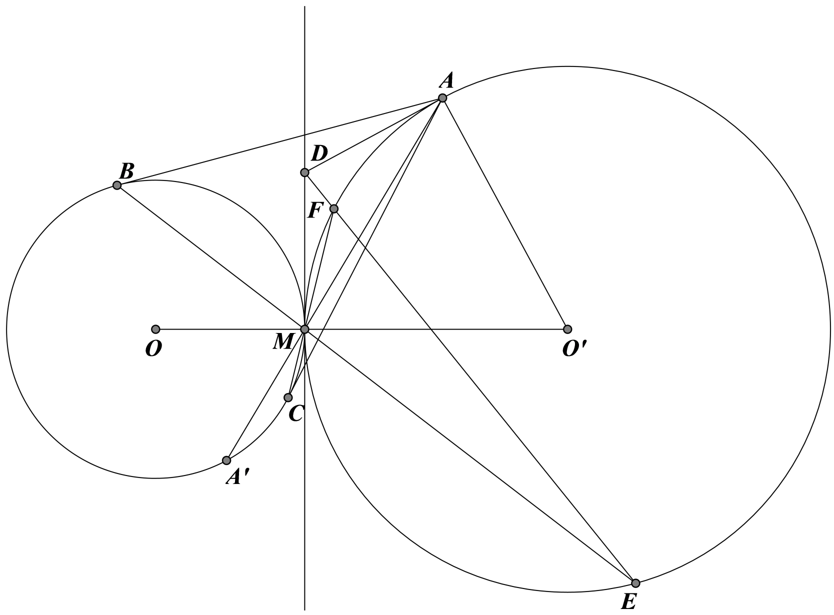
  Thật vậy, do $HS \parallel BC$ và D là trung điểm của BC nên theo tính chất về chùm điều hòa, ta có $H(SDCB) = -1$ hay tứ giác $DMSN$ là tứ giác điều hòa. Theo tính chất của tứ giác điều hòa ta có T nằm trên đường thẳng DO.
  Dễ thấy tứ giác $DEJK$ là hình thang cân nên $\Delta ENK \sim \Delta EMJ (g.g)$.
  Suy ra $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{EJ}{EK} = \dfrac{AB}{AC}$. Hơn nữa, ta có:
  $$\frac{XM}{XN} = \frac{\sin\angle XNM}{\sin\angle XMN} = \frac{\sin\angle XDM}{\sin\angle XDN} = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB} = \frac{AB}{AC}$$
  Do đó $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{XM}{XN}$ hay tứ giác $XMEN$ điều hòa. Ta có được T nằm trên EX hay T chính là giao điểm của EX và DO.

- Ta chứng minh khoảng cách từ T đến D không đổi.
  Gọi B' là hình chiếu của B trên AC. Do $\Delta AHX \sim \Delta ADE$ nên $AX \cdot AD = AH \cdot AE = AB' \cdot AC$ hay tứ giác $CDXB'$ nội tiếp.
  Suy ra $\angle DXC = \angle DB'C = \angle DCA \Longrightarrow DX.DA = DC^2$. Theo định lí Thales thì .

$$DT = \frac{AE.DX}{AX} = \frac{AE.AD.DX}{AX.AD} = \frac{AD.DX}{AH} = \frac{DC^2}{AH}$$

Ta chứng minh được DC, AH đều không đổi nên độ dài đoạn DT không đổi hay T là điểm cố định. ($AH = 2OD$ nên độ dài AH là không đổi).
Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 6 (VMO 2003)**.** Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cố định (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau tại điểm M và bán kính của đường tròn (O') lớn hơn bán kính đường tròn (O). Xét điểm A nằm trên đường tròn (O') sao cho ba điểm O, O' và A không thẳng hàng. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm. Đường thẳng MB, MC lần lượt cắt (O') tại E và F. Gọi D là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O') và đường thẳng EF.
Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định, khi điểm A di chuyển trên đường tròn (O') sao cho ba điểm O, O' và A không thẳng hàng.

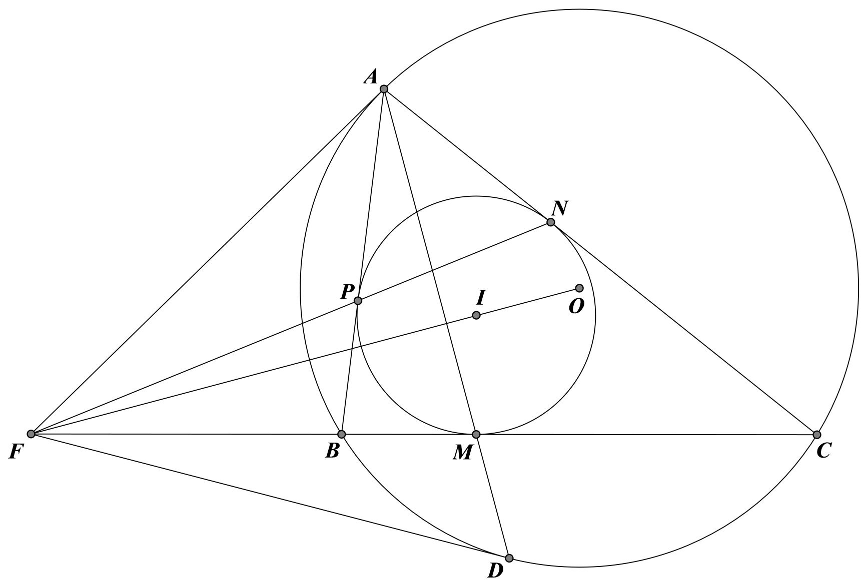


Lời giải. Gọi A' là giao điểm thứ hai của AM và (O). Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên tứ giác $A'BMC$ là tứ giác điều hòa.
Suy ra tiếp tuyến tại A', M của (O) và đường thẳng BC đồng quy tại một điểm. Giả sử điểm đó là D'.
Như vậy D' di động trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M và tiếp tuyến đó cố định. Phép vị tự tâm M, biến (O) thành (O'), cho nên biến BC thành đường thẳng EF, tiếp tuyến tại A' thành tiếp tuyến tại A và biến D' thành D. Vậy tập hợp các điểm D nằm trên đường thẳng MD' là tiếp tuyến tại M của (O).

□

Nhận xét. Bài này có thể giải theo một hướng khác là chứng minh tứ giác $FMEA$ là tứ giác điều hòa nên D thuộc tiếp tuyến của (O') tại M).

Bài toán 7. Cho tam giác không cân ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Gọi M là tiếp điểm của BC và (I), D là giao điểm thứ hai của AM và (O). Chứng minh rằng nếu OI vuông góc với AM thì $\dfrac{MB}{MC}=\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2$.

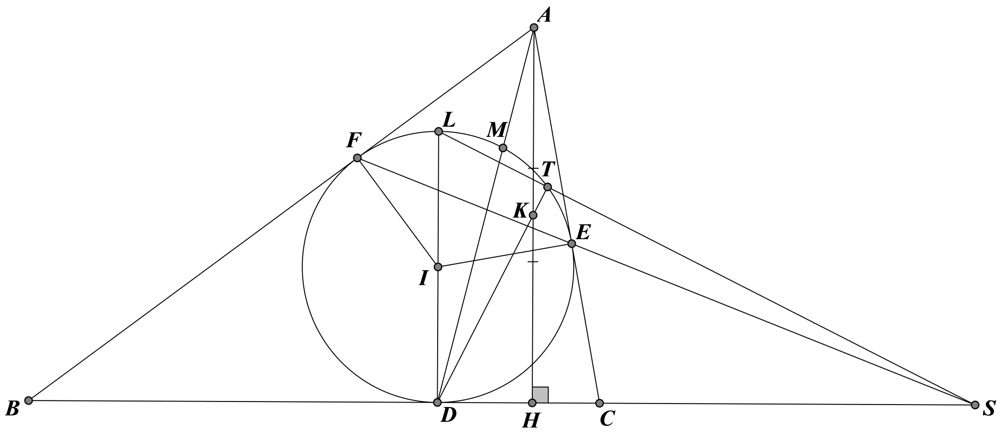


Lời giải. Gọi $F=BC\cap OI$. N,P lần lượt là tiếp điểm của AB,AC với (I).
Gọi D là điểm đối xứng của A qua FO. Ta có: FM là tiếp tuyến của (I) nên đường đối cực của F đi qua M.
Mà OI vuông góc với $AM \Longrightarrow AM$ là đường đối cực của F đối với (I).
Suy ra: Đường đối cực của A đối với (I) đi qua F, hay F,N,P thẳng hàng.
Lại có: AM,BN,CP đồng quy tại một điểm (theo định lí Ceva)
$\Longrightarrow (FMBC)=-1$. Do đó AM là đường đối cực của F đối với (O).
$\Longrightarrow FA$ là tiếp tuyến của (O).
Vì A đối xứng với D qua FO nên FD là tiếp tuyến của (O).
Vậy tứ giác $ABCD$ điều hòa. Nên theo tính chất d) đã nêu thì $\dfrac{MB}{MC}=\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2$ □

Bài toán 8 (Shortlist IMO 2006)**.** Cho tam giác ABC, đường cao AH, K là trung điểm của AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. DK cắt (I) tại T. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác TBC tiếp xúc với (I).

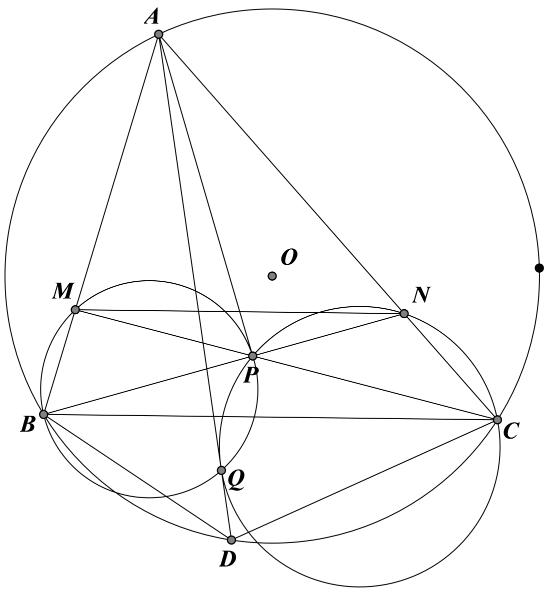
Nhận xét. Để chứng minh (TBC) tiếp xúc với (I) tại T, ta liên tưởng tới bổ đề sau: Nếu đường tròn (O') đi qua điểm T thuộc đường tròn (O), tiếp xúc với dây AB của đường tròn (O) tại C và TC đi qua điểm chính giữa M của cung AB không chứa T của đường tròn (O) thì (O') tiếp xúc trong với (O) tại T. Như vậy điều ta cần bây giờ là chứng minh TD là phân giác góc $\angle TBC$.
Thêm một giả thiết của bài toán là K là trung điểm AH khiến ta nghĩ tới việc sử dụng

tính chất g) làm xuất hiện tứ giác điều hòa để từ đó phát triển thêm các ý tưởng giải bài toán.



Lời giải. Gọi M là giao điểm của AD và (I). Kẻ đường kính DL của (I). Ta chứng minh được tứ giác $MEDF$ điều hòa. Gọi S là giao điểm của EF và BC.Theo tính chất của tứ giác điều hòa, SM là tiếp tuyến tại M của (I).
Theo định lí Ceva, AD, CF và BE đồng quy nên ta có $(SDCB) = -1$.
Ta chứng minh được $D(LTAH) = -1$ (tính chất g)) $\Longrightarrow LMTD$ là tứ giác điều hòa mà S là giao điểm 2 tiếp tuyến tại D,M nên suy ra S, T, D thẳng hàng và $\angle STD = 90°$
Lại có $T(SDCB) = -1$ suy ra TD là phân giác $\angle TBC$.
Và dựa vào bổ đề đã nêu, ta có đpcm. □

Bài toán 9 (BMO-2009). Cho ΔABC, đường thẳng d song song BC và cắt AB,AC tại M và N. P là giao điểm của BN và CM. (BMP) và (CPN) cắt nhau tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh $\angle BAQ = \angle CAP$.



Lời giải. Ta thấy được AP là trung tuyến của ΔABC.(bổ đề hình thang)
Vậy việc chứng minh sẽ tương đương với việc chứng mìn là đường đối trung của

ΔABC, điều này làm ta liên tưởng đến tính chất e) của bài toán. Gọi D là giao điểm AQ và (O). Đầu tiên, ta đi chứng minh tứ giác $ABQN$ nội tiếp. Ta thấy

$$\angle BQN = \angle BQP + \angle PQN = \angle AMC + \angle PCN = 180^\circ - \angle BAC \Rightarrow BQN + BAN = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác $ABQN$ nội tiếp. Ta chứng minh được $\angle BQD = \angle BNC; \angle BDQ = \angle BCN$.
Từ đó chứng minh $\Delta BQD \sim \Delta BNC\,(g.g) \Longrightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{QD}{CN}$.
Chứng minh tương tự: $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{QD}{MB}$
Vậy ta chứng minh được $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{MB}{CN} = \dfrac{BA}{CA}$ nên tứ giác $ABDC$ điều hòa nên suy ra AQ là đường đối trung của ΔABC nên $\angle BAQ = \angle CAP$.(đpcm) □

3. Bài tập vận dụng

1. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với lần lượt vớiBC, AC, AB tại D, E, F. AD cắt (I) tại X; BX, CX theo thứ tự cắt (I) tại Y, Z; AY, AZ theo thứ tự cắt tại R, S. Chứng minh rằng AD, ES, FR đồng quy.

2. (Việt Nam TST 2001) Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Một tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với(O_1) tại P và (O_2) tại T. Các tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp ΔAPT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của B qua PT. Chứng minh A, H, S thẳng hàng.

3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có A cố định và B, C thay đổi trên (O) và luôn song song với một đường thẳng cố định cho trước. Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại K. Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của AM với (O). Chứng minh rằng đường thẳng KN luôn đi qua một điểm cố định.

4. Cho (O) và một điểm cố định nằm ngoài (O); kẻ tiếp tuyến MB và một cát tuyến MAC bất kì. Một đường thẳng d song song với MB cắt BA, BC tại N, P. Chứng minh rằng trung điểm I của NP thuộc một đường thẳng cố định.

5. Từ điểm A nằm ngoài (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm). Lấy T bất kì thuộc cung nhỏ BC. Kẻ TH vuông góc với BC (tại H). Chứng minh TH là phân giác của góc $\angle MHN$ (M, N là giao điểm của tiếp tuyến tại T của (O) với AB, AC).

6. (IMO 2003) Giả sử $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R là chân các đường vuông góc hạ từ D lần lượt lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi phân giác của các góc ABC, ADC cắt nhau trên AC.

7. (IMO 2012) Cho tam giác ABC có $\angle BCA = 90^\circ$. D là chân đường cao hạ từ C của ΔABC. X là điểm thuộc đoạn CD. K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$. Tương tự L là điểm thuộc đoạn BX sao cho $AL = AC$. Gọi M là giao điểm của AL và BK. Chứng minh rằng $MK = ML$.

Đề thi thử 10 Chuyên Toán

Nguyễn Tăng Vũ (GV trường PTNK TPHCM),
Lương Xuân Vinh (GV trường ĐH Kinh tế Tài chính TPHCM)

1. Đề thi

Đây là đề thi thử lần 2 của trung tâm STAR EDUCATION, diễn ra vào tháng 05/2019. Để tham khảo thêm đề lần 1 và các tài liệu khác, mọi người có thể đến trang web: **www.star-education.net**

Thời gian làm bài: 150 phút, giám thị coi thi không giải thích gì thêm

Bài 1. *(1,5 điểm)* Cho $f(x) = x^3 - (p+5)x^2 - 2(p-3)(p-1)x + 4p^2 - 24p + 36$, trong đó p là một tham số thực.

(a) Chứng minh rằng $f(3-p) = 0$.

(b) Tìm tất cả các giá trị của p để hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $4\sqrt{2}$.

Bài 2. *(1,5 điểm)* Cho các số x, y, z. Đặt $a = x(y-z)^2, b = y(x-z)^2, c = z(x-y)^2$

(a) Tìm x, z, y biết $a = 9, b = -1, c = 8$.

(b) Chứng minh rằng nếu x, y, z không âm thì $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$

Bài 3. *(1,5 điểm)* Cho a, b là hai số nguyên dương và $a > b$ thỏa mãn:

$$(a-b, ab+1) = 1, (a+b, ab-1) = 1$$

(a) Chứng minh rằng: $\left(a^2+1, b^2+1\right) = 1$

(b) Chứng minh rằng: $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ không thể là số chính phương.

Bài 4. *(3,0 điểm)* Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. A là điểm thay đổi trên cung lớn BC sao cho ABC là tam giác nhọn. Đường cao CD và BE cắt (O) tại P, Q. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP và AEQ cắt nhau tại K và cắt các đường thẳng AC, AB tại F, G (K, F, G khác A). Gọi H là trực tâm tam giác ABC.

(a) Chứng minh diện tích tam giác APQ không đổi. Tìm vị trí của A để khoảng cách từ H đến PQ là lớn nhất.

(b) Chứng minh AK đi qua điểm cố định.

(c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFG. Chứng minh IK không đổi và vuông góc với BC.

Bài 5. *(1,5 điểm)* Có 8 học sinh cùng nhau tham gia giải 8 bài toán.

(a) Biết rằng mỗi bài toán được giải bởi đúng 5 học sinh. Chứng minh rằng có hai học sinh có thể cùng nhau giải được cả 8 bài.

(b) Bài toán trên còn đúng hay không nếu thay 5 học sinh bởi 4 học sinh?

- HẾT -

2. Đáp án chi tiết

Bài 1. (a) Ta có: $f(x)=(x+p-3)\left[x^2-2(p+1)x+4(p-3)\right]$, do đó $f(3-p)=0$.

(b) Các nghiệm của phương trình là $x_{1,2}=p+1\pm\sqrt{p^2-2p+13}$ và $x_3=3-p$.
Nếu $p>3$ thì $x_1>0, x_2>0, x_3<0$. Phương trình $x_1^2+x_2^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2=32$ cho $p=\pm1$, thử lại ta thấy điều này không được.
Nếu $p=3$, thì hai trong số các nghiệm bằng 0 và trường hợp này không thỏa.
Nếu $p<3$, thì $x_1>0$ và $x_3>0$, $x_2<0$. Vì thế: $32=x_1^2+x_2^2=\left(p+1+\sqrt{p^2-2p+13}\right)^2+(3-p)^2$. Phương trình này tương đương với:

$$(p+1)\left[3(p-3)+2\sqrt{p^2-2p+13}\right]=0$$

Từ đó giải được: $p=-1$ và $p=\dfrac{23-8\sqrt{6}}{5}$.

Bài 2. (a) Ta thấy x,y,z phải đôi một phân biệt, vì thế nên
$0=a+b-c=x(y-z)^2+y(x-z)^2-z(x-y)^2$
$=xy^2-2xyz+xz^2+yz^2-zx^2-zy^2-2xyz$
$=xy^2+yx^2+xz^2+yz^2-zx^2-zy^2-2xyz$
$=(x+y)(xy+z^2)-z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2-zx-zy)=(x+y)(y-z)(x-z)$
$\Leftrightarrow x+y=0$
Với $x=-y$, ta có:

$$\begin{cases}9=x(x+z)^2\\8=4zx^2\end{cases}\Rightarrow 9=x\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^2\Leftrightarrow 9=x\left(x^2+\frac{4}{x^4}+\frac{4}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{4}{x^3}-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow z=2\Rightarrow y=-1\\x=\sqrt[3]{4}\Rightarrow z=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow y=-\sqrt[3]{4}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm (x,y,z) là $(1;-1;2),\left(\sqrt[3]{4},-\sqrt[3]{4},\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\Omega$.

(b) Ta có x,y,z không âm nên a,b,c không âm
$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$
$=(a^2+b^2)^2-2c^2(a^2+b^2)+c^4-4a^2b^2$
$=(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2$
$=(a^2+b^2-2ab-c^2)(a^2+b^2+2ab-c^2)$
$=(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$
$=-(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)$
Mà
$a+b-c=(x+y)(y-z)(x-z)$,
$b+c-a=(y+z)(y-x)(z-x)$,
$a+c-b=(x+z)(x-y)(z-y)$
Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Bài 3. (a) Gọi $d = \left(a^2+1, b^2+1\right)$, giả sử $d > 1$, do đó d có ước nguyên tố p, suy ra:

$$a^2 - b^2 \vdots p \Rightarrow (a-b)(a+b) \vdots p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b \vdots p \\ a+b \vdots p \end{array}\right.$$

- *Trường hợp 1.* Nếu $a-b \vdots p \Rightarrow (a-b)\,b \vdots p \Rightarrow ab-b^2 \vdots p$ mà $b^2+1 \vdots p$ nên $ab+1 \vdots p$, do đó $(a-b, ab+1) = d > 1$ (mâu thuẫn)
- *Trường hợp 2.* Nếu $a+b \vdots p \Rightarrow (a+b)\,b \vdots p \Rightarrow ab+b^2 \vdots p$ mà $b^2+1 \vdots p$ nên $ab-1 \vdots p$, do đó $(a+b, ab-1) = d > 1$ (mâu thuẫn)

Do đó ta có điều phải chứng minh.

(b) Ta có: $T = (a-b)^2 + (ab+1)^2 = \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)$, do đó nếu T là số chính phương thì cả a^2+1 và b^2+1 đều là số chính phương. Tuy nhiên ta có:

$$a^2 < a^2+1 < (a+1)^2$$

chứng minh tương tự cho b nên cả a^2+1 và b^2+1 không thể là số chính phương. Từ đó ta có điều giả sử là sai.
Lưu ý: Bổ đề *hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau mà có tích là một số chính phương thì cả hai số đó đều là số chính phương* cần chứng minh lại trước khi sử dụng.

Bài 4. (a) Vì $BC = R\sqrt{3}$ nên $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Bằng biến đổi góc, ta có $\widehat{APD} = \widehat{AHD}$ nên suy ra AHP là tam giác cân, do đó $AP = AH$. Tương tự thì $AQ = AH$. Ngoài ra, $\widehat{PAQ} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

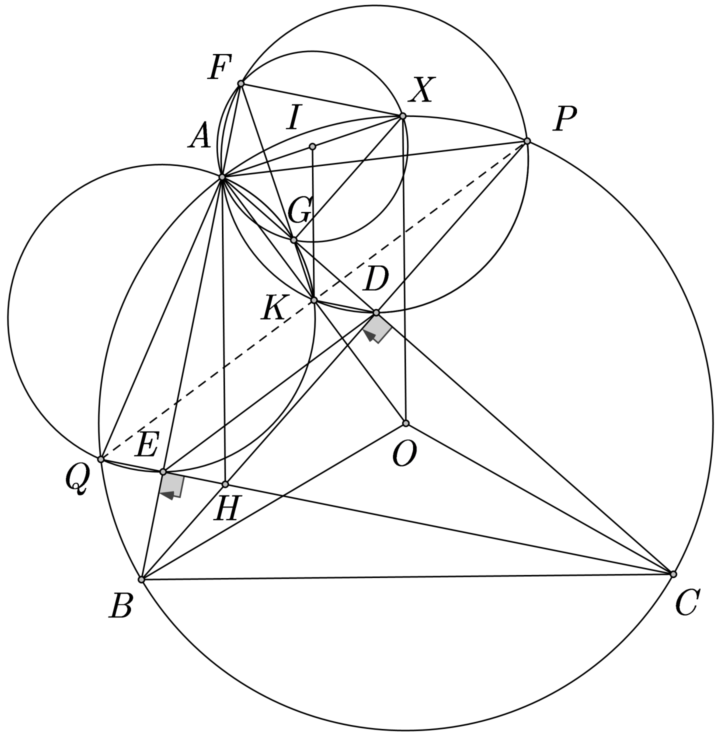
Ta thấy hai tam giác ADE, ABC đồng dạng với nhau, ngoài ra AH là độ dài đường kính của đường tròn (ADE), còn $2R$ là độ dài đường kính của đường tròn (ABC) nên $\frac{AH}{2R} = \frac{AD}{AB} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = R$. Tam giác APQ có góc ở đỉnh bằng 120° và các cạnh $AP = AQ = R$ không đổi nên diện tích của nó không đổi.

Vì D, E lần lượt là trung điểm của HP, HQ nên khoảng cách từ H đến PQ gấp đổi khoảng cách đến DE. Vì H di chuyển trên cung chứa góc 120° dựng trên DE (ta cũng có $DE = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ không đổi) nên khoảng cách đang xét lớn nhất khi H là điểm chính giữa cung, tức là $HD = HE$. Điều này kéo theo $AD = AE$ và $AB = AC$ nên tam giác ABC phải là tam giác đều.

(b) Bằng biến đổi góc, ta có $AO \perp DE$. Mà trong tam giác HPQ thì DE chính là đường trung bình nên $DE \parallel PQ$. Do đó $AO \perp PQ$. Mặt khác,

$$\widehat{AKQ} = \widehat{AEQ} = 90^\circ, \widehat{AKP} = \widehat{ADP} = 90^\circ$$

nên P, K, Q thẳng hàng và $AK \perp PQ$. Từ đó suy ra AK luôn đi qua O là điểm cố định.



(c) Vì AK là đường cao trong tam giác APQ nên ta tính được $AK = AP \cdot \cos 60° = \frac{R}{2}$. Bằng biến đổi góc, ta có F, G, K thẳng hàng và $AF = AG$. Vì $\widehat{FAG} = 120°$ và $IA = IF = IG$ nên tứ giác $AFIG$ là hình thoi. Do đó ta được $IK = AK = \frac{R}{2}$, không đổi.

Tiếp theo, gọi X là giao điểm của (AFG) và (O) thì $\widehat{XAC} = \widehat{IAG} = 60°$ nên X chính là điểm chính giữa cung lớn BC của (O). Do đó $XO \perp BC$, mà I là trung điểm AX, K là trung điểm AO nên IK là đường trung bình của AXO, kéo theo $IK \parallel XO$. Vì thế nên $IK \perp BC$.

Bài 5. Gọi các học sinh là $A_1, A_2, ..., A_8$ và các bài toán là $1, 2, ..., k$.

(a) Giả sử không có hai cặp nào cùng giải được hết 8 bài. Ta đếm số cặp sau $(A_i, A_j; k)$ là hai bạn A_i, A_j không giải được bài k.

Theo giả sử thì với mỗi cặp có ít nhất một bài bí, có 28 cặp nên số bộ $(A_iA_j; k)$ ít nhất là 28. (1)

Mặt khác mỗi bài có 3 bạn không giải ra, nên mỗi bài k có đúng 3 cặp $(A_iA_j; k)$, do có 8 bài nên số bộ $(A_iA_j; k)$ nhiều nhất là 24. (2)

(1) và (2) mâu thuẫn, vậy điều giả sử sai, tức là có một hai bạn cùng giải hết 8 bài.

(b) Bài toán không còn đúng nữa nếu ta thay 5 học sinh bởi 4 học sinh. Thật vậy, ta có thể xem ví dụ sau:

- Học sinh 1,2 giải được các bài 1,2,3,4.
- Học sinh 3,4 giải được các bài 3,4,5,6.
- Học sinh 5,6 giải được các bài 1,6,7,8.
- Học sinh 7,8 giải được các bài 2,5,7,8.

Đề thi thử THPT Quốc gia 2019

Nguyễn Ngọc Duy, Vương Trung Dũng
(GV trường PTNK TPHCM)

1. Đề thi

Đây là đề thi thử lần 1 của trung tâm STAR EDUCATION, diễn ra vào tháng 03/2019. Để tham khảo thêm đề lần 2 và các tài liệu khác, mọi người có thể đến trang web: **www.star-education.net**

Thời gian làm bài: 90 phút, giám thị coi thi không giải thích gì thêm

Câu 1. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

(A) $(-\infty; 0)$.

(B) $(-3; 1)$.

(C) $(0; +\infty)$.

(D) $(-1; 3)$.

Câu 2. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Câu 3. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{45}$.

(A) $-\mathrm{C}_{45}^{5}$.

(B) C_{45}^{15}.

(C) $-\mathrm{C}_{45}^{15}$.

(D) C_{45}^{30}.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 321, u_{n+1} = u_n - 3$ với mọi $n \geq 1$. Tính tổng của 125 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

(A) 63375.

(B) 16687,5.

(C) 16875.

(D) 63562,5.

Câu 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 6$.

(A) $y = 6x + 6$.

(B) $y = -6x + 1$.

(C) $y = -6x + 10$.

(D) $y = 6x + 10$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của $\bar{z} + iz$.

(A) $4\sqrt{2}$.

(B) 4.

(C) $8\sqrt{2}$.

(D) 8.

Câu 7. Cho phương trình $\sin x - (m+1)\cos x = 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm.

(A) $m \in \left[-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}\right]$.

(B) $m \in \left(-\infty; -1-\sqrt{3}\right] \cup \left[-1+\sqrt{3}; +\infty\right)$.

(C) $m \in [0; -2]$.

(D) $m \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

Câu 8. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;3)$ và đường thẳng $(\Delta)\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-2}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ.

(A) $\dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

(B) $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

(C) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

(D) $\sqrt{2}$.

Câu 9. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-16x+30}{x-3} & x\neq 3\\ 4m & x=3\end{cases}$$

Biết rằng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $f(m)$.

(A) 12.

(B) -2.

(C) -12.

(D) 2.

Câu 10. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

(A) $\dfrac{a^3}{6}$.

(B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

(C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

(D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)=\log_{2x-1}3+\log_2(5-x)$.

(A) $\left[\dfrac{1}{2};5\right]$.

(B) $\left(\dfrac{1}{2};5\right)$.

(C) $\left[\dfrac{1}{2};5\right]\setminus\{1\}$.

(D) $\left(\dfrac{1}{2};5\right)\setminus\{1\}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mặt đáy, góc giữa SC và đáy bằng 45°. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

(B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

(C) $\dfrac{a^3}{2}$.

(D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 13. Xét nguyên hàm $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ thỏa $F(1) = 1$. Tính $F(4)$.

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

Câu 14. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số và các chữ số phân biệt?

(A) 2250.

(B) 2560.

(C) 2296.

(D) 2520.

Câu 15. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

(A) $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$.

(B) $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.

(C) $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$.

(D) $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Câu 16. Gọi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1| = 1$ và $(1 + i)(\overline{z} - 1)$ có phần thực bằng 1 đồng thời z không là số thực. Khi đó ab bằng

(A) $ab = 1$.

(B) $ab = 2$.

(C) $ab = -2$.

(D) $ab = -1$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos^2 x}$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Câu 18. Một trong bốn hàm số ở các phương án **A, B, C, D** cho dưới đây có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đó là hàm số nào?

(A) $y=-x^3-3x^2-1$.

(B) $y=-2x^3-3x^2-1$.

(C) $y=-x^3+3x^2-1$.

(D) $y=x^3-3x^2-1$.

Câu 19. Trên miền $(0;+\infty)$, xét các đồ thị của các hàm số $y=2^x, y=\log_2 x, y=x^{-\frac{3}{2}}, y=x^{\pi}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu đồ thị có tiệm cận (đứng hoặc ngang)?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Câu 20. Tìm m thì hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m-1)x$ đạt cực đại tại $x=1$?

(A) $m=1$.

(B) $m=2$.

(C) $m=3$.

(D) $m=0$.

Câu 21. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn:

$$\int_1^3 (f(x)+3g(x))\,\mathrm{d}x = 10, \int_1^3 (2f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = 6.$$

Tính $I = \displaystyle\int_1^3 (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 6$.

(B) $I = 8$.

(C) $I = 7$.

(D) $I = 9$.

Câu 22. Có bao nhiêu số tự nhiên m không vượt quá 2019 thỏa $(1+i)^m$ là số thực?

(A) 1008.

(B) 504.

(C) 505.

(D) 1010.

Câu 23. Biết $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(3x-1)+C$ với $x \in \left(\frac{1}{9};+\infty\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1)+C$.

(B) $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(3x-1)+C$.

(C) $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(9x-1)+C$.

(D) $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 3x\ln(9x-1)+C$.

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ có bao nhiêu tiệm cận?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Câu 25. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a. Trên mặt cầu (S) đường kính BC lấy điểm D. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$?

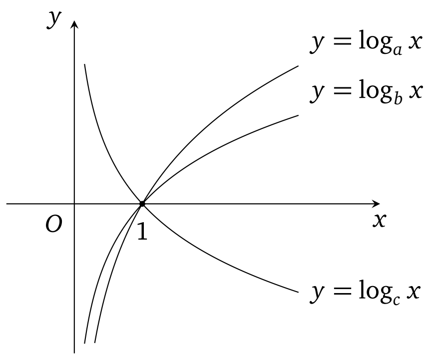
(A) $\dfrac{a^3}{24}$.

(B) $\dfrac{a^3}{12}$.

(C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

(D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 26. Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



(A) $a < b < c$.

(B) $c < a < b$.

(C) $c < b < a$.

(D) $b < c < a$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) có tâm $H(-1;1;1)$, bán kính $r = 2$ nằm trên mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z + 1 = 0$. Diện tích của mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng $(Q) : x + y + z = 0$ và chứa đường tròn (C) là

(A) 26π.

(B) 2π.

(C) 52π.

(D) 40π.

Câu 28. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày cho số tiền lãi là x^2+2x (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày cho số tiền lãi là $-27y^2+326y$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày để số tiền lãi thu được nhiều nhất? Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc và máy B làm việc không quá 6 ngày.

(A) 6.

(B) 5.

(C) 7.

(D) 4.

Câu 29. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x}{x-m}$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

(A) $m>1$.

(B) $0<m\leq 1$.

(C) $0\leq m<1$.

(D) $0<m<1$.

Câu 30. Cho phương trình $|x|\left(x^2-3\right)-m=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm?

(A) 5.

(B) 11.

(C) 6.

(D) 9.

Câu 31. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích 36 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (α) chứa AM song song với BD cắt SB,SD lần lượt tại P,Q. Tính thể tích khối chóp $S.APMQ$.

(A) 15.

(B) 18.

(C) 9.

(D) 12.

Câu 32. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $AB=5$, M là điểm di động trong không gian. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$.

(A) $\dfrac{125}{4}$.

(B) 75.

(C) $\dfrac{225}{4}$.

(D) 50.

Câu 33. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y)$. Tìm tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(B) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(C) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(D) $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 34. Giá trị của m nằm trong khoảng nào để đồ thị hàm số $y = 2x^4 + mx^2 + m$ có ba điểm cực trị và ba điểm này tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

(A) $(-12;-6)$.

(B) $(-6;0)$.

(C) $(-6;-5)$.

(D) $(2;6)$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-2)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z-4=0$, $(\beta): 2x-y+3z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với giao tuyến của (α) và (β)?

(A) $x-7y+3z+11=0$.

(B) $x-7y-3z-1=0$.

(C) $x-y+3z+5=0$.

(D) $x+y-3z-9=0$.

Câu 36. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành, hai đường thẳng $x=-1, x=2$. Biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục bằng 2 cm.

(A) $15\,\text{cm}^2$.

(B) $\dfrac{15}{4}\,\text{cm}^2$.

(C) $\dfrac{17}{4}\,\text{cm}^2$.

(D) $17\,\mathrm{cm}^2$

Câu 37. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z; iz$ và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.

(A) $2\sqrt{3}$.

(B) $3\sqrt{2}$.

(C) 6.

(D) 9.

Câu 38. Hỏi phương trình $\mathrm{e}^{2019x} = x - 1$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2018.

(D) 2019.

Câu 39. Tìm m để phương trình $\log_3^2(9x) - (m+1)\log_3\dfrac{x}{3} - 10 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = 1$?

(A) $m = 3$.

(B) $m = 6$.

(C) $m = 8$.

(D) $m = 4$.

Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, $C'D'$ và DD'. Tính khoảng cách từ A đến (MNP).

(A) $\dfrac{15}{11}a$.

(B) $\dfrac{15}{22}a$.

(C) $\dfrac{9}{11}a$.

(D) $\dfrac{3}{4}a$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

(A) $R = \dfrac{5a}{2}$.

(B) $R = \dfrac{17a}{2}$.

(C) $R = \dfrac{13a}{2}$.

(D) $R = 6a$.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $G(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm G và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt lại A, B, C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

(A) $x + 2y + 2z - 12 = 0$.

(B) $x + 2y + 2z + 6 = 0$.

(C) $2x + y + z - 6 = 0$.

(D) $2x + 4y + 4z - 12 = 0$.

Câu 43. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(x+1)\ln x + 2}{1 + x\ln x}\,\mathrm{d}x = a\cdot\mathrm{e} + b\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỷ số $\dfrac{a}{b}$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 2.

Câu 44. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy hình trụ và căng một cung 120°. Diện tích thiết diện $ABB'A'$ là

(A) $\sqrt{3}$.

(B) $2\sqrt{3}$.

(C) $2\sqrt{2}$.

(D) $3\sqrt{2}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

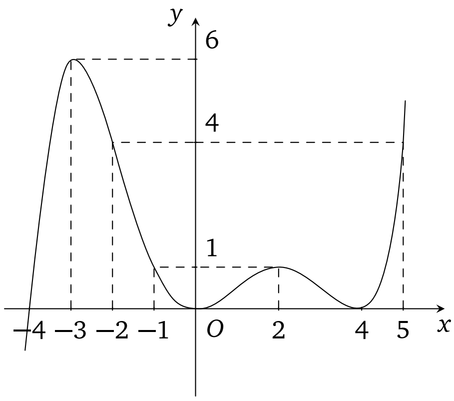
(A) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(2x-1) - x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào?



(A) $(-2;0)$.

(B) $(-1;1)$.

(C) $(1;3)$.

(D) $(4;+\infty)$.

Câu 47. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục thỏa đẳng thức $2f(x) - x^2 f''(x) + (x^4 + 4x^3)e^x = 0$ và $f(1) = e$. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

(A) $I = 2e$.

(B) $I = e - 2$.

(C) $I = e + 2$.

(D) $I = e$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa $(1-i)|z| = z + 4 - \dfrac{2+3i}{\overline{z}}$. Hỏi phần thực của z thuộc khoảng nào?

(A) $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

(B) $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

(C) $(0; 1)$.

(D) $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ O, bán kính bằng 1. Mặt phẳng (P) bất kì tiếp xúc với (S) và cắt ba trục tọa độ tại A, B, C. Tìm thể tích nhỏ nhất của tứ diện $O.ABC$.

(A) $\dfrac{1}{3}$.

(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 50. Chọn ngẫu nhiên một số nhị phân có 10 chữ số (các chữ số của số đó hoặc là 0 hoặc là 1) có chữ số đầu tiên là 1. Tính xác suất để số được chọn không có ba chữ số liên tiếp nào đều bằng 0.

(A) $\dfrac{1}{2}$.

(B) $\dfrac{137}{256}$.

(C) $\dfrac{69}{128}$.

(D) $\dfrac{273}{512}$.

2. Đáp án và lời giải một số câu

2.1. Đáp án

1C	2B	3C	4C	5D	6C	7B	8B	9C	10B
11D	12A	13B	14C	15B	16A	17D	18C	19B	20C
21A	22C	23A	24A	25C	26B	27C	28D	29D	30C
31D	32D	33A	34B	35B	36D	37B	38B	39A	40A
41C	42C	43B	44B	45D	46B	47B	48C	49C	50B

2.2. Lời giải

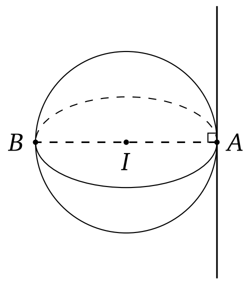
Câu 4. Với dãy số (u_n) xác định như trên ta dễ thấy (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 321$, công sai $d = -3$. Do đó, tổng của 125 số hạng đầu của (u_n) là

$$S_{125} = \frac{125 \cdot [2u_1 + (125-1)d]}{2} = \frac{125 \cdot (2 \cdot 321 - 124 \cdot 3)}{2} = 16875$$

Câu 6. Ta có $\bar{z} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i} = -4-4i \Rightarrow z = -4+4i \Rightarrow \bar{z} + iz = -8-8i$.
Suy ra $|\bar{z} + iz| = |-8-8i| = 8\sqrt{2}$.

Câu 15. Vì mặt cầu (S) có đường kính là AB nên tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của AB. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$.
Vì (P) tiếp xúc với (S) tại A nên (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA} = (5;1;-6)$ làm vec-tơ pháp tuyến. Suy ra

$$(P): 5(x-6) + (y-2) - 6(z+5) = 0 \Rightarrow (P): 5x + y - 6z - 62 = 0.$$



Câu 21. Ta có $\displaystyle\int_1^3 (f(x) + 3g(x))\,\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10.$ (1)

Ta có $\displaystyle\int_1^3 (2f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 6 \Rightarrow 2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Vậy $I = \displaystyle\int_1^3 (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = 4 + 2 = 6.$

Câu 23. Đặt $x = 3t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int f(3t)\,\mathrm{d}t = 6t \cdot \ln(9t-1) + C$

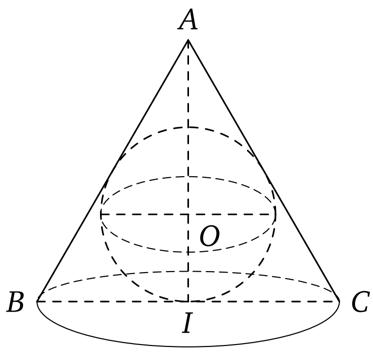
$\Rightarrow \int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2t \cdot \ln(9t-1) + C.$

Mà nguyên hàm không phụ thuộc vào biến số nên $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1) + C.$

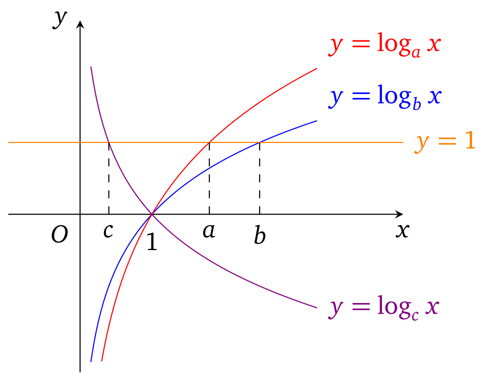
Câu 25. Mặt cầu nội tiếp hình nón đỉnh A, đáy là đường tròn đường kính BC nên mặt cầu có tâm O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC.

Do đó $OI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{3}$.



Câu 26. Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị tại các điểm có hoành độ như hình vẽ, từ đó suy ra $c < a < b$.



Câu 27. Gọi I, R là tâm và bán kính của mặt cầu, ta có $IH \perp (P)$ và I là giao điểm của đường thẳng đi qua I, H và mặt phẳng (Q). Phương trình của đường thẳng IH : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Điểm I thuộc (Q) cho nên $-1 + t + 1 - 2t + 1 + 2t = 0 \Rightarrow t = -1$ ta có được $I(-2; 3; -1)$, $R^2 = IH^2 + r^2 = 9 + 4 = 13$, diện tích của mặt cầu là $4\pi R^2 = 52\pi$.

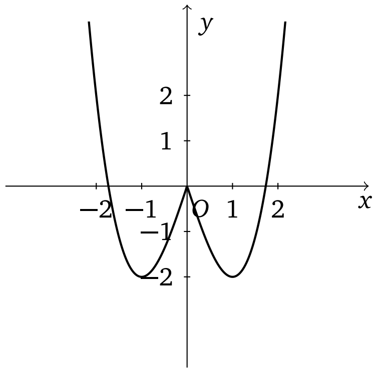
Câu 28. Theo đề $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

Bài toán tở thành tìm x để hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất với

$$f(x) = -27(10-x)^2 + 326(10-x) + x^2 + 2x = -26x^2 + 216x + 560.$$

Vì $f(x)$ là hàm bậc hai có $a < 0$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{54}{13} \simeq 4$ do $(y \le 6)$.
Vậy máy A cần được sử dụng trong 4 ngày, máy B cần được sử dụng trong 6 ngày.
Hàm số xác định trên $[1; +\infty)$ khi $m < 1$ $(*)$
$y' = \frac{-m}{(x-m)^2}$. Phải có $y' < 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.
Kết hợp điều kiện $(*)$ ta được $0 < m < 1$.

Câu 30. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x|\left(x^2 - 3\right)$ và $y = m$.
Dựa vào đồ thị, phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m = -2$ hoặc $m > 0$.
Trên đoạn $[-5; 5]$ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi
$m \in \{-2; 1; 2; 3; 4; 5\}$ tức là có 6 giá trị của m.



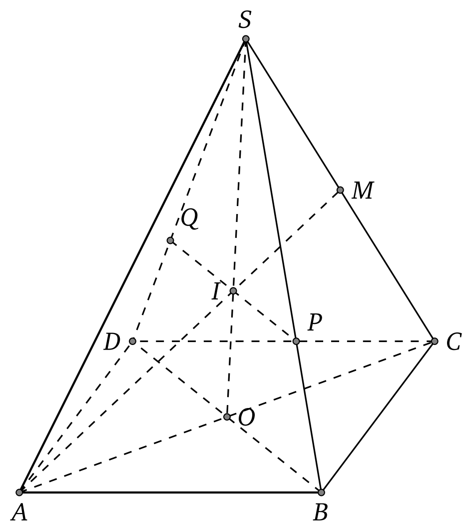
Câu 31. Ta có

$$\frac{V_{S.PQM}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SP}{SB}.\frac{SQ}{SD} = \frac{SM}{SC}.\left(\frac{SI}{SO}\right)^2 = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

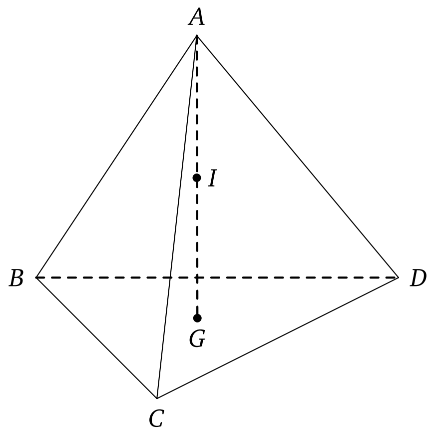
Do $V_{S.BCD} = \frac{V_{S.ABCD}}{2} = 18$ nên suy ra $V_{S.PQM} = 4$ và

$$\frac{V_{S.AQP}}{V_{S.ABD}} = \frac{SP}{SB}.\frac{SQ}{SD} = \left(\frac{SI}{SO}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Suy ra: $V_{S.AQP} = 8$ vậy nên $V_{S.AQMP} = 12$.



Câu 32. Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $3\vec{IA}+\vec{IB}+\vec{IC}+\vec{ID}=\vec{0}$ (1) $\Rightarrow I$ cố định (do A,B,C,D cố định).



Ta có:

$$\begin{aligned}P &= 3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2\\ &= 3\left(\vec{MI}+\vec{IA}\right)^2+\left(\vec{MI}+\vec{IB}\right)^2+\left(\vec{MI}+\vec{IC}\right)^2+\left(\vec{MI}+\vec{ID}\right)^2\\ &= 6MI^2+3IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\vec{MI}\left(3\vec{IA}+\vec{IB}+\vec{IC}+\vec{ID}\right)\\ &= 6MI^2+3IA^2+IB^2+IC^2+ID^2\end{aligned}$$

Do đó: P nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ trùng I.
Gọi G là trọng tâm tam giác BCD ta có: $\vec{ID}+\vec{IB}+\vec{IC}=3\vec{IG}$.
Kết hợp với (1) $\Rightarrow \vec{IA}=\vec{GI} \Rightarrow I$ là trung điểm GA.
Khi đó $IA^2=\dfrac{25}{6}, IB^2=IC^2=ID^2=\dfrac{25}{2} \Rightarrow P=50$.
Câu 33. Đặt $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)=t$ thì $x=9^t, y=12^t$ và $x+y=16^t$. Suy ra

$$\begin{aligned}&9^t+12^t=16^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{12}\right)^t+1=\left(\frac{16}{12}\right)^t\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (thỏa mãn) hoặc } \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \text{ (loại)}\end{aligned}.$$

Từ đó ta có $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 34. Áp dụng công thức $32a^3S^2+b^5=0$ ta có $32.2^3.2^2+m^5=0 \Leftrightarrow m^5=-1024 \Leftrightarrow m=-4$.

Câu 36. Ta có: $\displaystyle\int_{-1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|x^3\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|x^3\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}x^3\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^3\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{-1}+\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2}=\frac{17}{4}$.

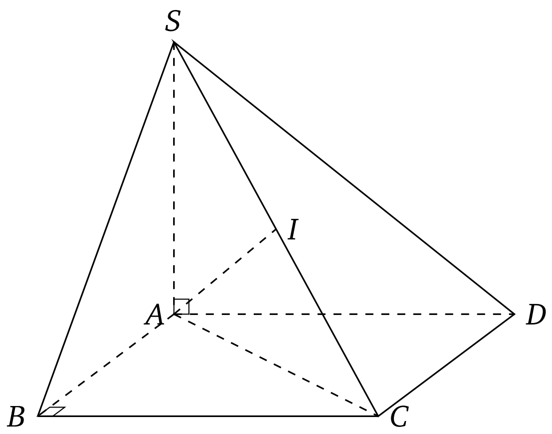
Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=4\cdot\dfrac{17}{4}=17\,\mathrm{cm}^2$.

Câu 37. Giả sử $z=a+bi$, với a,b là số thực. Gọi M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z+iz$. Khi đó $M(a;b); N(-b;a); P(a-b;a+b)$. Suy ra $MN=$

$\sqrt{a^2+b^2}; NP = PM = \sqrt{a^2+b^2}$.
Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P.
Ta có $S_{\Delta MNP} = 18 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot NP \cdot PM = 18 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 18 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = 3\sqrt{2}$.

Câu 41. Gọi I là trung điểm của SC, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Vậy bán kính cần tìm là

$$R = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{SA^2+AB^2+BC^2}}{2} = \frac{13a}{2}.$$



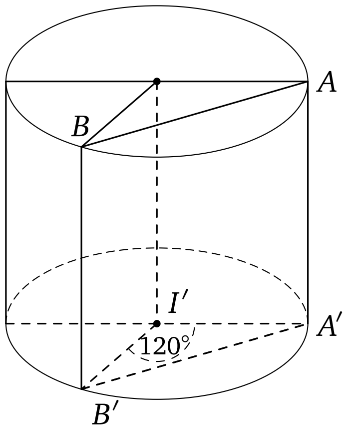
Câu 42. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với trục Ox, Oy, Oz. Khi đó mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Mặt khác $G(2;1;1)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ z = 2. \end{cases}$

hay $(P): 2x + 4y + 4z - 12 = 0$.

Câu 43. Ta có $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(x+1)\ln x + 2}{1 + x\ln x}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left[1 + \frac{\ln x + 1}{1 + x\ln x}\right]\mathrm{d}x = x\Big|_1^{\mathrm{e}} + \ln|1 + x\ln x|\Big|_1^{\mathrm{e}} =$
$\mathrm{e} + \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$.
Vậy $a = b = 1 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 1$.

Câu 44. Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên $h = 2r$.
Diện tích xung quanh hình trụ bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi rh = 4\pi \Rightarrow 2\pi r.2r = 4\pi \Rightarrow r = 1$.
Theo định lý cosin: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.
Vậy diện tích của $ABB'A'$ là $2.\sqrt{3}$.



Câu 48. Ta có $(1-i)|z| = z + 4 - \frac{2+3i}{\overline{z}}$ nên $z \neq 0$ và đặt $|z| = a > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&(1-i)a = z + 4 - \frac{2+3i}{\overline{z}}\\
&\Leftrightarrow (1-i)a \cdot \overline{z} = a^2 + 4\overline{z} - (2+3i)\\
&\Leftrightarrow [(a-4) - ia] \cdot \overline{z} = (a^2-2) - 3i
\end{aligned}$$

Tính mođun hai vế, ta được $\sqrt{(a-4)^2 + a^2} \cdot a = \sqrt{(a^2-2)^2 + 9}$, giải ra ta được $a = 1$. Do đó

$$(3+i) \cdot \overline{z} = 1 + 3i \Rightarrow \overline{z} = \frac{1+3i}{3+i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \Rightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Câu 50. Số các số nhị phân thỏa mãn đề bài là 2^9.
Gọi S_n là số các số nhị phân mà không có ba số 0 liên tiếp, ta sẽ cần tính S_9. Ta có $S_1 = 2, S_2 = 4, S_3 = 7$, còn với n tùy ý thì:

- Nếu chữ số thứ n là 1 thì khi bỏ nó ta, số còn lại vẫn thỏa và là S_{n_1}.
- Nếu chữ số thứ n là 0 và chữ số thứ $n-1$ là 1 thì số các số thỏa là S_{n-2}.
- Nếu chữ số thứ $n, n-1$ là 0 và chữ số thứ $n-2$ là 1 thì số các số thỏa là S_{n-3}.

Từ đó ta được $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$ nên

$$S_4 = 13, S_5 = 24, S_6 = 44, S_7 = 81, S_8 = 149, S_9 = 274.$$

Từ đó ta tìm được xác suất đã cho là $\frac{137}{256}$.